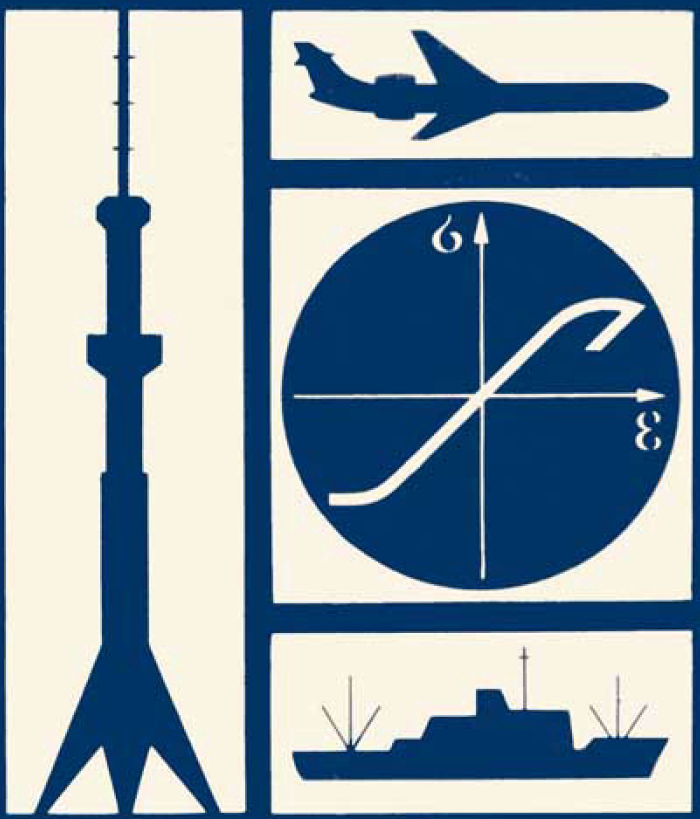
Problemas de resistencia de materiales

Dirigido por A.Volmir



EDITORIAL MIR

Problemas de resistencia de materiales

Dirigido por A.Volmir

Problemas de resistencia de materiales

Problemas de resistencia de materiales

Сборник задач по сопротивлению материалов

Под редакцией А. Вольмира

ИЗДАТЕЛЬСТВО "НАУКА" МОСКВА

Problemas de resistencia de materiales

Dirigido por A.Volmir

EDITORIAL MIR MOSCÚ

Traducido del ruso por S. A. Bulánov

Impreso en la URSS

На испанском языке

© Издательство "Наука". Главная редакция физико-математической литературы, 1984
© traducción al español, editorial Mir, 1986

ÍNDICE

Introducción 8
Signos convencionales utilizados en el libro 10

PROBLEMAS 11

Capítulo 1. Tracción y compresión 11

§ 1. Investigación experimental de la tracción y la compresión 11
§ 2. Cálculo de tensiones y deformaciones 14
§ 3. Condición de resistencia, determinación de los desplazamientos 17
§ 4. Problemas estáticamente indeterminados 19
§ 5. Esfuerzos de montaje y de origen térmico 25
§ 6. Consideración del peso propio y de las fuerzas centrífugas . . 27
§ 7. Cálculo según el estado límite 29
§ 8. Estados de tensión volumétrico, plano y lineal 32
§ 9. Teorías (criterios) de la resistencia 37
§ 10. Hilos flexibles y vasos de paredes delgadas 39
§ 11. Problemas que se resuelven con ayuda de ordenadores . . . 43

Capítulo 2. Cizallamiento y torsión 45

§ 1. Cizallamiento puro 45
§ 2. Cálculo de uniones soldadas y empalmes remachados . . . 47
§ 3. Torsión de árboles de sección circular 51
§ 4. Problemas estáticamente indeterminados a la torsión . . . 54
§ 5. Cálculo según el estado 58
§ 6. Torsión de barras de secciones no circulares 56
§ 7. Muelles salomónicos de paso pequeño 58
§ 8. Problemas que se resuelven en ordenador 59

Capítulo 3. Características geométricas de secciones de vigas . . . 61

§ 1. Centro del área de una sección 61
§ 2. Momentos de inercia de secciones transversales 64
§ 3. Momentos de inercia de las secciones de perfiles laminados . . 66
§ 4. Momentos de inercia de secciones de vigas de paredes delgadas 68

Capítulo 4. Tensiones en vigas y estructuras sometidas a flexión . . 71

§ 1. Diagramas de fuerzas interiores 71
§ 2. Módulos resistentes a la flexión 77
§ 3. Tensiones de flexión. Cálculo de secciones 79
§ 4. Vigas de paredes delgadas. Centro de flexión. Tensiones principales 82
§ 5. Cálculo según el estado límite 85
§ 6. Estructuras plano-espaciales 86

Capítulo 5. Desplazamientos en vigas y estructuras sometidas a flexión 88

§ 1. Vigas de secciones constantes estáticamente determinadas . . . 88
§ 2. Vigas de sección variable 97
§ 3. Vigas estáticamente indeterminadas 101
§ 4. Cálculo según el estado límite 108
§ 5. Vigas sobre base elástica 109
§ 6. Torsión restringida de barras de paredes delgadas de perfil abierto 110
§ 7. Estructuras planas 111
§ 8. Estructuras plano-espaciales 116
§ 9. Métodos de elementos finitos. Empleo de ordenadores para la obtención de diagramas 119

Capítulo 6. Resistencia compuesta 120

§ 1. Flexión esviada 120
§ 2. Tracción o compresión con flexión 122
§ 3. Estado límite de una barra sometida simultáneamente a flexión y tracción 129
§ 4. Flexión con torsión 129
§ 5. Otros casos de resistencia compleja 133
§ 6. Barras de eje quebrado 136
§ 7. Barras de eje quebrado 138

Capítulo 7. Estabilidad de barras y de sistemas de barras 139

§ 1. Estabilidad de las barras dentro de los límites de elasticidad 139
§ 2. Estabilidad tras los límites de elasticidad 144
§ 3. Cálculo de la estabilidad (flexión longitudinal) por las normas del diseño estructural 149
§ 4. Uso de métodos aproximados de cálculo de la estabilidad de barras y sistemas de barras 150
§ 5. Flexión transversal y longitudinal 160
§ 6. Métodos numéricos. Empleo de ordenadores 164

Capítulo 8. Barras de curvatura grande. Cilindros de paredes gruesas 167

§ 1. Barras de curvatura grande 167
§ 2. Cilindros de paredes gruesas 169

Capítulo 9. Problemas de la Dinámica 171

§ 1. Tensiones y deformaciones en los elementos móviles de construcciones 171
§ 2. Oscilaciones propias de sistemas elásticos reducidos a sistemas con un grado de libertad 174
§ 3. Oscilaciones forzadas de sistemas elásticos reducidos a sistemas con un grado de libertad 179
§ 4. Oscilaciones de sistemas con varios grados de libertad 181
§ 5. Acción del choque sobre una construcción 182
§ 6. Oscilaciones paramétricas y autooscilaciones 185
§ 7. Métodos numéricos. Utilización de ordenadores 186

Capítulo 10. Resistencia a la fatiga y fluencia 187

§ 1. Resistencia en estado de tensiones variables 187
§ 2. Fluencia y relajación 190
§ 3. Mecánica de la rotura 192
§ 4. Seguridad en el caso de cargas accidentales 193

Capítulo 11. Láminas y bóvedas 194

§ 1. Flexión de láminas rectangulares 194
§ 2. Flexión de láminas circulares 196
§ 3. Estabilidad de láminas rectangulares sometidas a compresión . . . 197
§ 4. Estabilidad de láminas rectangulares sometidas a cizallamiento . . . 198
§ 5. Estabilidad local de barras de paredes delgadas 201
§ 6. Estabilidad de bóvedas 202
§ 7. Deformación postcrítica de láminas 205
§ 8. Métodos numéricos. Utilización de ordenadores 206
§ 9. Tensiones tangenciales en bóvedas reforzadas 206

Capítulo 12. Problemas de olimpiadas estudiantiles 209

§ 1. Tracción y compresión 209
§ 2. Cizallamiento y torsión 215
§ 3. Características geométricas de las secciones 218
§ 4. Tensiones en vigas y estructuras debidas a flexión 220
§ 5. Desplazamientos en vigas y estructuras debidos a flexión 223

SOLUCIONES E INDICACIONES 226

RESPUESTAS 425

ANEXOS 457

Anexo 1. Tablas de consulta 457
Tabla 1. Valores de las funciones η y η_1 para cálculos de vigas sobre base elástica 457
Tabla 2. Valores de las integrales determinadas que se encuentran al calcular esfuerzos y desplazamientos en barras y anillos con eje circular 458
Tabla 3. Coeficientes φ de flexión longitudinal de elementos en compresión axial 459
Tabla 4. Valores de las funciones $\Phi(u)$, $\Psi(u)$, $\chi(u)$ para el cálculo de vigas en flexión transversal y longitudinal simultánea 460
Tabla 5. Coeficientes μ de reducción de la longitud l para barras de rigidez constante con apoyos articulados 461
Tabla 6. Angulares equiláteros de acero laminado 462
Tabla 7. Perfiles de acero laminados en caliente. Vigas de doble T 464
Tabla 8. Angulares inequiláteros de acero laminados 465
Tabla 9. Perfiles en U de acero laminados en caliente 468
Tabla 10. Perfiles prensados de tipo Pr-100 469
Tabla 11. Coeficientes de concentración efectivos para árboles con arista hueca en flexión (K_σ) y en torsión (K_τ) 470
Tabla 12. Coeficientes de concentración $K_{\sigma D}$ y $K_{\tau D}$ para árboles con piezas encajadas (ajustadas) 471
Tabla 13. Cargas (tensiones) críticas de cálculo (inferiores) en los problemas de estabilidad de bóvedas 471
Tabla 14. Unidades de medida de magnitudes mecánicas en el Sistema Internacional (SI) 472
Anexo 2. Cálculo de construcciones en ordenadores 473

INTRODUCCIÓN

Preparando este libro los autores hemos tratado de abarcar las exigencias que impone la escuela superior al material didáctico dedicado a las disciplinas fundamentales y de ingeniería en general. Este trabajo presenta una serie de problemas que reflejan el desarrollo de las distintas ramas de la técnica en los últimos tiempos. En algunos capítulos fueron incluidos apartados dedicados a los métodos numéricos. Parte de los problemas de estos apartados debe ser resuelto por los estudiantes, componiendo previamente los programas para el ordenador y analizando después los resultados del cómputo realizado por la máquina.

El plan general que se siguió en la preparación del presente libro en gran medida responde al conocido libro de texto de V.I. Feodosiev cuya segunda edición fue publicada por Mir en 1985. La utilización del material expuesto en este compendio se hace más fácil gracias a la división de los capítulos en un número de párrafos suficientemente grande, dentro de los cuales la temática de los problemas es homogénea.

Los valores físicos están dados en las unidades internacionales SI. Junto con las principales unidades de las fuerzas, tensiones, etc., se utilizan también unidades derivadas de las anteriores que resultaron más cómodas en la práctica académica.

Todos los problemas tienen su respuesta. Muchos de ellos, además, contienen la descripción detallada de la resolución; los números de estos problemas contienen asteriscos.

Las teorías (hipótesis) de resistencia utilizadas en el presente libro: la teoría de las tensiones normales máximas, la de alargamientos relativos máximos, la de tensiones tangenciales máximas, la de la energía de variación de la forma, la de tensiones límites (de Mohr) se mencionan, para abreviar, con los números desde I hasta V respectivamente.

I. Teoría de las tensiones normales máximas,

$$\sigma_{e,I} = \sigma_1 \leqslant [\sigma]_{tr}.$$

II. Teoría de los alargamientos relativos máximos,

$$\sigma_{e,II} = \sigma_1 - \mu\,(\sigma_2 + \sigma_3) \leqslant [\sigma]_{tr}.$$

III. Teoría de las tensiones tangenciales máximas (hipótesis de la plasticidad de Saint-Venant).

$$\sigma_{e,III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leqslant [\sigma]_{tr}.$$

IV. Teoría de la energía potencial de la variación de la forma o teoría de las tensiones tangenciales octaédricas (hipótesis de la plasticidad de Huber — Mieses — Hencky)

$$\sigma_{e,\,IV} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \leqslant [\sigma]_{tr}.$$

V. Teoría de Mohr (hipótesis de los estados límites)

$$\sigma_{e,\,V} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{fl.\,tr}}{|\sigma_{fl.\,comp}|}\sigma_3 \leqslant [\sigma]_{tr}.$$

Si los factores de seguridad en tracción y en compresión son iguales, entonces

$$\sigma_{e,\,V} = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_{tr}}{[\sigma]_{comp}}\sigma_3 \leqslant [\sigma]_{tr}.$$

Para los materiales frágiles y semifrágiles

$$\sigma_{e,\,V} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{r.\,tr}}{|\sigma_{r.\,comp}|}\sigma_3 \leqslant [\sigma]_{tr}.$$

Los capítulos 1—3 y 11, así como el § 2 del cap. 4, § 3 del cap 10, los §§ 1—3 del cap. 12 fueron escritos por Yu.P. Grigoriev; los capítulos 4, 5, así como el § 2 del cap. 11 y los §§ 4, 5 del cap. 12, por V.A. Marín; el capítulo 6, por V.V. Novitski; el capítulo 7, así como el § 6 del cap. 9 y el § 8 del cap. 11, por A.S. Volmir; los capítulos 8—10, por A.I. Kodanev.

Algunos problemas originales fueron preparados para el presente libro por: A.A. Umanski — 5.124, 5.131, 5.132; K.Z. Jairnásov — 5.148—5.150, 7.73—7.79, 7.83, 7.84, 9.73—9.76; I.I. Trapezin y B.V. Zaslavski — 5.61; V.N. Terskij — 5.151; B.I. Ivani — 7.2, 7.6, 7.12, 7.15, 7.17, 7.24, 7.28, 7.29; B.A. Kuránov — 7.18, 7.30, 11.54, 11.55; I.I. Trapezin — 10.3, 10.4, 10.9; Yu.P. Grigoriev — 10.21—10.25; V.A. Ilín — 11.52, 11.53, 11.56. El programa CINT para el ordenador fue elaborado por T.V. Nevskaya. El esquema sinóptico 1 fue confeccionado por V.N. Moskalenko, el 2 y 3, por A.E. Tijomírov.

Los autores

SIGNOS CONVENCIONALES UTILIZADOS EN EL LIBRO

x, y, z — coordenadas
l — longitud de barra, luz de la viga
b, h — dimensiones de la sección rectangular
r, d — radio y diámetro de la sección circular
F — área de la sección transversal
J, J_p — momento de inercia de la sección, momento polar de inercia
i — radio de giro de la sección
λ, Δl, ε — alargamiento de la barra, alargamiento relativo
v — flecha de la viga
θ — ángulo de giro de la sección de la viga
φ — ángulo de torsión
μ — coeficiente de Poisson
P — fuerza concentrada
M, L — momento concentrado
q — intensidad de la carga distribuida
N — fuerza normal que actúa en la sección
M, Q — momento flector y esfuerzo cortante que actúan en la sección de la viga
σ, τ — tensión normal y tensión tangencial
$[\sigma]$, $[\tau]$ — tensiones admisibles normal y tangencial
E, G — módulo de elasticidad y módulo de cizallamiento del material
ρ, γ — densidad del material, masa específica
σ_{prop} — límite de proporcionalidad
σ_{fl}, σ_r — límite de fluencia y límite de resistencia a la rotura
σ_f — límite de fatiga
σ_{-1} — límite de fatiga en el ciclo simétrico
$K_{\sigma\Sigma}$, $K_{\tau\Sigma}$ — coeficiente de disminución total de la resistencia por fatiga
ω — frecuencia de oscilaciones, también área del diagrama de momento
n — número de revoluciones
T — temperatura, también energía cinética
U — energía potencial
t — tiempo, también temperatura
p — presión

CAPÍTULO 1

TRACCIÓN Y COMPRESIÓN

§ 1. Investigación experimental de la tracción y la compresión

1.1. Para comprobar la magnitud del esfuerzo creado por la máquina de ensayo se usa una muestra cilíndrica de referencia de diámetro $d = 50$ mm. El alargamiento de la muestra estirada, medido en una longitud $l = 100$ mm resulta igual a $\Delta l = 0{,}1$ mm. Determinar el esfuerzo longitudinal N y la magnitud de las tensiones normales σ en la muestra, si el módulo de elasticidad del material de la muestra $E = 2{,}04 \cdot 10^5$ MPa y el límite de proporcionalidad $\sigma_{prop} = 260$ MPa.

1.2. Un tensómetro mecánico de base $s = 100$ mm está instalado sobre una muestra cilíndrica normal de diámetro $d = 20$ mm. Durante el alargamiento de la muestra se han fijado las indicaciones del tensómetro: $n_1 = 8$ mm, $n_2 = 32$ mm, $n_3 = 54$ mm, $n_4 = 76$ mm que corresponden a las magnitudes de la fuerza de tracción: $P_1 = 10$ kN, $P_2 = 20$ kN, $P_3 = 30$ kN, $P_4 = 40$ kN. Calcular la magnitud media del módulo de elasticidad del material de la muestra, si se sabe que el aumento del tensómetro es $k = 500$. ¿De qué material está probablemente hecha la muestra?

1.3*. Antes de la prueba la parte de trabajo de la muestra normal de diámetro $d_0 = 10$ mm está dividida por trazos finos en 10 partes iguales. Después de romper la muestra las distancias entre los trazos resultaron iguales a: $l_{0-1} = 12$ mm, $l_{1-2} = 11$ mm, $l_{2-3} = 11$ mm, $l_{3-4} = 11$ mm, $l_{4-5} = 14$ mm, $l_{5-6} = 19$ mm, $l_{6-7} = 15$ mm, $l_{7-8} = 12$ mm, $l_{8-9} = 11$ mm, $l_{9-10} = 11$. El diámetro mínimo de la muestra en el lugar de la rotura es igual a $d_1 = 6$ mm. Construir el diagrama de la distribución del alargamiento remanente relativo a lo largo de la muestra. ¿Qué valor tiene el alargamiento uniforme máximo δ_{unif}? Calcular los alargamientos medio δ_{med} y máximo $\delta_{máx}$ remanentes, así como la estricción de la muestra (ψ).

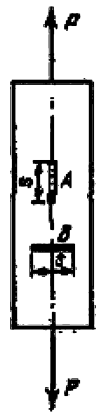
1.4*. Una muestra normal de diámetro $d = 20$ mm fue ensayada a tracción. Las deformaciones durante la prueba se median por medio de dos tensómetros de espejo de base $s = 100$ mm con un aumento $k = 500$. Los datos del experimento se dan en la tabla siguiente:

Tabla para el problema 1.4

Carga P, kN	Lecturas de los tensómetros		Carga P, kN	Lecturas de los tensómetros	
	derecho n, mm	izquierdo n, mm		derecho n, mm	izquierdo n, mm
10	20	40	60	58	82
20	27	48	70	67	90
30	34	58	80	75	98
40	42	67	90	84	106
50	50	75	100	95	117

Calcular el módulo de elasticidad E del material de la muestra y el límite de proporcionalidad convencional $\sigma_{0,002}$.

1.5*. Sobre una muestra plana están instalados dos tensómetros. El tensómetro A está puesto a lo largo del eje de la muestra, el tensómetro B se encuentra perpendicularmente al eje. Los aumentos de los tensómetros son respectivamente iguales a $k_A = 950$, $k_B = 1190$. Las bases de éstos son iguales: $s_A = s_B = 20$ mm.



Para el problema 1.5

Al estirar la muestra con una carga de crecimiento escalonado se han obtenido los datos expuestos en la tabla.

Tabla para el problema 1.5

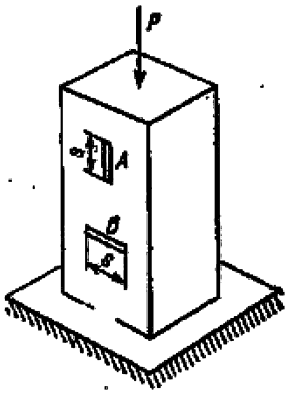
Carga P, kN	Lecturas de los tensómetros	
	n_A, mm	n_B, mm
2	4,5	36,0
12	14,5	32,5
22	24,0	30,0
32	34,5	25,5

Calcular las magnitudes medias del módulo de elasticidad longitudinal E y del coeficiente de deformación transversal μ (coeficiente de Poisson). El área de la sección de la muestra es $F = 1$ cm^2.

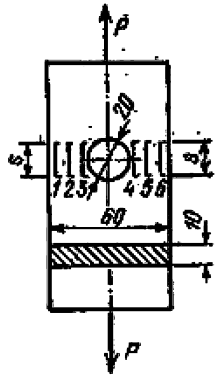
1.6. Determinar el valor del coeficiente de deformación transversal (coeficiente de Poisson) para el acero, si se sabe que durante la

compresión de un paralelepípedo de este material el crecimiento de las indicaciones del tensómetro longitudinal A es igual a $\Delta n_A = 10$ mm mientras que el crecimiento de las indicaciones del tensómetro B es igual a $\Delta n_B = 3{,}5$ mm. Las bases de los tensómetros son iguales: $s_A = s_B = 20$ mm. Los aumentos de los tensómetros son $k_A = 1000$, $k_B = 1250$.

1.7*. Una lámina de acero que tiene un orificio de diámetro $d = 20$ mm fue ensayada a la tracción dentro de los límites de defor-



Para el problema 1.6



Para el problema 1.7

maciones elásticas. El ancho de la lámina es $b = 60$ mm, el grosor, $h = 10$ mm. Sobre la lámina se pegaron seis extensómetros de resistencia (medidores de alargamientos) de base $s = 10$ mm a distancias iguales entre sí.

Las indicaciones de los extensómetros, obtenidas con ayuda del medidor electrónico de deformaciones estáticas, se dan en la tabla.

Tabla para el problema 1.7

Carga P, kN	Indicaciones de los extensómetros de resistencia n_i					
	1	2	3	4	5	6
5	7,0	32,0	8,0	14,0	2,0	20,0
25	23,0	52,0	44,0	52,0	21,0	38,0
45	43,0	70,0	82,0	92,0	41,0	58,0

Construir el diagrama de tensiones normales en la sección debilitada y calcular el coeficiente de concentración de tensiones junto al orificio. El módulo de elasticidad del material $E = 2{,}0 \cdot 10^5$ MPa. El valor de una división del medidor de deformaciones es $c = 1{,}25 \cdot 10^{-5}$.

1.8. Durante el ensayo de tracción de una muestra normal de diámetro $d = 2$ cm y longitud $l = 20$ cm fabricada de acero pobre en carbono se obtuvieron los datos siguientes: el esfuerzo de tracción máximo $P_{máx} = 182$ kN, el esfuerzo en el momento de rotura $P_{rot} = 154$ kN, la longitud de la parte de trabajo de la muestra después de la rotura $l_1 = 25{,}2$ cm, el diámetro mínimo del cuello $d_1 = 1{,}4$ cm. Calcular el límite de resistencia a la rotura del material σ_r, el alargamiento remanente relativo δ, el estrechamiento remanente relativo ψ. Hallar el valor aproximado del trabajo específico de la deformación considerando que el coeficiente de plenitud del diagrama de la tracción del acero pobre en carbono es igual a 0,85. Determinar la tensión real $\sigma_{máx}$ en el momento de la rotura.

1.9. La escala del tensómetro tiene 40 graduaciones. Cada graduación es igual a 1 mm. El aumento del tensómetro es $k = 1\,000$. La precisión de lectura en la escala es igual a 0,2 mm. Determinar qué baso s debe tener el tensómetro para poder asegurar en la zona elástica la determinación de las tensiones en las muestras de acero con una precisión de hasta $\Delta\sigma = 2$ MPa. Calcular la magnitud del crecimiento máximo de las tensiones que puede ser medido por tal tensómetro. Se considera que el módulo de elasticidad del acero es igual a $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

1.10*. Calcular el error máximo posible en la determinación experimental del módulo de elasticidad en compresión, si el error relativo del medidor de fuerzas de la prensa es $\pm 2\%$, el tensómetro permite medir el alargamiento con una precisión de $\pm 1\%$ y en la medición de la longitud y el diámetro de la muestra se admite un error relativo de $\pm 0{,}5\%$.

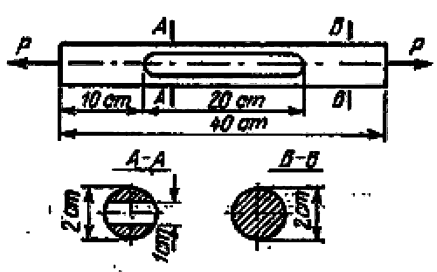
§ 2. Cálculo de tensiones y deformaciones

1.11*. Una lámina de acero de sección 30×10 mm y longitud $l = 250$ mm está estirada por una fuerza $P = 60$ kN. El módulo de elasticidad del material de la lámina es $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. Calcular la tensión normal, así como los alargamientos relativo y absoluto de la lámina.

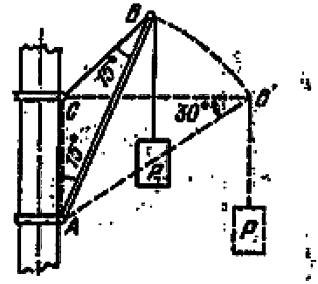
1.12. Una barra cilíndrica hueca de longitud $l = 200$ mm sometida a la acción de una fuerza de compresión se acortó elásticamente en la magnitud $\Delta l = 0{,}2$ mm. El diámetro exterior del cilindro es $D = 40$ mm, el interior es $d = 30$ mm. Determinar la magnitud de la fuerza de compresión y la tensión en la barra, si el módulo de elasticidad del material es igual a $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

1.13*. Una barra de acero cilíndrica de longitud $l = 40$ cm y de diámetro $D = 2$ cm está debilitada en su parte media por una ranura de longitud $l_1 = 20$ cm y de ancho $h = 1$ cm. Calcular el alargamiento total y las tensiones en las partes debilitada y no debilitada de la barra, surgidas durante el estiramiento de ésta por dos fuerzas $P = 15$ kN. El módulo de elasticidad del material es $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

1.14*. Calcular las tensiones en el brazo AB y en el cable CB de una grúa de mástil que levanta una carga $P = 2$ kN. El brazo está fabricado de un tubo de acero de 20×18 mm, el área de la sección transversal del cable es igual a 0,1 cm². Hallar cómo cambian



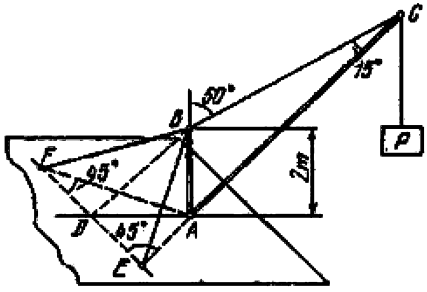
Para el problema 1.13



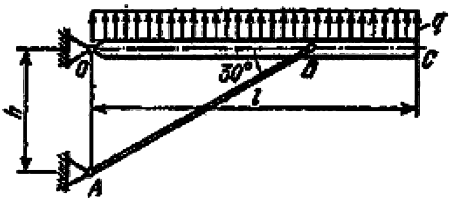
Para el problema 1.14

las tensiones en estos elementos, si, sin cambiar la magnitud de la carga, se hace pasar la grúa a la posición $AB'C$ representada en la figura por líneas de trazos.

1.15. La grúa trasladable representada en la figura tiene una capacidad de carga igual a $P = 20$ kN. Calcular las tensiones en los elementos de la grúa y hallar la magnitud del acortamiento elástico de su brazo AC. El material del brazo de la grúa es acero con



Para el problema 1.15



Para el problema 1.16

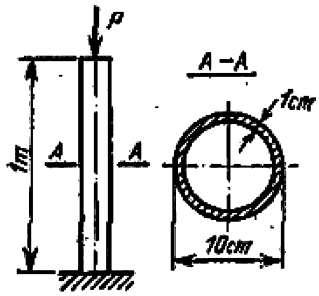
el módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. Considerar que $AB = AE = AF = 2$ m. El ángulo EAF es igual a 90°. El plano ABC divide el ángulo diedro recto $EABF$ en dos partes iguales.

El diámetro de los cables BE, BF y de la cuerda BC es igual a 20 mm. El diámetro del soporte AB es igual a 50 mm, y el brazo AC tiene una sección tubular de 100×92 mm.

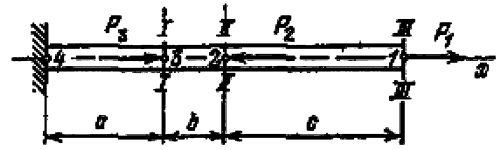
1.16*. La viga rígida OC, articulada en el punto O, está cargada con fuerzas repartidas uniformemente a lo largo de la misma. Calcular las tensiones normales en el tornapuntas AB, si el área de su sección es $F_{AB} = 5$ cm². Despreciando la deformación de la propia viga, calcular la magnitud del desplazamiento vertical Δ_C del extremo libre de la viga (del punto C) considerando que el módulo de elastici-

dad del material de la riostra es $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. La intensidad de la carga repartida es $q = 2$ kN/m, $l = 4$ m, $h = 1{,}5$ m.

1.17. Un tubo de hierro fundido de longitud igual a 1 m está expuesto a una fuerza de compresión $P = 200$ kN. El diámetro exterior del tubo es $D = 10$ cm, el grosor de su pared, $h = 1$ cm.



Para el problema 1.17

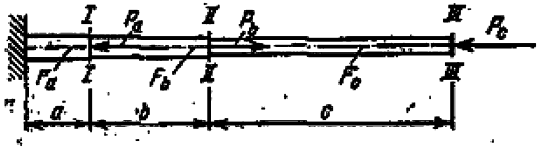


Para el problema 1.18

Calcular la magnitud de las tensiones en los casos de acortamientos absoluto y relativo del tubo. Se considera que $E = 1{,}2 \cdot 10^5$ MPa.

1.18*. Una barra de acero de sección redonda de diámetro $D = 3$ cm, empotrada rígidamente por un extremo, está sometida a la acción de tres fuerzas dirigidas, como lo representa la figura, a lo largo del eje de ésta: $P_1 = 100$ kN, $P_2 = 140$ kN y $P_3 = 120$ kN. Calcular las fuerzas longitudinales N y las tensiones σ en los tramos *1—2*, *2—3*, *3—4* de la barra y los desplazamientos elásticos w de las secciones I—I, II—II, III—III. Construir los diagramas de la fuerza longitudinal, de las tensiones y de los desplazamientos a lo largo de la barra. Considerar que el módulo de elasticidad del material de la barra es $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, las longitudes de los tramos son: $a = 0{,}2$ m, $b = 0{,}1$ m, $c = 0{,}3$ m.

1.19*. Una barra escalonada está cargada con fuerzas dirigidas a lo largo de su eje: $P_a = 120$ kN, $P_b = 60$ kN, $P_c = 20$ kN. Las

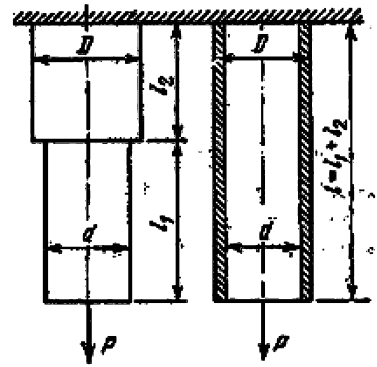


Para el problema 1.19

longitudes de los tramos de la barra son $a = 0{,}2$ m, $b = 0{,}4$ m, $c = 0{,}8$ m; las áreas de las secciones son iguales a $F_a = 15$ cm^2, $F_b = 10$ cm^2, $F_c = 5$ cm^2. El módulo de elasticidad del material de la barra es $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. Construir los diagramas de las fuerzas longitudinales N_z, de las tensiones normales σ_z, de los alargamientos relativos ε_z y de los desplazamientos longitudinales de las secciones de la barra w.

1.20*. Dos barras cilíndricas: una hueca y escalonada la otra están fijadas por sus extremos superiores. Sus otros extremos están cargados con fuerzas de tracción. Calcular y comparar entre sí las rigideces de estas barras a compresión c_{esc} y c_{huec}, considerando que la relación de los diámetros es $d/D = \alpha < 1$ y la relación de las longitudes de los tramos de la barra escalonada, $l_2/l_1 = \beta$. Las longitudes totales de las barras son iguales.

Hallar la relación entre α y β para que las rigideces de las barras sean iguales.

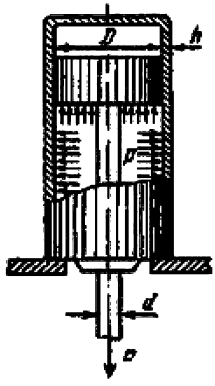


Para el problema 1.20

§ 3. Condición de resistencia, determinación de los desplazamientos

1.21*. Calcular el diámetro d de los bulones de sujeción del cilindro de un motor de combustión interna considerando que la distribución de los esfuerzos entre ellos es uniforme. Viene dado: el diámetro interior del cilindro $D = 100$ mm, la sobrepresión máxima de los gases en el cilindro $p = 10$ MPa, el número de bulones $n = 8$, la tensión admisible en el material de los bulones $[\sigma] = 60$ MPa.

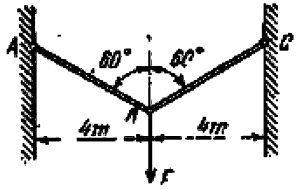
1.22. Efectuar el cálculo de comprobación de la resistencia del cilindro y el vástago del émbolo de un compresor que crea una presión $p = 25$ MPa. El diámetro interior del cilindro es $D = 40$ mm; el grosor de su pared, $h = 2$ mm, el diámetro del vástago, $d = 15$ mm. La tensión admisible en el material del vástago es $[\sigma]_{vás} = 160$ MPa y en el del cilindro, $[\sigma]_{cil} = 300$ MPa.



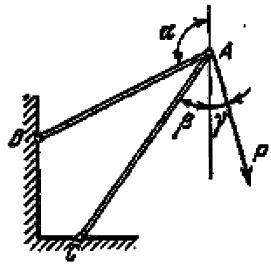
Para el problema 1.22

1.23*. Una carga P se soporta por dos barras iguales de sección $F = 5$ cm² inclinadas respecto a la vertical bajo ángulos iguales $\alpha = 60°$. Determinar la magnitud admisible de la carga P y calcular el desplazamiento Δ_B del nudo B; la tensión admisible de tracción en el material de las barras es $[\sigma]_{tr} = 100$ MPa, el módulo $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

1.24*. Determinar las áreas de las secciones de las barras del soporte ABC cargado con una fuerza $P = 150$ kN de acuerdo con la tensión admisible $[\sigma]_{tr} = 120$ MPa para la barra traccionada y $[\sigma]_{comp} = 50$ MPa para la barra comprimida. Los ángulos formados por las direcciones de las barras y la fuerza con la vertical son: $\alpha = 135°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 0°$.



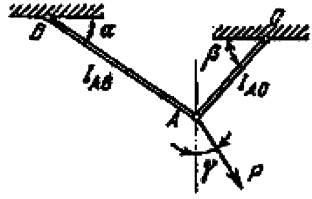
Para el problema 1.23



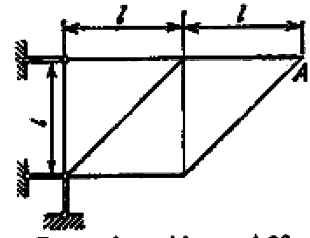
Para el problema 1.24

1.25*. El nudo plano ABC, cargado con una fuerza $P = 100$ kN, forma con la vertical un ángulo $\gamma = 30°$. Las longitudes de las barras de sujeción son: $l_{AB} = 0{,}2$ m, $l_{AC} = 0{,}1$ m; las áreas de las secciones son: $F_{AB} = 10$ cm², $F_{AC} = 3$ cm²; los ángulos formados por las barras y la horizontal son $\alpha = 30°$ y $\beta = 60°$. El módulo de elasticidad del material de las barras es $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. Calcular: a) el desplazamiento horizontal del nudo Δ_x, b) el desplazamiento vertical del nudo Δ_y, c) el desplazamiento total del nudo Δ y su dirección (el ángulo θ formado por la dirección del desplazamiento total y la horizontal).

1.26*. Una armadura plana, compuesta de barras de igual sección, se calienta a $\Delta t = 100$ K. Determinar la magnitud del desplazamiento vertical del nudo A, provocado por el calentamiento, si el



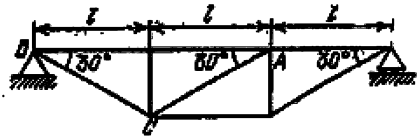
Para el problema 1.25



Para el problema 1.26

coeficiente de dilatación lineal del material de las barras es $\alpha = 1{,}25 \cdot 10^{-5}$ y $l = 100$ cm. Considérese constante la temperatura de las barras de apoyo.

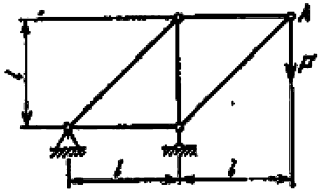
1.27*. Durante el montaje de una armadura resultó que la barra BC fue fabricada $\Delta_0 = 0{,}005\, l$ más corta que su dimensión de pro-



Para el problema 1.27

yecto. Determinar el desplazamiento del nudo A, provocado por este cambio de la dimensión, considerando que los nudos de la armadura son charnelas ideales: $l = 120$ cm.

1.28. Calcular los esfuerzos en las barras de la estructura representada en la figura. Determinar la sección de la barra más cargada, si su tensión admisible es $[\sigma] = 160$ MPa. Calcular el desplazamiento vertical Δ_y del nudo A, considerando que $P = 50$ kN, $l = 80$ cm, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. Considérense iguales las áreas de las secciones de las barras.



Para el problema 1.28

1.29. Determinar el desplazamiento total del nudo A de la estructura representada en la figura para el problema 1.28 provocado por el calentamiento de todas las barras a $\Delta t = 200$ K, si el coeficiente de dilatación lineal del material es $\alpha = 1{,}25 \cdot 10^{-5}$.

1.30. Calcular el desplazamiento total del nudo A de la estructura de barras representada en la figura para el problema 1.28, si se sabe que todas las barras están fabricadas un 0,5% más largas que sus dimensiones nominales.

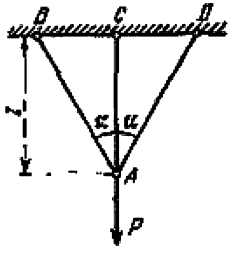
§ 4. Problemas estáticamente indeterminados

1.31*. Calcular el esfuerzo en las barras de un nudo compuesto de tres barras y determinar la magnitud admisible de la carga P, considerando que el ángulo $\alpha = 30°$, el área de la sección de cada una de las barras $F = 2$ cm^2, el módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, el límite de fluencia $\sigma_{fl} = 260$ MPa, el coeficiente de seguridad según el límite de fluencia $n_{fl} = 2$. Determinar en cuánto variará la magnitud de la fuerza admisible P, si el área de la sección de la barra media se reduce dos veces sin cambiar las secciones de las barras laterales.

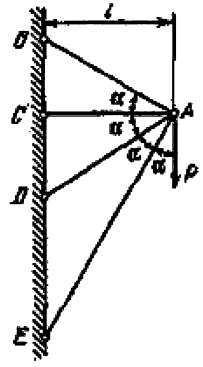
1.32. El nudo A, compuesto de cuatro barras, está cargado con una fuerza vertical P. Calcular los esfuerzos en las barras del nudo, si el ángulo $\alpha = 30°$. El material y las secciones de las barras son iguales.

1.33. Calcular la magnitud admisible de la fuerza P, aplicada en el nudo A el cual a su vez es sostenido por cuatro barras situadas simétricamente y dispuestas en un mismo plano con la fuerza. El material de las barras es acero, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{fl} = 260$ MPa, el coeficiente de seguridad según el límite de fluencia $n_{fl} = 2$ y el ángulo $\alpha = 30°$. Determinar en cuánto variará la magnitud de P, si las barras medias AC y AD se fabrican de cobre estirado en frío para el cual $E = 1{,}2 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{fl} = 300$ MPa. Las áreas de las secciones de las barras son idénticas e iguales a $F = 2$ cm^2.

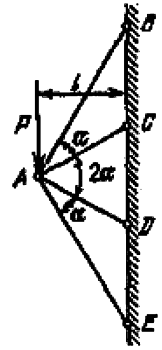
1.34*. El nudo plano A compuesto de cinco barras está cargado con una fuerza P inclinada bajo el ángulo $\alpha = 30°$ respecto a la horizontal. Hallar los esfuerzos en las barras, considerando que estas últimas son de secciones iguales y están fabricadas de un mismo material. Los ángulos entre las barras son iguales: $\beta = 30°$.



Para el problema 1.31

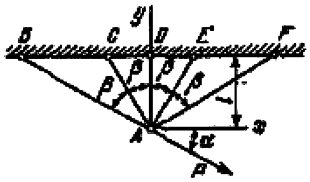


Para el problema 1.32

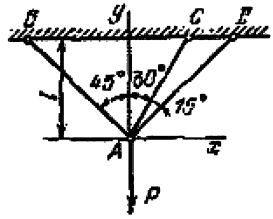


Para el problema 1.33

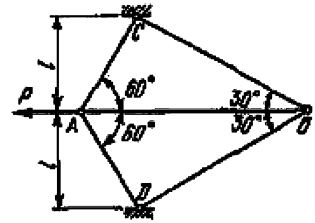
1.35. Calcular los esfuerzos en las barras del nudo plano A, considerando que son de igual sección y están fabricadas de un mismo material. Determinar la magnitud necesaria del área de la sección de la barra, si $P = 100$ kN y la tensión admisible $[\sigma] = 160$ MPa.



Para el problema 1.34



Para el problema 1.35



Para el problema 1.36

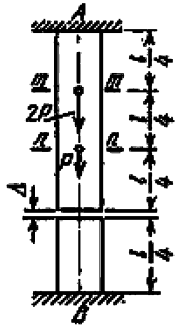
1.36. Calcular los esfuerzos en las barras de una armadura estáticamente indeterminada, considerando que las barras tienen secciones transversales iguales y están hechas de un mismo material. Elegir el área de la sección por la barra más cargada cuando $P = 150$ kN y la tensión admisible $[\sigma] = 160$ MPa.

1.37. Entre los extremos libres de dos barras empotradas en sus extremos opuestos hay un espacio $\Delta = 10^{-4}\,l$. La barra superior está cargada con dos fuerzas $2P$ y P aplicadas en las secciones $m—m$ y $n—n$. Calcular la magnitud admisible del parámetro de la carga P, considerando que el módulo de elasticidad del material es $E = 2 \cdot 10^5$ MPa; el área de la sección de cada barra, $F = 25$ cm^2, la presión admisible sobre el cimiento en la sección B, $[\sigma]_{comp} = 40$ MPa; la tensión admisible en el material de las barras a tracción $[\sigma]_{tr} = 200$ MPa.

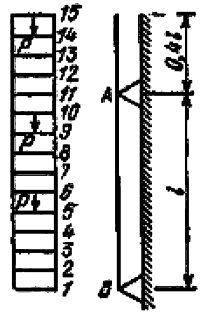
¿Cómo variará la magnitud de la fuerza admisible P, si el espacio Δ se aumenta dos veces?

1.38. Una escalera de acero está sujetada a una pared al nivel de los escalones primero y undécimo. Considerando que la pared es

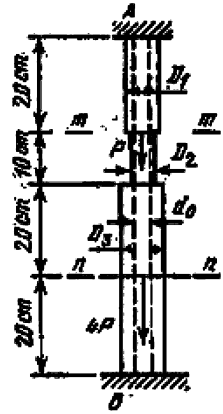
absolutamente rígida, calcular las reacciones en los apoyos de la escalera para el caso cuando sobre ella se encuentran tres personas de peso 1 kN cada una dispuestas en los escalones quinto, noveno y décimocuarto contando desde abajo.



Para el problema 1.37



Para el problema 1.38

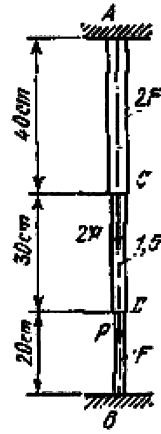


Para el problema 1.39

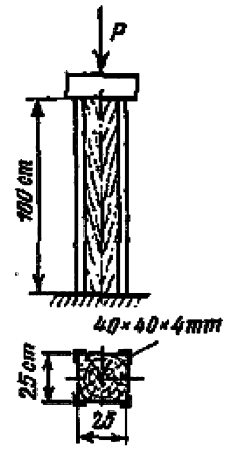
1.39*. Una barra escalonada, empotrada rígidamente en sus dos extremos, está cargada con una fuerza $P = 200$ kN en la sección $m—m$ y con una fuerza $4P = 800$ kN en la sección $n—n$. A lo largo del eje de la barra hay un orificio pasante de diámetro $d_0 = 2$ cm. Los diámetros exteriores de los escalones son: $D_1 = 6$ cm, $D_2 = 4$ cm, $D_3 = 8$ cm. El material es acero, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. Determinar las reacciones en los apoyos A y B, construir los diagramas de fuerzas longitudinales N, de tensiones normales σ y de los desplazamientos longitudinales de las secciones transversales de la barra w.

1.40. Una barra escalonada está rígidamente empotrada en sus secciones extremas y cargada en los puntos C y D con las fuerzas $2P$ y P. Las relaciones entre las áreas de las secciones de los tramos de barra están indicadas en la figura. Definir la sección de la barra a partir de la tensión admisible $[\sigma] = 160$ MPa. El parámetro de carga $P = 60$ kN. Calcular la magnitud Δ_C, desplazamiento vertical del punto C, y el alargamiento Δl_{CD} del escalón medio de la barra, si $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

1.41*. Una columna corta de madera de sección 25 × 25 cm, reforzada con cuatro angulares de acero 40 × 40 × 4 mm, se comprime por una fuerza P que se transmite por medio de una placa absolutamente rígida. Calcular qué parte de la fuerza soportan los angulares y determinar la magnitud admisible de la fuerza P, si para el acero $E_{ac} = 2 \cdot 10^5$ MPa, $[\sigma]_{ac} = 160$ MPa y para la madera $E_{mad} = 1 \cdot 10^4$ MPa, $[\sigma]_{mad} = 12$ MPa. Determinar en cuánto hace falta acortar los angulares, creando un espacio entre éstos y la placa, para asegurar la equirresistencia de la estructura. Hallar, para este caso, la magnitud admisible de la fuerza de compresión.

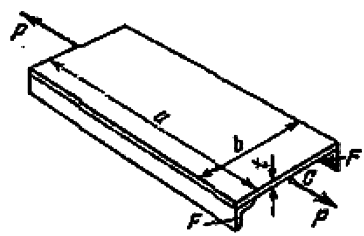


Para el problema 1.40



Para el problema 1.41

1.42*. Un panel formado por una lámina de duraluminio de espesor $t = 0{,}2$ cm reforzada por los bordes longitudinales con angulares de acero (trancaniles) se estira por unas fuerzas cuya resultante P pasa por el centro de la sección C. Calcular cómo se distribuye la carga entre los trancaniles y la lámina, si el área de la sección de cada angular $F_{ang} = 2$ cm², las dimensiones de la lámina son: $a = 40$ cm, $b = 20$ cm; el módulo de elasticidad del acero es $E_{ac} = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa y el del duraluminio, $E_{dur} = 7 \cdot 10^4$ MPa.



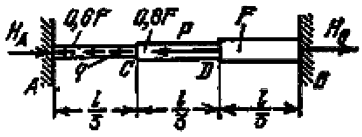
Para el problema 1.42

Determinar el valor admisible de la carga $[P]$ cuando el coeficiente de seguridad es igual a $n = 3$, basándose en las magnitudes de la carga unitaria de rotura del acero $\sigma_{r,ac} = 900$ MPa y del duraluminio $\sigma_{r,dur} = 400$ MPa.

1.43. Una barra escalonada, con sus extremos perfectamente empotrados, está cargada en el punto D con una fuerza concentrada $P = 50$ kN. El tramo AC está sometido a la acción de una carga axial uniformemente distribuida de intensidad $q = 100$ kN/m. Calcular las reacciones en los empotramientos H_A y H_B, construir los diagramas de las fuerzas longitudinales N, de las tensiones normales σ y de los desplazamientos longitudinales w de las secciones de la barra. Determinar el desplazamiento máximo $w_{máx}$ y la tensión máxima $\sigma_{máx}$, si $l = 1{,}2$ m, $F = 2$ cm², $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{prop} = 400$ MPa.

1.44. Para una barra escalonada, empotrada rígidamente por ambos extremos, determinar las reacciones en los empotramientos, construir los diagramas de las fuerzas longitudinales N, de las

tensiones normales σ y de los desplazamientos longitudinales w. Determinar la sección más peligrosa y calcular el área de la sección a partir de la condición de resistencia, teniendo en cuenta las tensiones admisibles de tracción $[\sigma]_{tr} = 160$ MPa y de compresión

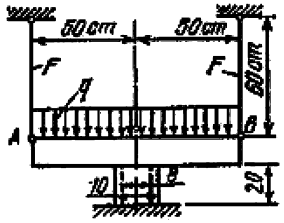


Para el problema 1.43

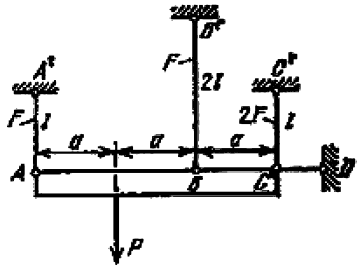
Para el problema 1.44

$[\sigma]_{comp} = 60$ MPa. Considerar $P = 400$ kN, $q = 200$ kN/m, $a = 0{,}5$ m.

1.45*. Una barra absolutamente rígida AB cargada con fuerzas repartidas uniformemente de intensidad q, está suspendida de dos tirantes de acero iguales y paralelos de sección $F = 10$ cm^2 y apoyada en la parte media sobre un cilindro hueco de cobre de 100 × 80 mm. Determinar la magnitud admisible de la intensidad de la carga repartida a partir de las tensiones admisibles en el acero $[\sigma]_{ac} = 160$ MPa, en el cobre $[\sigma]_{cob} = 40$ MPa. El módulo de elasticidad del acero es $E_{ac} = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa; el del cobre, $E_{cob} = 1{,}4 \cdot 10^5$ MPa.



Para el problema 1.45



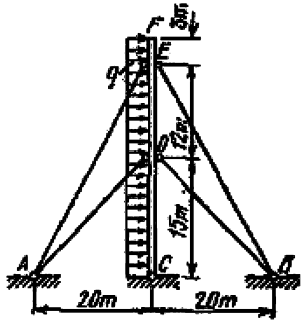
Para el problema 1.46

1.46*. Una barra absolutamente rígida se sostiene por tres tirantes paralelos con áreas de secciones iguales $F = 10$ cm^2. Calcular los esfuerzos en los tirantes y hallar el valor admisible de la carga a partir de la tensión admisible $[\sigma] = 160$ MPa. Determinar a qué distancia x del extremo izquierdo de la barra hay que aplicar una fuerza P para que la barra cargada efectúe un movimiento de traslación. ¿Cuál será la magnitud admisible de la carga en este caso?

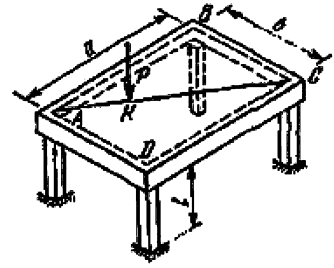
1.47. Un mástil absolutamente rígido CDE está atirantado con cables y articulado en el punto C del cimiento. El mástil recibe una carga de viento de intensidad $q = 0{,}5$ kN/m repartida uniformemente a lo largo de éste. Los cables son de secciones iguales, el material de los cables es acero con un módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. Determinar la sección de los cables a partir de una tensión admisible $[\sigma] = 100$ MPa y calcular el desplazamiento hori-

zontal Δ_F del extremo superior del mástil sometido a la acción de las cargas. El cable experimenta solamente tracción. La tensión inicial de los cables se desprecia.

1.48. Una placa absolutamente rígida de sección rectangular está apoyada con sus ángulos sobre columnas cortas de longitudes y



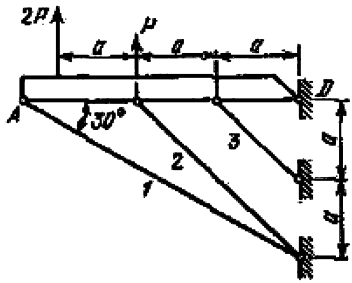
Para el problema 1.47



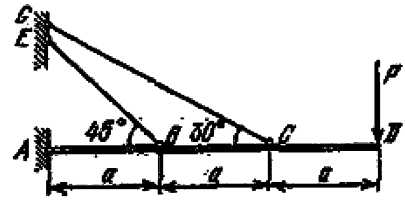
Para el problema 1.48

secciones iguales. Sobre la placa gravita una fuerza concentrada P = = 100 kN aplicada en el punto K que divide la diagonal AC en razón de 1:2. Calcular la sección de las barras a partir de la tensión admisible $[\sigma] = 50$ MPa y determinar el asiento máximo del ángulo de la placa. Viene dado: $a = 4{,}5$ m, $b = 3$ m, $l = 1$ m, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. Repita el cálculo teniendo en cuenta el peso propio de la placa $G = 50$ kN.

1.49*. Una barra absolutamente rígida AD está articulada en el punto D de una pared también absolutamente rígida y sostenida por tres tornapuntas 1, 2, 3. Calcular los esfuerzos en los tornapuntas y



Para el problema 1.49



Para el problema 1.50

la magnitud del parámetro de la carga P a partir de la tensión admisible $[\sigma] = 160$ MPa, si las secciones de todos los tornapuntas tienen igual área $F = 2$ cm^2.

1.50. Una barra absolutamente rígida, representada en la figura con líneas dobles, está articulada en un cuerpo absolutamente rígido mediante barras de acero. Calcular los esfuerzos en las barras, así

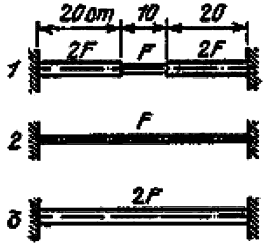
como el área de la sección F de éstas, si la tensión admisible de tracción es $[\sigma]_{tr} = 160$ MPa y la de compresión $[\sigma]_{comp} = 50$ MPa. La magnitud del parámetro de la carga es $P = 100$ kN.

§ 5. Esfuerzos de montaje y de origen térmico

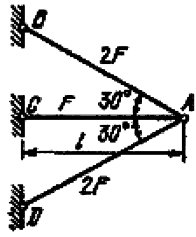
1.51. Determinar los esfuerzos de origen térmico que surgen en los carriles de tranvía soldados en tramos largos ininterrumpidos a una temperatura de 290 K, si durante el año ésta varía desde 240 K hasta 310 K. El coeficiente de dilatación lineal del acero es $\alpha = 1{,}25 \times 10^{-5}$ 1/K, el módulo de elasticidad, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. ¿A qué temperatura deben ser soldados los carriles para que las tensiones máximas de tracción y de compresión sean iguales independientemente de las variaciones estacionales de la temperatura?

1.52*. Tres barras de acero de diferentes secciones están empotradas en muros absolutamente indeformables. Calcular las tensiones en las barras durante una elevación de la temperatura de 30 K. Determinar, para cada barra, las reacciones de las paredes, si $\alpha = 1{,}25 \cdot 10^{-5}$ 1/K, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $F = 2$ cm^2.

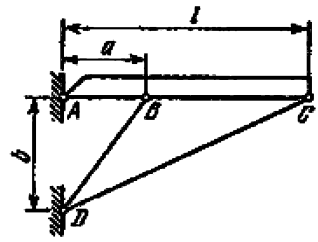
1.53*. Un nudo simétrico compuesto por tres barras fue montado a la temperatura $T_0 = 290$ K. Determinar las tensiones en sus



Para el problema 1.52



Para el problema 1.53



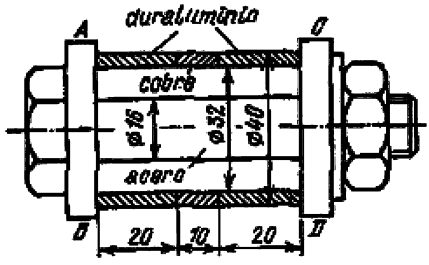
Para el problema 1.54

barras a causa del calentamiento hasta 370 K. Hallar el desplazamiento del punto A. Las barras son de acero $\alpha = 1{,}25 \times 10^{-5}$ 1/K, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. Las variaciones del módulo de elasticidad durante el calentamiento se desprecian; $l = 2$ m.

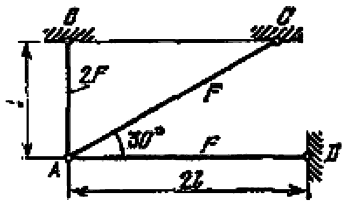
1.54*. Una viga maciza de duraluminio, $l = 3$ m, se sostiene por dos tornapuntas de acero, cuyas áreas de las secciones son $F_{BD} = 5$ cm^2 y $F_{CD} = 10$ cm^2. Las distancias hasta los puntos de fijación del tornapuntas BD son $a = 1$ m, $b = 1$ m. Calcular los esfuerzos y las tensiones en los tornapuntas durante un calentamiento de toda la estructura en $\Delta T = 30$ K. Se desprecia la deformación elástica de la viga, pero hay que tener en cuenta su alargamiento de origen térmico. Considerar para el acero $\alpha_{ac} = 1{,}25 \cdot 10^{-5}$ 1/K, $E_{ac} = 2 \cdot 10^5$ MPa, para el duraluminio $\alpha_{dur} = 2{,}25 \cdot 10^{-5}$ 1/K.

1.55*. Dos casquillos de duraluminio de altura igual a 20 mm cada uno están apretados por medio de un perno de acero. Entre los

casquillos hay una junta de cobre de grosor igual a 10 mm. A una temperatura de 300 K la tensión del perno es $N_0 = 20$ kN. Calcular el esfuerzo longitudinal total N y la tensión en el perno y en los casquillos después de calentar la construcción hasta 320 K. Viene dado: $E_{ac} = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, $\alpha_{ac} = 1{,}25 \cdot 10^{-5}$ 1/K, $E_{cob} = 1{,}1 \times 10^5$ MPa, $\alpha_{cob} = 1{,}65 \cdot 10^{-5}$ 1/K, $E_{dur} = 7 \cdot 10^4$ MPa, $\alpha_{dur} = 2{,}25 \cdot 10^{-5}$ 1/K. Las deformaciones de los casquillos AB y CD se desprecian.



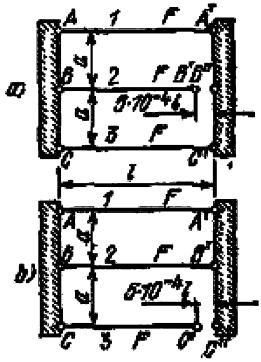
Para el problema 1.55



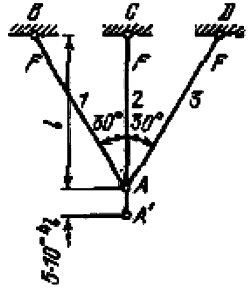
Para el problema 1.56

1.56. La construcción, cuyo esquema está representado en la figura, fue montada a una temperatura de 290 K sin tensiones iniciales. Las barras son de acero; $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, $\alpha = 1{,}25 \cdot 10^{-5}$ 1/K. Determinar las tensiones que surgirán en las barras después de calentar la construcción hasta una temperatura de 340 K.

1.57. Dos bloques absolutamente rígidos deben ser unidos entre sí con tres barras elásticas paralelas. Una barra resultó más corta



Para el problema 1.57



Para el problema 1.58

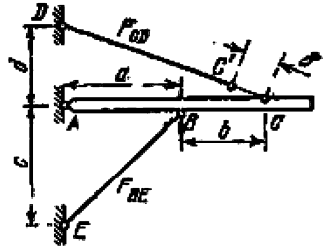
que las otras en $5 \cdot 10^{-4}\,l$. Calcular las tensiones que aparecerán después de realizar el montaje en dos casos:

a) la barra corta se monta en el medio;

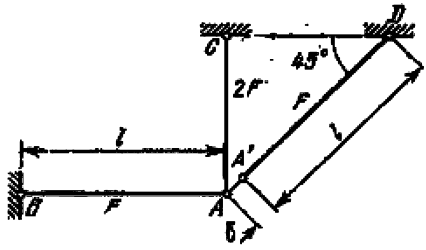
b) la barra corta se monta en un lado. En el segundo caso hallar el ángulo de giro de un bloque respecto al otro. El módulo de elasticidad del material de las barras es $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

1.58*. Durante el montaje de un nudo de tres barras resultó que la barra media era más larga en $5 \cdot 10^{-4}\ l$. Calcular las tensiones en las barras después de realizar el montaje del nudo, considerando $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

1.59*. Una viga absolutamente rígida se sostiene por un tensor y un tornapuntas, ambos de acero, cuyas secciones tienen unas áreas iguales a $F_{BE} = 2$ cm^2, $F_{CD} = 4$ cm^2. El tensor es más corto que su dimensión nominal en $\delta = 0{,}1\%$. Calcular las tensiones en el tornapuntas y en el tensor después de realizar el montaje, considerando $a = b = c = d = 1$ m, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.



Para el problema 1.59



Para el problema 1.60

1.60. Calcular las tensiones que surgen en las barras durante el montaje del nudo a causa de que la barra AD es más corta que su longitud nominal en $\delta = 0{,}001\ l$. El material de las barras es acero, cuyo módulo de elasticidad es $2{,}1 \cdot 10^5$ MPa.

§ 6. Consideración del peso propio y de las fuerzas centrífugas

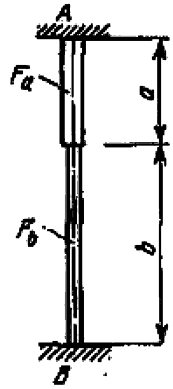
1.61*. Calcular la magnitud de la tensión normal máxima y el alargamiento total de una barra de sección constante fijada por su extremo superior y estirada por la acción de su peso. Construir los diagramas de las fuerzas longitudinales N, de las tensiones normales σ y de los desplazamientos longitudinales w para una barra de acero de longitud $l = 10$ m. La densidad del acero es $\rho = 7{,}85 \cdot 10^3$ kg/m^3; el módulo de elasticidad, $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa. Determinar la longitud máxima $l_{máx}$ de la barra, admisible a partir de la condición de resistencia, si la tensión admisible es $[\sigma] = 160$ MPa.

1.62. Una columna cilíndrica de longitud $l = 4$ m está comprimida por una fuerza $P = 50$ kN. Determinar el área necesaria de la sección F de la columna teniendo en cuenta su peso propio y tomando en consideración la tensión admisible $[\sigma] = 2$ MPa; la densidad del material es $\rho = 2 \cdot 10^3$ kg/m^3. Hallar el acortamiento de la columna cuando $E = 2 \cdot 10^4$ MPa.

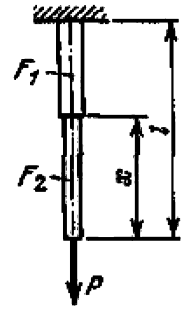
1.63. Una varilla escalonada de una bomba de minas se compone de cuatro partes de diferentes diámetros, pero de longitud igual $l = 7{,}5$ m. Una carga $P = 8$ kN está aplicada al extremo inferior

de la varilla. La densidad del material de la varilla es $\rho = 7{,}7 \times \times 10^3$ kg/m^3. Los diámetros de los escalones han sido determinados a partir de la condición de resistencia con una tensión admisible $[\sigma] = 70$ MPa. Determinar la ganancia en peso que se obtiene utilizando la varilla escalonada en comparación con una de resistencia igual, pero de diámetro constante.

1.64*. Una barra escalonada empotrada por ambos extremos se deforma bajo la acción de su peso propio. Calcular las reacciones en



Para el problema 1.64



Para el problema 1.67

los extremos V_A y V_B de la barra considerando que sus dos partes, de las secciones F_a y F_b, están fabricadas de un mismo material de densidad ρ y módulo de elasticidad E.

1.65. La paleta de un compresor centrífugo, articulada por uno de sus extremos, es de sección constante en toda su longitud y gira con una velocidad angular constante $\omega = 1000$ 1/s respecto al punto de fijación. Construir los diagramas de las tensiones normales σ y de los desplazamientos longitudinales w de las secciones a lo largo de la paleta. La longitud de la paleta es $l = 15$ cm, el módulo de elasticidad del material es $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. Calcular la longitud límite de la paleta tomando en consideración la tensión admisible del material $[\sigma] = 200$ MPa. La densidad del material es $\rho = = 7{,}85 \cdot 10^3$ kg/m^3.

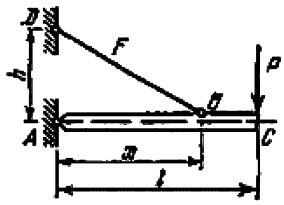
1.66. La aleta enllantada de una turbina gira con una velocidad angular constante $\omega = 1500$ 1/s. La masa del bandaje fijado en el extremo libre de la aleta es igual a 20 g. La sección de la aleta es constante en toda su longitud $l = 10$ cm. Se considera que la masa del bandaje está concentrada en el extremo de la aleta a la distancia l del eje de rotación. Determinar el área de la sección de la aleta a partir de una tensión admisible $[\sigma] = 160$ MPa, si la densidad del material es $\rho = 7{,}85 \cdot 10^3$ kg/m^3.

1.67*. Una barra escalonada prismática con su extremo superior empotrado se estira por su peso propio y por la fuerza P aplicada en el extremo inferior. Las tensiones en las secciones superiores de

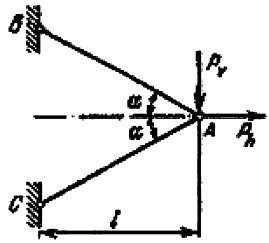
cada escalón son iguales a la tensión admisible $[\sigma]$. Determinar la longitud x del escalón inferior de la barra de modo que el peso de ésta sea el mínimo. La densidad del material de la barra es igual a ρ.

1.68. La viga AC articulada en un muro absolutamente rígido es sostenida por un tirante BD. Determinar la posición del punto B de unión del tirante con la viga partiendo de la condición de que el peso del tirante sea el mínimo, si $l = 6$ m, $h = 3$ m, $P = 40$ kN, la densidad del acero es $\rho = 7{,}85 \cdot 10^3$ kg/m^3, la tensión admisible $[\sigma] = 160$ MPa, el peso de un metro de viga es $p = 1$ kN.

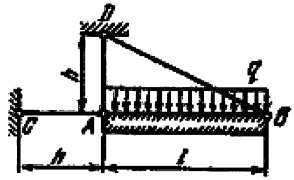
1.69. Calcular el peso teórico (sin tener en cuenta el peso de los elementos de unión) de un nudo de dos barras dispuestas simétricamente, considerando que las barras están fabricadas de un material



Para el problema 1.68



Para el problema 1.69



Para el problema 1.70

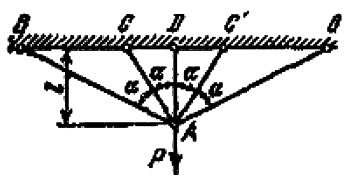
igual, cuya tensión admisible de tracción es dos veces más grande que su tensión admisible de compresión: $[\sigma]_{tr} = 2\,[\sigma]_{comp}$. Examinar dos casos: a) en el nudo está aplicada sólo una fuerza horizontal P_h y b) en el nudo está aplicada sólo una fuerza vertical P_v. ¿Para qué valor del ángulo α el peso será mínimo? Calcularlo, considerando que la densidad ρ del material es conocida.

1.70. Una barra absolutamente rígida AB está cargada con una carga uniformemente repartida $q = 5$ kN/m que incluye también el peso propio de la barra. Determinar la longitud h de las barras AC y AD de manera que el peso total de las tres barras de fijación sea el mínimo. Las barras son de acero, $\rho = 7{,}85 \cdot 10^3$ kg/m^3, la tensión admisible de tracción $[\sigma]_{tr} = 160$ MPa, la de compresión $[\sigma]_{comp} = 80$ MPa. Las áreas de las secciones de las barras se eligen a partir de la condición de resistencias iguales. Calcular el peso mínimo de todas las barras de fijación, considerando $l = 4$ m.

§ 7. Cálculo según el estado límite

1.71*. Calcular la magnitud límite de una fuerza P_{lim} aplicada en un nudo de tres barras; durante la acción de esta fuerza las tensiones en las tres barras alcanzan el límite de fluencia $\sigma_{fl} = 260$ MPa. Tomar los datos necesarios del problema 1.31. Determinar en cuánto

aumentará la carga admisible, si el coeficiente de seguridad es $n_{t1} = 2$, en comparación con la obtenida en el problema 1.31 ($P = 60$ kN) como resultado del cálculo por el método de tensiones admisibles. Construir el diagrama del desplazamiento vertical del nudo A en función de la carga P. El módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, la longitud de las barras laterales es $l_{AB} = l_{AD} = 1$ m.

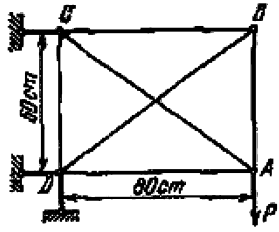


Para el problema 1.72

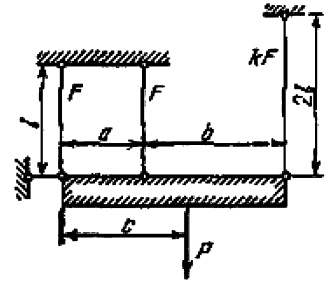
1.72. Hallar la magnitud de la carga límite P_{lim} aplicada en un nudo simétrico de cinco barras. Las áreas de las secciones de todas las barras son iguales $F = 2$ cm^2. Construir el gráfico de los desplazamientos del nudo A en función de la carga P. Viene dado: $l = 1$ m, $\alpha = 30°$, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{t1} = 400$ MPa.

1.73*. Calcular la magnitud de la carga límite para una armadura cargada en el punto A con una fuerza vertical P. Determinar como variará la magnitud de la carga límite, si la fuerza se traslada a lo largo de su línea de acción al punto B. Las secciones de las barras son iguales, $F = 5$ cm^2; los límites de fluencia en tracción y en compresión son iguales, $\sigma_{t1} = 300$ MPa. Considerar que las barras comprimidas no pierden su estabilidad.

1.74. Determinar la magnitud límite de la fuerza P que puede ser aplicada a una barra absolutamente rígida suspendida de tres



Para el problema 1.73



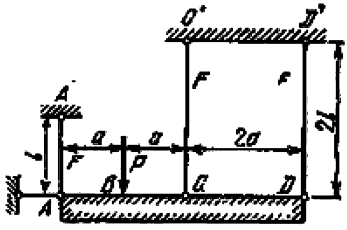
Para el problema 1.74

tirantes de acero paralelos. Calcular la magnitud del desplazamiento del punto de aplicación de la carga límite. Viene dado: $l = 0{,}5$ m, $a = 0{,}3$ m, $F = 2$ cm^2, $k = 2$, $b = 0{,}6$ m, $c = 0{,}3$ m, $\sigma_{t1} = 240$ MPa, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

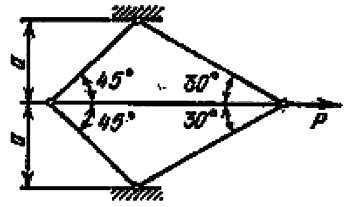
1.75*. Calcular la magnitud límite de la fuerza P que puede ser aplicada a una barra absolutamente rígida AD. Determinar el coeficiente de seguridad que proporciona el trabajo elástico de todas las barras de fijación. El material de las barras es acero de $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{t1} = 350$ MPa, el límite de elasticidad $\sigma_{elas} = 300$ MPa. El área de la sección de la barra es $F = 5$ cm^2.

1.76. Hallar la magnitud mínima del coeficiente de seguridad que durante el cálculo de una armadura según el estado límite garantice el trabajo de sus elementos en la zona elástica. Las secciones

de todos los elementos de la armadura son iguales, $F = 4$ cm^2; el límite de fluencia $\sigma_{fl} = 400$ MPa, el límite de elasticidad $\sigma_{elas} = 360$ MPa.



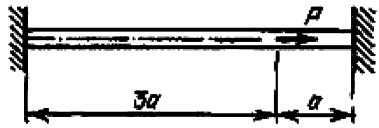
Para el problema 1.75



Para el problema 1.76

1.77. Comparar las magnitudes de las cargas límite para dos barras iguales: una está empotrada por el extremo superior y la otra, por los dos extremos. Ambas barras están cargadas con una fuerza vertical aplicada en la parte media de su longitud. Los límites de fluencia del material de las barras a tracción y a compresión son iguales.

1.78*. Determinar en cuánto variará la capacidad portante de una barra, si su temperatura aumenta en 50 K. El área de la sección de la barra es $F = 10$ cm^2; el material, acero de $E = 2 \cdot 10^5$ MPa,



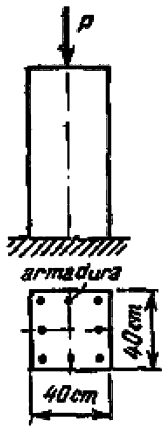
Para el problema 1.78

$\sigma_{fl} = 350$ MPa, el coeficiente de dilatación lineal es $\alpha = 1\,25 \times \times 10^{-5}$ 1/K. Considerar que el calentamiento no influye en las características mecánicas del material.

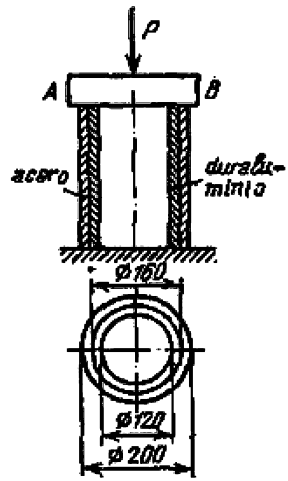
1.79*. Comparar las magnitudes de la fuerza admisible P aplicada a una columna de hormigón armado haciendo los cálculos según las tensiones admisibles y luego según el estado límite. Considerar que en ambos casos el coeficiente de seguridad es $n_{fl} = 3$. La armadura de acero ocupa el 2% del área total de la sección de la columna. Viene dado: para el acero $E_{ac} = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{fl.ac} = 400$ MPa; para el hormigón armado $E_{hor} = 2 \cdot 10^4$ MPa, $\sigma_{fl.hor} = 25$ MPa.

1.80. Un cilindro corto compuesto está cargado con una fuerza comprimente P la cual se transmite a través de una placa AB absolutamente rígida. El cilindro interior está fabricado de duraluminio, el exterior, de acero. Admitir que cada material, después de alcanzar el límite de fluencia, no ejerce resistencia adicional a la deformación

sucesiva. Determinar la carga admisible sobre el cilindro por dos métodos: el de tensiones admisibles y el de estado límite, teniendo en cuenta que los coeficientes de seguridad son iguales: $n = 2$. Com-



Para el problema 1.79

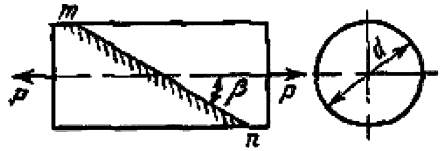


Para el problema 1.80

parar las magnitudes de las cargas obtenidas. Viene dado: para el acero $E_{ac} = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{fl,ac} = 240$ MPa; para el duraluminio $E_{dur} = 7 \cdot 10^4$ MPa, $\sigma_{fl,dur} = 190$ MPa.

§ 8. Estados de tensión volumétrico, plano y lineal

1.81. Una barra cilíndrica de diámetro $d = 16$ mm se estira por dos fuerzas $P = 20$ kN. Calcular las tensiones normales y tangenciales en el plano mn que forma un ángulo $\beta = 30°$ respecto al



Para el problema 1.81

eje de la barra. Indicar sobre qué planos actúan las tensiones tangenciales, normales máximas y calcular sus valores.

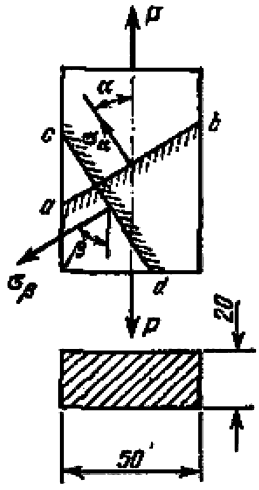
1.82*. Determinar la magnitud de la fuerza P que estira una muestra de sección rectangular de 50×20 mm, si se conocen las magnitudes de las tensiones normales $\sigma_\alpha = 20$ MPa y $\sigma_\beta = 60$ MPa en los planos recíprocamente perpendiculares ab y cd.

1.83. Hallar el ángulo φ que ha de formar el extensímetro *1* con el eje de una barra en tracción a la que debe ser pegado para que sus indicaciones sean dos veces menores que las del extensímetro *2*

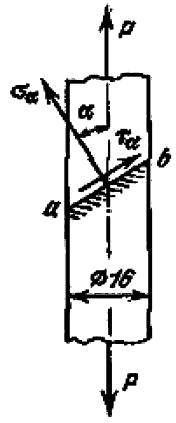
fijado en dirección del eje de ésta. El coeficiente de deformación transversal del material es $\mu = 0{,}25$.

1.84. Durante la compresión de una barra corta surgen las tensiones $\sigma_\alpha = -100$ MPa y $\tau_\beta = 40$ MPa ($\beta = \alpha + 90°$). Determinar el ángulo α entre la normal al primer plano y el eje de la barra, así como las tensiones tangencial y normal máximas en la barra.

1.85. Una barra de sección redonda está estirada por una fuerza $P = 120$ kN. Calcular el diámetro de la barra de tal modo que su tensión tangencial máxima no sea mayor de 60 MPa. Determinar las tensiones normales en el plano con tensiones tangenciales máximas.



Para el problema 1.82

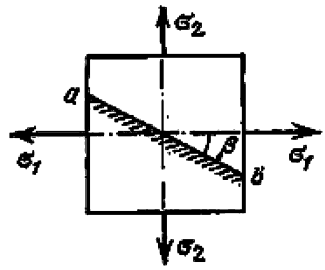


Para el problema 1.86

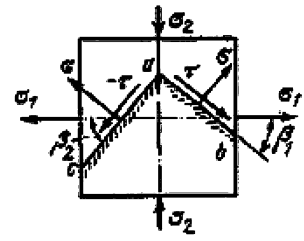
1.86*. El diámetro de un tirante de sección redonda es igual a 16 mm. La fuerza de tracción $P = 40$ kN origina en la sección inclinada ab tensiones tangenciales τ_α, equivalentes al 60% de las tensiones normales en la misma sección ab. Determinar el ángulo de inclinación de la sección y los valores de σ_α y τ_α.

1.87*. En los bordes de una lámina cuadrada están aplicadas las tensiones normales $\sigma_1 = 150$ MPa y $\sigma_2 = 50$ MPa. Por el método analítico, calcular las tensiones en la sección ab que forma un ángulo $\beta = 80°$ respecto a la dirección de las tensiones σ_1 y comprobarlo con ayuda del método gráfico. ¿Qué tensiones actúan en la sección perpendicular a ésta?

1.88*. En las caras de un elemento rectangular actúan las tensiones normales $\sigma_1 = 160$ MPa y $\sigma_2 = -80$ MPa. Se sabe que en dos secciones inclinadas ab y ca del elemento las tensiones normales son idénticas e iguales a 40 MPa. ¿Qué ángulo forman con la dirección de σ_1 estas secciones? ¿Qué valor tienen las tensiones tangenciales en estas secciones?

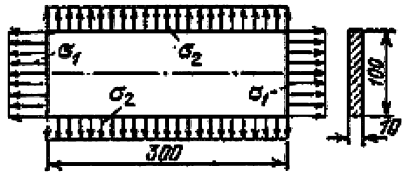


Para el problema 1.87



Para el problema 1.88

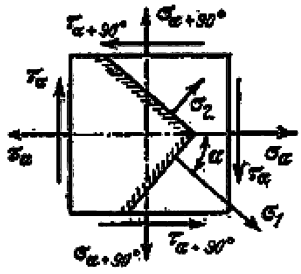
1.89. En una banda de acero rectangular de dimensiones 300 × × 100 × 10 mm actúan las tensiones normales $\sigma_1 = 120$ MPa y $\sigma_2 = 60$ MPa. Calcular la variación de las dimensiones originada por la deformación elástica de la banda. Considerar que $E = 2 \times \times 10^5$ MPa y $\mu = 0{,}25$. Determinar la deformación volumétrica relativa ε_v.



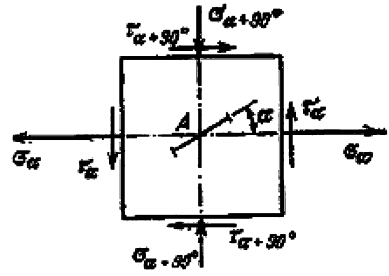
Para el problema 1.89

1.90. Una lámina cuadrada, cuyos lados son iguales a 0,2 m, tiene un grosor $h = 10$ mm. En sus bordes está cargada con las tensiones normales $\sigma_1 = 200$ MPa y $\sigma_2 = -100$ MPa. Determinar las variaciones de los lados del cuadrado, del área de éste y del volumen de la lámina a causa de la deformación elástica de la misma. Considerar que $E = 2 \cdot 10^5$ MPa y $\mu = 0{,}25$.

1.91*. Un elemento rectangular plano tiene aplicado en sus bordes las tensiones tangenciales y normales $\sigma_\alpha = -200$ MPa, $\sigma_{\alpha+90^\circ} = 100$ MPa, $\tau_\alpha = -120$ MPa, $\tau_{\alpha+90^\circ} = -\tau_\alpha$. Determinar las magnitudes y direcciones de las tensiones principales, dibujarlas y comprobar la solución analítica por el método gráfico.



Para el problema 1.91



Para el problema 1.93

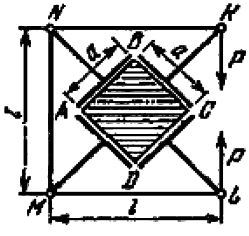
1.92. En dos secciones recíprocamente perpendiculares de un elemento rectangular actúan las tensiones normales $\sigma_\alpha = 30$ MPa y $\sigma_{\alpha+90^\circ} = -30$ MPa. Las tensiones tangenciales son $\tau_\alpha = 60$ MPa. Calcular las magnitudes y direcciones de las tensiones principales.

Determinar de qué modo variarán estas tensiones, si se cambia el signo de las tensiones tangenciales τ_α, quedando σ_α y $\sigma_{\alpha+90^\circ}$ invariables.

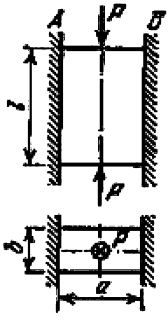
1.93*. Una lámina de acero tiene aplicado en sus bordes las tensiones $\sigma_\alpha = 100$ MPa, $\sigma_{\alpha+90^\circ} = -40$ MPa, $\tau_\alpha = -50$ MPa. Determinar a qué ángulo α respecto a la tensión σ_α hace falta instala el tensómetro A para que sus indicaciones sean mayores al cargar la lámina. Hallar el alargamiento relativo mayor ε_1 cuando $E = 2 \cdot 10^5$ MPa y $\mu = 0{,}25$, y el incremento de las indicaciones del tensómetro de base $s = 10$ mm y de aumento $k = 1000$, correspondiente a este alargamiento.

1.94. Una lámina de acero fina rectangular está cargada por sus bordes con las tensiones tangenciales y normales $\sigma_\alpha = -60$ MPa, $\sigma_{\alpha+90^\circ} = 20$ MPa, $\tau_\alpha = 30$ MPa. Hallar la dirección por la cual no se produce alargamiento. Considerar $E = 2 \cdot 10^5$ MPa y $\mu = 0{,}25$.

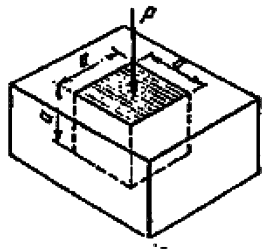
1.95*. Calcular la disminución elástica relativa del volumen ε_v de un cubo de concreto $ABCD$ comprimido, con ayuda de un mecanismo de charnela, por esfuerzos distribuidos uniformemente en las



Para el problema 1.95



Para el problema 1.96



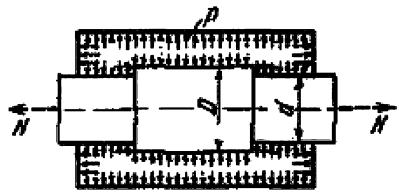
Para el problema 1.97

cuatro caras laterales. La longitud de la arista del cubo es $a = 0{,}1$ m. El módulo de elasticidad del material $E = 2 \cdot 10^4$ MPa, $\mu = 0{,}17$, el límite de proporcionalidad $\sigma_{prop} = 10$ MPa. Las fuerzas aplicadas en los puntos K y L del mecanismo son iguales a $P = 50$ kN.

1.96. Entre las planchas fijas paralelas A y B está fuertemente apresada una barra de acero con forma de paralelepípedo cuyos lados son $a = 4$ cm, $b = 2$ cm, $l = 6$ cm. Calcular el coeficiente de deformación transversal del material de la barra, si se sabe que durante la compresión con unas fuerzas $P = 100$ kN la presión de la barra sobre las planchas es $p = 40$ MPa. Hallar el coeficiente de deformación volumétrica relativa ε_v y el acortamiento elástico de la barra Δl despreciando las fuerzas de rozamiento de ésta sobre las planchas. Considerar $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

1.97. Un cubo de cobre de arista igual a $a = 0{,}1$ m está introducido sin holguras en el asiento de una placa de acero cuya docili-

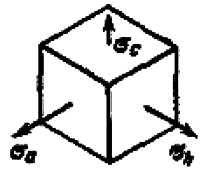
dad puede despreciarse. Calcular las variaciones de volumen del cubo relativa ε_v y absoluta ΔV originadas por la acción de una fuerza de compresión $P = 500$ kN. El módulo de elasticidad del cobre es $E = 1 \cdot 10^5$ MPa; el coeficiente de deformación transversal, $\mu = 0{,}34$. Determinar las tensiones tangenciales octaédricas τ_{oct} y máximas $\tau_{máx}$ en el cubo.



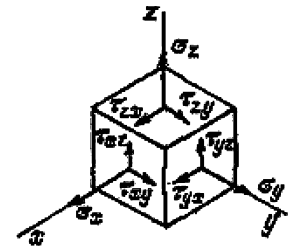
Para el problema 1.98

1.98. Una varilla cilíndrica escalonada $D = 18$ mm, $d = 16$ mm está sometida a la presión $p = 1000$ MPa. Calcular las tensiones tangenciales máximas $\tau_{máx}$ y las octaédricas, normales σ_{oct} y tangenciales τ_{oct}, en puntos situados cerca de la superficie de la parte gruesa de la varilla. Determinar cómo variarán estas tensiones, si se aplican adicionalmente en los extremos de la varilla las fuerzas de tracción $N = 100$ kN representadas en la figura mediante flechas de trazos.

1.99*. Un cubo de aluminio está sometido a la acción de tensiones normales $\sigma_a = -40$ MPa, $\sigma_b = 100$ MPa, $\sigma_c = 60$ MPa aplicadas a sus aristas. Calcular: a) la tensión tangencial máxima $\tau_{máx}$, b) la tensión normal octaédrica σ_{oct}, c) la tensión tangencial octaédrica τ_{oct},



Para el problema 1.99



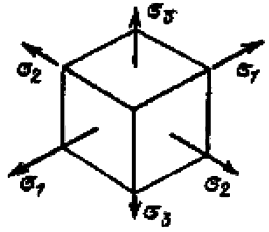
Para el problema 1.100

d) la deformación volumétrica relativa ε_v, e) la energía potencial específica total u_0 de la deformación elástica del cubo y f) la energía específica de la variación de la forma u_f. Considerar $E = 7 \cdot 10^4$ MPa y $\mu = 0{,}35$.

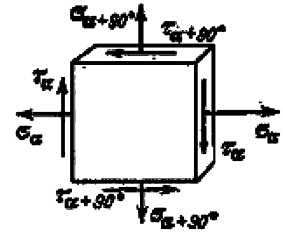
1.100. Un cubo de acero está sometido a la acción de tensiones tangenciales y normales en sus aristas. Viene dado: $\sigma_x = 120$ MPa, $\sigma_y = 80$ MPa, $\sigma_z = 100$ MPa, $\tau_{xy} = -\tau_{yx} = 40$ MPa, $\tau_{yz} = -\tau_{zy} = 0$, $\tau_{xz} = -\tau_{zx} = 0$. Calcular: a) las magnitudes y direcciones de las tensiones principales σ_1, σ_2, σ_3, b) la tensión tangencial máxima $\tau_{máx}$, c) las tensiones normales σ_{oct} y tangenciales τ_{oct} octaédricas, d) la deformación volumétrica relativa ε_v, e) la energía potencial relativa total de la deformación elástica y f) la energía relativa de la variación de la forma u_f. Considerar $E = 2 \cdot 10^5$ MPa y $\mu = 0{,}25$

§ 9. Teorías (criterios) de la resistencia

1.101*. El material de una pieza se encuentra en el punto de peligro en el estado tensional volumétrico. Calcular las tensiones de cálculo (equivalentes) $\sigma_{e,II}$, $\sigma_{e,III}$, $\sigma_{e,IV}$ y comprobar la resistencia mediante las teorías de resistencia II, III y IV considerando la tensión admisible a la tracción $[\sigma]_{tr} = 120$ MPa y $\mu = 0{,}35$. Comprobar la resistencia de acuerdo con la quinta teoría (de Mohr), si la tensión admisible de compresión $[\sigma]_{comp} = 300$ MPa. Las tensiones principales son: $\sigma_1 = 90$ MPa, $\sigma_2 = 70$ MPa, $\sigma_3 = -30$ MPa.



Para el problema 1.101

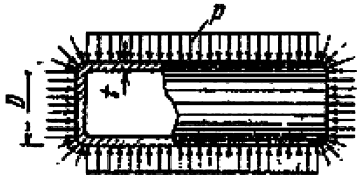


Para el problema 1.102

1.102. Hallar las tensiones de cálculo, mediante las teorías de resistencia II, III, IV, en un elemento que se encuentra en estado tensional plano. El material es acero: $\mu = 0{,}25$, $[\sigma]_{tr} = 160$ MPa. Comprobar la resistencia del elemento mediante la quinta teoría (de Mohr), si $[\sigma]_{ac} = 320$ MPa. Por las caras del elemento actúan las tensiones: $\sigma_\alpha = 60$ MPa, $\sigma_{\alpha+90^\circ} = -80$ MPa, $\tau_\alpha = -40$ MPa.

1.103. El espesor de la pared de un tanque cilíndrico de diámetro $D = 0{,}8$ m es igual a $h = 4$ mm. Determinar la magnitud de la presión admisible en el tanque, basándose en la cuarta teoría de resistencia. La tensión admisible es $[\sigma] = 130$ MPa.

1.104*. El flotador de la válvula de una máquina de ensayos representa un cilindro cerrado fabricado de una aleación de aluminio. El diámetro exterior del cilindro es igual a $D = 80$ mm. El flotador está sometido a una presión multilateral $p = 30$ MPa. Calcular el espesor de la pared del flotador utilizando la cuatra teoría de resistencia. La tensión admisible es igual a $[\sigma] = 160$ MPa.



Para el problema 1.104

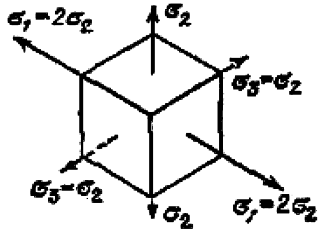
Para el problema 1.105

1.105. Un vaso cilíndrico de hierro fundido de diámetro $D = 0{,}2$ m tiene las paredes de grosor igual a $h = 20$ mm. La presión dentro del vaso es $p = 4$ MPa. El vaso está además comprimido por

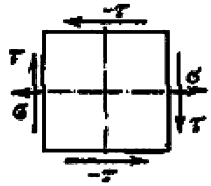
fuerzas $N = 200$ kN aplicadas en sus extremos. Comprobar la resistencia del cilindro por la quinta teoría de resistencia (de Mohr) considerando que las tensiones admisibles son: la de tracción $[\sigma]_{tr} = 20$ MPa y la de compresión $[\sigma]_{comp} = 60$ MPa.

1.106. Un elemento cuadrado tiene aplicadas tensiones de tracción σ_x iguales a las admisibles para el material dado $[\sigma] = 100$ MPa. Basándose en la tercera teoría de resistencia, determinar las tensiones tangenciales τ que deben ser aplicadas adicionalmente en los extremos del elemento para que el coeficiente de seguridad disminuya dos veces.

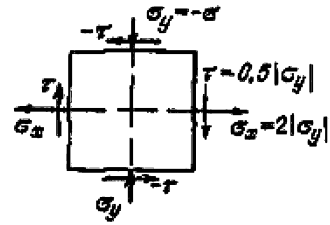
1.107. Un elemento cúbico recortado de un cuerpo por los planos principales se encuentra en estado tensional plano y está cargado



Para el problema 1.107



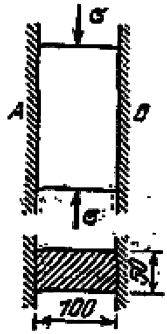
Para el problema 1.108



Para el problema 1.109

con las tensiones σ_3 y $\sigma_1 = 2\sigma_3$. Con ayuda de la segunda teoría de resistencia, calcular los valores admisibles de estas tensiones, si $[\sigma] = 120$ MPa, $\mu = 0{,}3$. Determinar cómo variará el coeficiente de seguridad n, si sobre el cubo se aplica adicionalmente la tercera tensión principal $\sigma_3 = \sigma_2$.

1.108. Un elemento cuadrado, recortado de una pieza de hierro fundido, está sometido a la acción de las tensiones $\sigma = 120$ MPa y $\tau = 80$ MPa. Comprobar su resistencia, teniendo en cuenta que el material posee tensiones admisibles de compresión y de tracción diferentes: $[\sigma]_{comp} = 320$ MPa, $[\sigma]_{tr} = 160$ MPa.



Para el problema 1.110

1.109*. Las magnitudes absolutas de las tensiones que actúan sobre los bordes de un elemento plano están en la correlación siguiente: $\sigma_x = 2\sigma_y$, $\tau = 0{,}5\sigma_y$. Calcular las magnitudes admisibles de estas tensiones mediante la quinta teoría de resistencia (de Mohr) cuando $[\sigma]_{tr} = 100$ MPa, $[\sigma]_{comp} = 250$ MPa. ¿Cuántas veces variará la magnitud de la carga admisible sobre el elemento, si éste se fabrica de un material cuyas tensiones admisibles a la tracción y a la compresión son iguales: $[\sigma] = 150$ MPa?

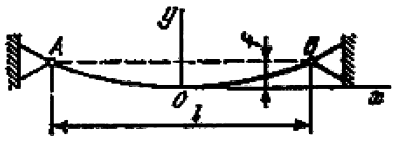
1.110. Una barra de acero rectangular de sección 100×50 mm encajada sin holgura entre dos paredes fijas paralelas A y B está

cargada en sentido vertical con tensiones de compresión σ. Con ayuda de la segunda y cuarta teorías de resistencia, calcular la magnitud admisible σ cuando la tensión admisible de compresión es igual a $[\sigma]_{comp} = 160$ MPa; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\mu = 0{,}25$.

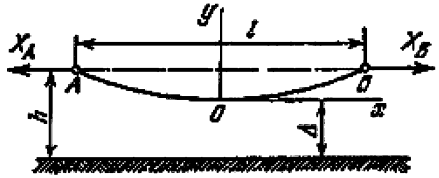
§ 10. Hilos flexibles y vasos de paredes delgadas

1.111*. Un alambre de cobre está suspendido entre los puntos A y B, la distancia entre ellos es $l = 50$ m. Determinar la tensión admisible T en el alambre, la magnitud del empuje H (tensión en el punto inferior) y la flecha máxima f. Viene dado: el diámetro de la sección del alambre $d = 4$ mm, la densidad del material $\rho = 8 \cdot 10^3$ kg/m^3, la tensión admisible $[\sigma] = 50$ MPa.

1.112*. La longitud de un alambre en estado no tensado es igual a $l = 40$ m. Determinar las tensiones y la flecha máxima del alambre,



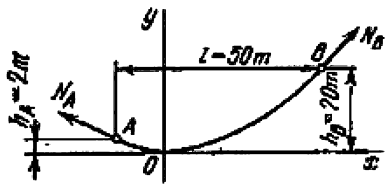
Para el problema 1.111



Para el problema 1.113

si éste se fija por sus extremos en unos puntos situados a una misma altura. El material del alambre es acero: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ kg/m^3.

1.113. Un tractor remolcador tira de un avión con una fuerza cuya componente horizontal es $X_A = 5$ kN. Los extremos del cable están fijados en los puntos A y B distantes de la superficie horizontal terrestre a $h = 0{,}5$ m. El peso de un metro de cable es igual a $p = 8$ N. Determinar la distancia Δ entre el cable y la tierra, si se sabe que la distancia $l = 10$ m. Calcular la sección del cable de acuerdo con la tensión admisible $[\sigma] = 50$ MPa.



Para el problema 1.114

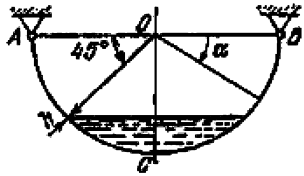
1.114*. Un cable comba según la curva AOB que puede ser aproximadamente considerada como una parábola. Calcular la tensión del cable. El peso de un metro de cable es igual a $p = 12$ N.

1.115. Un alambre de sección $F = 0{,}5$ cm^2 y peso lineal $p = 4$ N/m debe ser suspendido de dos apoyos distantes entre sí a 20 m y situados a un mismo nivel. Determinar la tensión del alambre a una temperatura de 280 K teniendo en cuenta que, durante el tendido del alambre, es posible una bajada de la temperatura hasta 230 K y la formación de una costra de hielo sobre el alambre que aumentará su peso lineal en 2 N/m. Viene dado: el módulo de elasti-

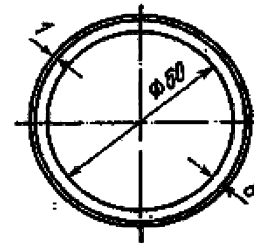
cidad $E = 1 \cdot 10^5$ MPa, $[\sigma] = 50$ MPa, el coeficiente de dilatación lineal $\alpha = 1{,}65 \cdot 10^{-5}$ 1/K.

1.116. Calcular la presión de rotura de un vaso esférico cuyo diámetro interior es igual a $d = 0{,}2$ m, el espesor de la pared es igual a $h = 3$ mm, si el límite de resistencia a la rotura del material es $\sigma_r = 1200$ MPa. Efectuar el cálculo mediante la cuarta teoría de resistencia.

1.117. Un vaso de paredes delgadas fabricado en forma de semiesfera de radio $r = 3$ m y cuya pared es de espesor $h = 3$ mm está articulado por el borde superior de toda la circunferencia. La densidad del líquido que llena parcialmente el vaso es igual a $\rho = 10^3$ kg/m^3. El nivel del líquido está representado en la figura.



Para el problema 1.117



Para el problema 1.122

Construir los diagramas de las tensiones principales en la pared del vaso sin tener en cuenta su peso propio. Mostrar cómo variarán los diagramas, si el vaso se llena hasta los bordes.

1.118. Una bóveda cilíndrica de acero de diámetro $d = 5$ m y espesor $h = 5$ mm se carga con una presión interior. En este caso el extensímetro pegado en dirección de la generatriz del cilindro da un aumento de las indicaciones de 40 divisiones. Determinar las tensiones principales en la pared del cilindro y la presión p, si el valor de una división del extensímetro es $c = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$, el módulo de elasticidad del material es $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, el coeficiente de deformación transversal es $\mu = 0{,}25$.

1.119. Un gas fluye con la presión p por un tubo de latón que tiene fuertemente ajustada una camisa de acero. Determinar la magnitud admisible de la presión a partir de la condición de resistencia. La tensión admisible en el latón es $[\sigma]_{lat} = 30$ MPa; el módulo de elasticidad, $E_{lat} = 1{,}2 \cdot 10^5$ MPa; la tensión admisible en el acero, $[\sigma]_{ac} = 150$ MPa; el módulo de elasticidad, $E_{ac} = 2 \cdot 10^5$ MPa.

1.120*. Calcular las tensiones surgidas después del ajuste de un cilindro de acero de espesor igual a 1 mm, calentado hasta una temperatura de 330 K, en un casquillo de cobre de espesor igual a 4 mm cuya temperatura es 285 K. Considerar que en el momento del ajuste la holgura entre el casquillo y el cilindro es igual a cero. El diámetro de la superficie de ajuste es igual a 100 mm. Después de realizar el ajuste la unión se enfría hasta 285 K. Calcular la presión que ejercen una sobre otra las piezas unidas, si para el cobre $\alpha_{cob} = 1{,}65 \cdot 10^{-5}$,

$E_{cob} = 1 \cdot 10^5$ MPa y para el acero $\alpha_{ac} = 1{,}25 \cdot 10^{-5}$, $E_{ac} = 2 \times$ $\times 10^5$ MPa.

1.121. La parte interior de un cilindro compuesto es de 6 mm de espesor y está hecha de latón: $\alpha_{lat} = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ 1/K, $E_{lat} = 1{,}2 \times$ $\times 10^5$ MPa. A la temperatura de 290 K sobre esta parte fue montada sin apretar una camisa de acero de 2 mm de espesor. Para el acero $\alpha_{ac} = 1{,}25 \cdot 10^{-5}$ 1/K, $E_{ac} = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa. Determinar la presión que ejerce la camisa sobre la parte interior del cilindro y las tensiones que surgen de calentarlo hasta la temperatura de 390 K. El cambio de las características del material durante el calentamiento se desprecia.

1.122*. Según las condiciones tecnológicas del montaje el diámetro interior de una camisa de acero de 1 mm de espesor es 0,05 mm menor que el diámetro exterior del casquillo de cobre de espesor igual a 8 mm. El montaje se efectúa a una temperatura de 290 K. Determinar hasta qué temperatura hace falta calentar la camisa de acero para poder montarla a presión sobre el casquillo. ¿Qué tensiones surgirán en las piezas de la unión después del montaje y enfriamiento? Viene dado: $\alpha_{ac} = 1{,}25 \cdot 10^{-5}$ 1/K, $E_{ac} = 2 \cdot 10^5$ MPa, $E_{cob} =$ $= 1{,}1 \cdot 10^5$ MPa.

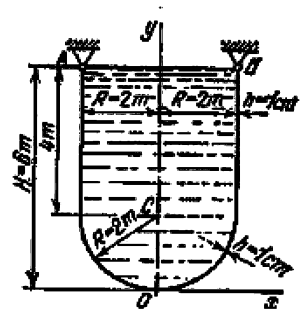
1.123. La presión del aire en el cilindro del montante de un amortiguador del tren de aterrizaje de un avión en la posición de parada es igual a $p = 20$ MPa. El diámetro interior del cilindro es $d =$ $= 100$ mm, el espesor de la pared, $h = 4$ mm. Calcular las tensiones en la pared del cilindro y determinar cómo variarán estas tensiones después del despegue, si la presión en el amortiguador disminuye dos veces.

1.124. Un cilindro de duraluminio de paredes delgadas, cuyo espesor es igual a $h_{dur} = 5$ mm, está reforzado con una camisa de acero de espesor $h_{ac} = 2$ mm montada apretadamente. El diámetro interior del cilindro es $d = 100$ mm. Hallar la presión interior límite según el límite de fluencia y determinar la presión mutua entre el cilindro y la camisa en este momento. Considerar que para el acero $E_{ac} = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{fl.ac} = 500$ MPa, para el duraluminio $E_{dur} = 7 \cdot 10^4$ MPa, $\sigma_{fl.dur} = 250$ MPa.

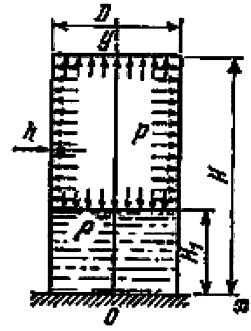
1.125*. Un vaso cilíndrico articulado por su borde superior termina por abajo en semiesfera. Construir los diagramas de las tensiones principales a lo largo del vaso considerándolo lleno de agua. El peso propio del vaso se desprecia.

1.126. Un tanque cilíndrico de altura H está lleno de un líquido de densidad ρ. La altura del líquido es H_1. Éste está sometido a la presión p. Construir los diagramas de las tensiones principales σ_1 y σ_2 en las paredes del recipiente a lo largo del cilindro. El grosor de su pared es igual a h.

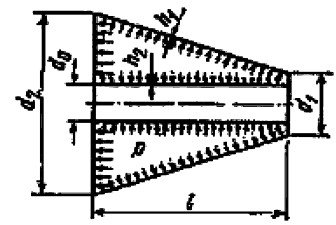
1.127. Un vaso de longitud $l = 0{,}5$ m compuesto de dos cuerpos uno cónico y otro cilíndrico de fondos rígidos se encuentra bajo una presión $p = 1$ MPa. Calcular las tensiones máximas en las paredes sin tener en cuenta la posibilidad de perder la estabilidad. Viene



Para el problema 1.125



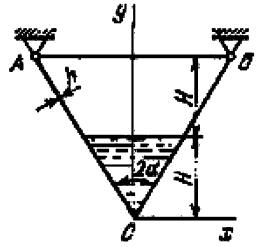
Para el problema 1.126



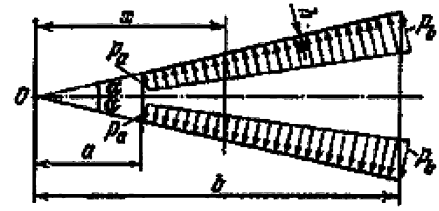
Para el problema 1.127

dado: $d_0 = 0{,}1$ m, $d_1 = 0{,}15$ m, $d_2 = 0{,}5$ m, $h_1 = 4$ mm, $h_2 = 2$ mm. La influencia de los fondos en el estado de tensión de las paredes se desprecia.

1.128. Un depósito cónico de altura $2H = 10$ m, llenado de agua hasta la mitad, está articulado por su borde. El espesor de la pared del depósito es $h = 3$ mm, el ángulo en el vértice del cono es igual a $2\alpha = 60°$. Construir los diagramas de las tensiones principales a lo



Para el problema 1.128



Para el problema 1.129

largo de la generatriz del cono y efectuar el control de la resistencia de acuerdo con la cuarta teoría de resistencia a partir de la tensión admisible $[\sigma] = 40$ MPa.

1.129*. Un tubo de paredes delgadas con forma de cono truncado está articulado por la circunferencia del extremo derecho y sometido a una presión repartida por su longitud de acuerdo con una ley lineal. Vienen dados: las ordenadas extremas del diagrama de presiones p_A y p_B, el grosor de la pared h, el ángulo central en el vértice del cono 2α y las dimensiones a y b a partir del vértice O del cono. Construir los diagramas de las tensiones principales a lo largo del tubo.

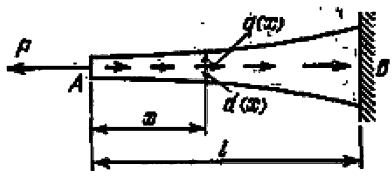
1.130. Calcular el aumento del diámetro de una bombona esférica sometida a la acción de la presión de cálculo determinada mediante la segunda teoría de resistencia, siendo la tensión admisible $[\sigma] = 100$ MPa. El diámetro interior inicial de la bombona es $d = 0{,}1$ m, el espesor de la pared es $h = 2$ mm, el módulo de elasticidad del material es $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, el coeficiente de deformación transversal, $\mu = 0{,}3$.

§ 11. Problemas que se resuelven con ayuda de ordenadores

1.131*. Una barra AB de sección arbitraria y longitud l con un extremo empotrado está sometida a la acción de la carga axial $q(x) = q \ln\left(1 + \frac{x}{l} + \operatorname{sen}\frac{x}{l}\right)$ repartida de manera irregular y de una fuerza concentrada aplicada en el extremo libre A; $P = \xi q l$.

Formular el programa para calcular en ordenador la magnitud de la fuerza longitudinal N en once secciones que dividen la longitud de la barra en diez partes iguales. La primera sección coincide con el extremo libre de la barra.

Asignar los valores de los parámetros ξ, q, l, calcular las magnitudes de las fuerzas longitudinales con una exactitud de hasta el tercer signo después de la coma y construir el diagrama N a lo largo de la barra.



Para los problemas 1.131-1.134

1.132. Una barra de sección variable y longitud l está sometida a la acción de una carga $q = \text{const}$ distribuida uniformemente y de una fuerza concentrada $P = \xi q l$ en el extremo libre A (ξ es un coeficiente arbitrario). El extremo B de la barra está rígidamente empotrado. El área de la sección en el extremo libre es igual a F_0 y varía a lo largo de la barra según la ley $F(x) = F_0\left[1 + \left(\frac{x}{l}\right)^{4/3}\right]^2$.

Formular el programa para calcular en ordenador las magnitudes de las tensiones normales σ en once secciones que corresponden a una división de la barra en diez tramos de igual longitud empezando por el extremo libre.

Asignar los valores de los parámetros q, ξ, l, F_0 y hallar las tensiones con una exactitud de hasta el tercer signo después de la coma, construir el diagrama de σ.

1.133. Calcular la magnitud del desplazamiento longitudinal w_A del extremo libre de la barra AB de sección variable cuyo diámetro varía de acuerdo con la ley $d(x) = d_0\left(1 + \left(\frac{x}{l}\right)^{1/3}\right)$, donde d_0 es el diámetro de la sección en el extremo izquierdo de la barra.

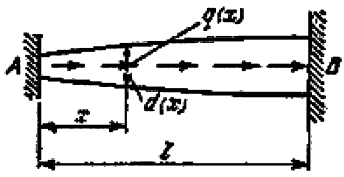
A lo largo de la barra actúa una carga axial distribuida que varía de acuerdo con la ley $q(x) = q_0\left(1 - \frac{x}{l}\right)$. Una fuerza longitudinal concentrada $P = \xi q_0 l$ está aplicada en el extremo libre.

Formular el programa para calcular w_A y hallar este desplazamiento con una exactitud de hasta el tercer signo después de la coma asignando de antemano la magnitud del módulo de elasticidad del material de la barra y los valores de los parámetros q_0, d_0, ξ, l.

1.134. Construir para una barra AB de sección variable y de longitud l, empotrada por su extremo derecho, el diagrama de despla-

zamientos longitudinales originados por una carga axial distribuida de acuerdo con la ley $q(x) = q\left(\frac{x}{l}\right)^2$ y una fuerza concentrada $P = \xi q l$ aplicada en el extremo libre. La variación del área de la sección de la barra responde a la ley $F(x) = F_0\left(1 + \sqrt{\frac{x}{l}}\right)^2$, donde F_0 es el área de la sección del extremo A.

Para el cálculo en ordenador, formular el programa de los desplazamientos de diez secciones equidistantes entre sí.



Para el problema 1.135

Asignados los valores de los parámetros de F_0, q, ξ, l y del módulo de elasticidad E del material de la barra, calcular los desplazamientos con una exactitud de hasta el tercer signo después de la coma y construir el diagrama de $w(x)$.

1.135*. Una barra rectilínea AB está rígidamente empotrada por ambos extremos y sometida a una carga axial constante distribuida $q = \text{const}$. La sección de la barra es circular de diámetro que varía de acuerdo con la ley $d(x) = d_0\left[1 + \left(\frac{x}{l}\right)^{5/7}\right]$, donde d_0 es el diámetro de la sección menor en el extremo de la barra.

Formular el programa para descifrar la hiperestaticidad de la barra y calcular las reacciones en los empotramientos.

Asignar los valores numéricos de los parámetros d_0, q, l y calcular las reacciones con una exactitud de hasta el tercer signo después de la coma.

CAPÍTULO 2

CIZALLAMIENTO Y TORSIÓN

§ 1. Cizallamiento puro

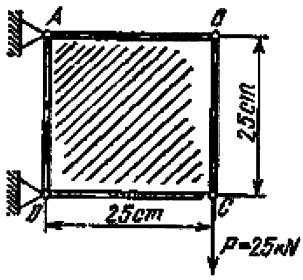
2.1. Un elemento cuadrado está cargado por sus bordes con un sistema equilibrado de tensiones tangenciales iguales a 100 MPa. Calcular las magnitudes de las variaciones del ángulo recto y de las diagonales del cuadrado como resultado de su deformación elástica. El material es duraluminio, $E = 0{,}7 \cdot 10^5$ MPa, $\mu = 0{,}3$. La longitud del lado del cuadrado es de 25 cm.

2.2*. Una lámina de acero cuadrada se estira en sentido horizontal por tensiones $\sigma_1 = 120$ MPa y se comprime en sentido perpendicular por tensiones de magnitud iguales a σ_1. Calcular la magnitud y dirección de las tensiones tangenciales máximas. Determinar la variación del ángulo formado por las diagonales del cuadrado, considerando $E = 2 \cdot 10^5$ MPa y $\mu = 0{,}25$.

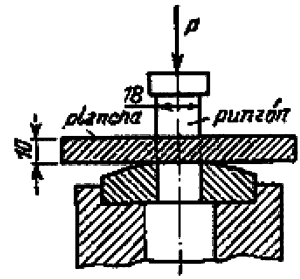
2.3*. Como resultado de la tracción de una lámina rectangular con las tensiones $\sigma = 150$ MPa su longitud aumentó en un 0,075% y su anchura disminuyó en un 0,025%. Calcular el módulo de cizallamiento del material de la lámina y definir el material de ésta.

2.4. Determinar las tensiones tangenciales que originan la variación del ángulo recto de un cuadrado en 10^{-3} radianes. El módulo de elasticidad longitudinal del material es $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, el coeficiente de deformación transversal es $\mu = 0{,}25$. Determinar la energía de deformación potencial específica.

2.5*. Una lámina de duraluminio de espesor $h = 2$ mm tiene por los bordes un marco hecho de varillas absolutamente rígidas



Para el problema 2.5



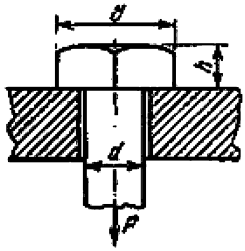
Para el problema 2.6

articuladas en los ángulos. Una fuerza vertical $P = 25$ kN está aplicada en el punto C. Calcular: a) la variación γ del ángulo recto

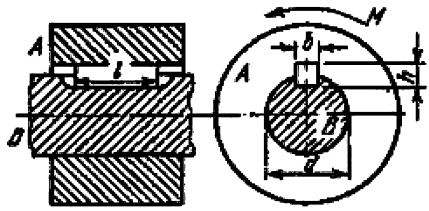
de la lámina; b) la magnitud del descenso vertical Δ_C del punto C; c) las tensiones principales en la lámina; d) la variación longitudinal Δl de las diagonales AC y BD. Construir los diagramas de las fuerzas longitudinales en las varillas. Considerar $E = 7 \cdot 10^4$ MPa y $\mu = 0{,}34$.

2.6. Es necesario punzonar un orificio de diámetro $d = 18$ mm en una plancha de acero de grosor $h = 10$ mm. Determinar la fuerza que debe ser aplicada al punzón para abrir el orificio, si el límite de resistencia del material de la plancha al cizallamiento $\tau_{r.c\,iz} = 350$ MPa.

2.7. Hallar la correlación entre el diámetro de un tornillo que trabaja a la tracción, cuya altura es h y la dimensión de su cabeza es



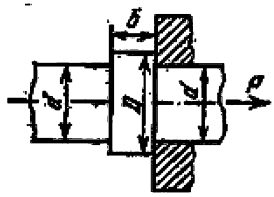
Para el problema 2.7



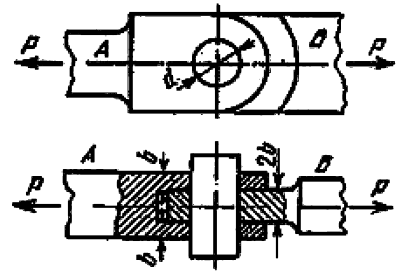
Para el problema 2.8

B, basándose en la condición de equirresistencia y considerando dadas las tensiones admisibles del material a la tracción $[\sigma]_{tr}$, al cizallamiento $[\tau]_{c\,iz}$ y al aplastamiento $[\sigma]_{ap}$. Determinar estas dimensiones, si se sabe que la fuerza $P = 50$ kN, $[\sigma]_{tr} = 160$ MPa, $[\tau] = 60$ MPa y $[\sigma]_{ap} = 200$ MPa.

2.8*. La pieza A está fijada al árbol B con ayuda de una chaveta de sección rectangular. La longitud de la chaveta es $l = 30$ mm; la altura, $h = 8$ mm; el ancho, $b = 10$ mm. Determinar el momento admisible $[M]$ que puede ser transmitido con ayuda de la chaveta de la pieza A a la pieza B, si $D = 100$ mm, $d = 50$ mm, las tensiones admisibles para el material de la chaveta son: al cizallamiento $[\tau]_{c\,iz} = 80$ MPa y al aplastamiento $[\sigma]_{ap} = 200$ MPa.



Para el problema 2.9



Para el problema 2.10

2.9. La fuerza axial $P = 100$ kN actúa sobre un árbol. Determinar el grosor b y el diámetro D del ribete del árbol basándose en

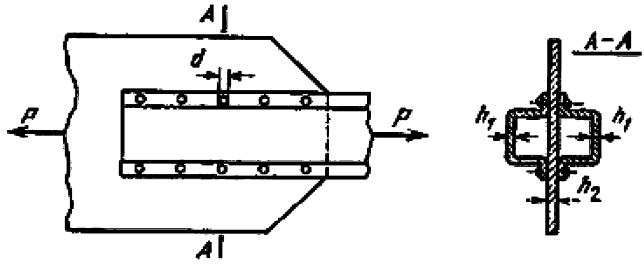
las condiciones de resistencia al cizallamiento y al aplastamiento a partir de las tensiones admisibles $[\tau]_{ciz} = 80$ MPa, $[\sigma]_{ap} = 180$ MPa. El diámetro del árbol es $d = 40$ mm.

2.10*. La pieza A que tiene en su extremo dos ojales de grosor $b = 8$ mm y la pieza B que tiene en su extremo un ojal de grosor $2b = 16$ mm están unidas por un gorrón que entra apretadamente por los orificios de las piezas. Basándose en la resistencia de la unión al cizallamiento y al aplastamiento, determinar la fuerza que puede ser aplicada a las piezas, si el diámetro del gorrón es $d = 20$ mm, las tensiones admisibles del material del mismo a cizallamiento $[\tau]_{ciz} = 80$ MPa, al aplastamiento $[\sigma]_{ap} = 240$ MPa y la tensión admisible al aplastamiento del material de las piezas $[\sigma]_{ap} = 180$ MPa.

§ 2. Cálculo de uniones soldadas y empalmes remachados

2.11. Una lámina de acero de espesor $h = 5$ mm y de ancho $b = 50$ mm está fijada a una plancha de unión del mismo espesor mediante remaches de diámetro $d = 10$ mm. Determinar el número de remaches necesarios a partir de las tensiones admisibles al cizallamiento $[\tau]_{ciz} = 100$ MPa y al aplastamiento $[\sigma]_{ap} = 260$ MPa. Comprobar la resistencia de la lámina sometida a la tracción por una fuerza $P = 30$ kN considerándola debilitada por los orificios para los remaches. La tensión admisible del material de la lámina a la tracción es $[\sigma]_{tr} = 160$ MPa.

2.12*. Determinar el número de remaches de diámetro $d = 4$ mm necesarios para fijar dos perfiles de duraluminio a una plancha de



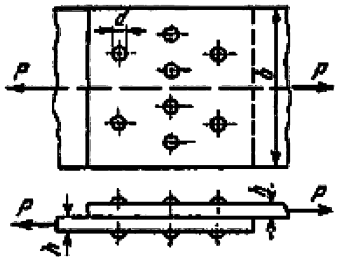
Para el problema 2.12

unión de acuerdo con el esquema representado en la figura. La unión está sometida a una fuerza $P = 22$ kN. El espesor del ala del perfil es $h_1 = 1$ mm, el de la plancha de unión es $h_2 = 2$ mm. Las tensiones admisibles para los remaches son: $[\tau]_{ciz} = 100$ MPa y $[\sigma]_{ap} = 280$ MPa.

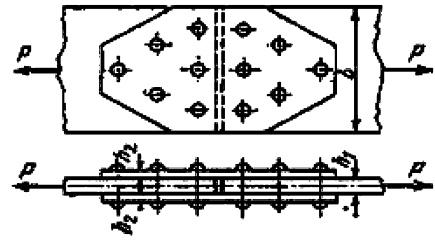
2.13*. Dos hojas de ancho $b = 270$ mm y de espesor $h = 16$ mm están unidas a solapa mediante ocho remaches de diámetro $d = 25$ mm. Determinar la fuerza máxima que puede soportar sin peligro esta unión y establecer en cuánto disminuyen los orificios

para los remaches la resistencia de las hojas. Viene dado: $[\sigma]_{tr} = 120$ MPa, $[\tau]_{ciz} = 80$ MPa, $[\sigma]_{ap} = 240$ MPa.

2.14. Dos hojas de acero de ancho $b = 200$ mm, y espesor $h_1 = 13$ mm están unidas con ayuda de dos cubrejuntas de ancho igual a 200 mm y grosor $h_2 = 8$ mm. El diámetro de los remaches es $d = 19$ mm, la fuerza de tracción es $P = 180$ kN. Comprobar la resis-



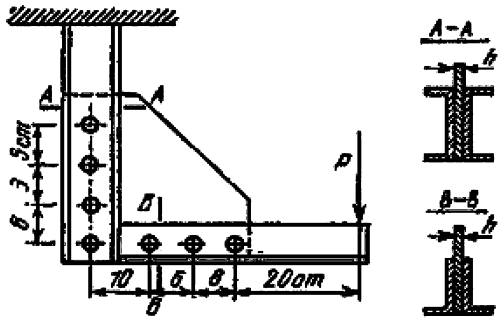
Para el problema 2.13



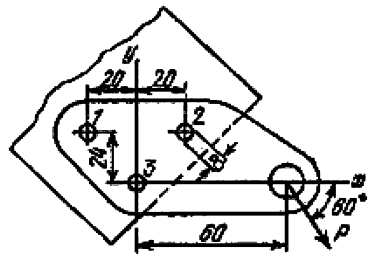
Para el problema 2.14

tencia de la unión, considerando que la tensión admisible para las hojas y cubrejuntas a la rotura $[\sigma]_{tr} = 100$ MPa, al cizallamiento de los remaches $[\tau]_{ciz} = 80$ MPa, al aplastamiento $[\sigma]_{ap} = 200$ MPa.

2.15*. Un nudo de piezas remachadas está cargado con una fuerza aplicada excéntricamente $P = 18$ kN. El grosor de la plancha de



Para el problema 2.15



Para el problema 2.16

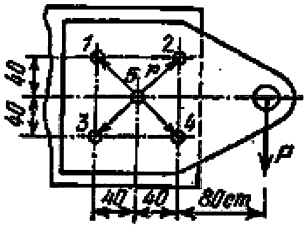
unión y el de los perfiles remachados son iguales a $h = 10$ mm. Determinar el diámetro de los remaches, a partir de las tensiones admisibles $[\tau]_{ciz} = 80$ MPa y $[\sigma]_{ap} = 250$ MPa.

2.16. Una orejeta cargada con la fuerza $P = 4{,}5$ kN está unida por medio de tres remaches de diámetro $d = 8$ mm a una pared gruesa. Comprobar la resistencia de la unión al cizallamiento y al aplastamiento, si el espesor de la orejeta es $h = 5$ mm y las tensiones admisibles son: $[\tau]_{ciz} = 110$ MPa, $[\sigma]_{ap} = 200$ MPa.

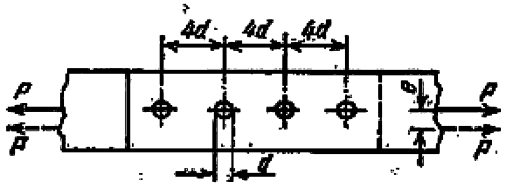
2.17*. Determinar los esfuerzos en los remaches que fijan una plancha perfilada cargada con una fuerza vertical $P = 10$ kN. Hallar

cuántas veces disminuirá el margen de seguridad de la unión, si se quita el remache central.

2.18*. Dos bandas de acero a solape están unidas por cuatro remaches de diámetros iguales y estiradas mediante fuerzas P aplica-



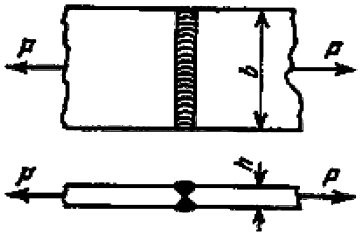
Para el problema 2.17



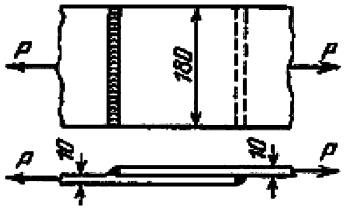
Para el problema 2.18

das centralmente. Determinar la excentricidad de la carga e que origina una disminución del margen de seguridad de los remaches en un 10%.

2.19*. Dos bandas de acero de espesor $h = 10$ mm deben ser soldadas a tope de tal modo que este empalme pueda resistir una fuerza



Para el problema 2.19

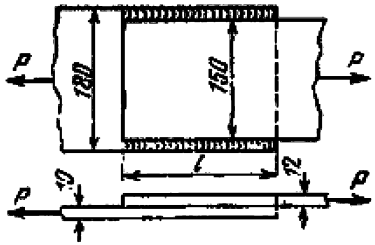


Para el problema 2.20

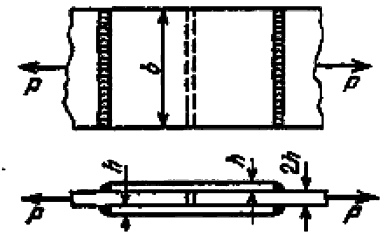
de tracción $P = 100$ kN. Determinar el ancho de las bandas b y el coeficiente de utilización k del material de las mismas, si la tensión admisible en el acero es $[\sigma]_{tr} = 140$ MPa y para los electrodos la tensión admisible es igual a $[\sigma]_e = 100$ MPa. ¿Qué fuerza resistirá la unión, si el cordón se hace inclinado a un ángulo de 45°? La tensión admisible del material del cordón al cizallamiento $[\tau]_e = 80$ MPa.

2.20. Determinar la fuerza de tracción máxima que puede ser aplicada a unas hojas de 180 mm de ancho y 10 mm de espesor soldadas a solape con dos cordones de extremo. Calcular el coeficiente de utilización del material de las hojas para las cuales $[\sigma]_{tr} = 140$ MPa. Las tensiones admisibles en el material de los electrodos a cizallamiento $[\tau]_e = 90$ MPa.

2.21. Dos hojas de 180 × 10 mm y 150 × 12 mm están unidas a solape por dos cordones de flanco. La unión está sometida a la acción de una fuerza de tracción $P = 250$ kN. Determinar la longitud de los cordones, cuando $[\tau]_e = 70$ MPa, y el grado de utilización del material de las hojas para el cual $[\sigma]_{tr} = 140$ MPa.



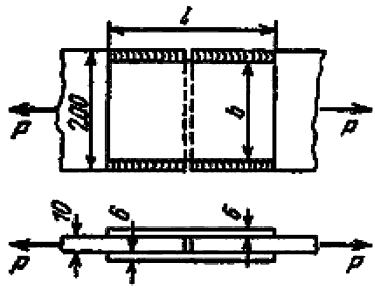
Para el problema 2.21



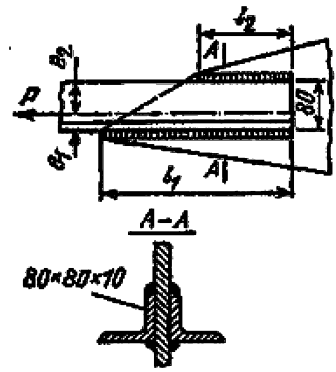
Para el problema 2.22

2.22. Dos tiras están unidas a tope con ayuda de dos cubrejuntas de igual espesor soldadas por medio de cordones de extremo. Determinar el grosor h de las cubrejuntas considerando que el cordón se destruye por desplazamiento a un ángulo de 45° respecto al plano de la tira. Viene dado: $P = 300$ kN, $b = 30$ cm, $h = 1$ cm, $[\tau]_e = 90$ MPa. Para compensar la soldadura incompleta posible hace falta disminuir en 1 cm la longitud de cálculo de los cordones.

2.23. Calcular un empalme soldado de dos hojas de acero de 200 × 10 mm de sección, sometidas a tracción, recubierto por dos



Para el problema 2.23

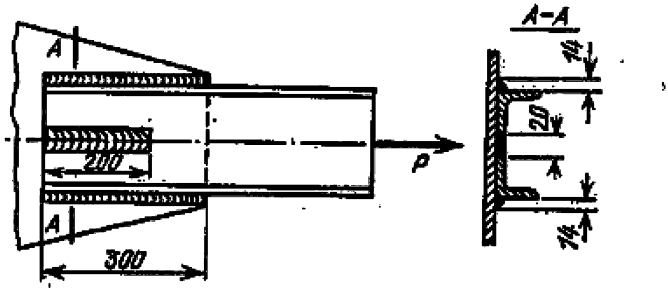


Para el problema 2.24

cubrejuntas. El cálculo debe basarse en las condiciones de equirresistencia del metal básico y del de la unión, partiendo de las tensiones admisibles en el metal básico $[\sigma]_{tr} = 160$ MPa y en el material de los cordones $[\tau]_e = 80$ MPa. Determinar las dimensiones de las cubrejuntas. Calcular cómo variarán las cubrejuntas, si a los cordones de flanco se añaden cordones de extremo con las mismas tensiones admisibles.

2.24*. Determinar las longitudes de los cordones de soldadura para fijar a una plancha de unión un angular equilátero 80 × 80 × × 10 mm (el área de la sección es $F = 15{,}1$ cm², $e_1 = 2{,}35$ cm), basándose en la condición de equirresistencia de los cordones de unión y del angular. El material del angular es acero St. 3 $[\sigma]_{tr} = 160$ MPa. La tensión admisible en el material del cordón es $[\tau]_e = 90$ MPa.

2.25. Comprobar la resistencia de la unión de un perfil en U, cuya área de la sección es $F = 55{,}9$ cm², con una plancha perfilada por medio de dos cordones de flanco y un cordón en ranura. El perfil



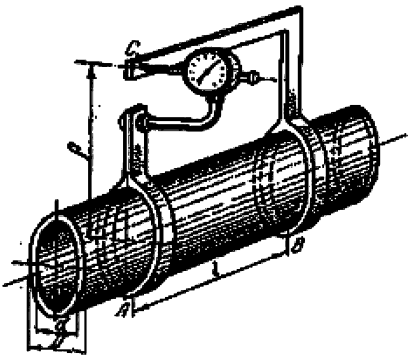
Para el problema 2.25

en U está sometido a tracción por una fuerza $P = 800$ kN. La tensión admisible en el material básico es $[\sigma]_{tr} = 160$ MPa, en el material de los cordones a cizallamiento es $[\tau]_a = 80$ MPa.

§ 3. Torsión de árboles de sección circular

2.26. Durante un ensayo a la torsión de una muestra cilíndrica de acero resultó que el crecimiento del momento torsor en $\Delta M_{tor} = 5$ N·m origina un incremento del ángulo de torsión $\Delta\varphi = 0{,}002$ rad en una longitud de 20 cm. Calcular el módulo de cizallamiento del material de la muestra G y el coeficiente de Poisson μ, si son conocidos el módulo de elasticidad a la tracción $E = 2 \cdot 10^5$ MPa y el diámetro de la muestra $d = 16$ mm.

2.27*. Un árbol hueco está sometido a torsión bajo la acción de los momentos M aplicados en sus extremos. En el centro del árbol, formando un ángulo de 45° respecto a su eje, está fijado un tensómetro de base $s = 20$ mm y de aumento $k = 1\,000$. El crecimiento de las indicaciones del tensómetro $\Delta n = 12$ mm corresponde al crecimiento del momento torsor en $\Delta M_{tor} = 9$ kN·m. Calcular el módulo de cizallamiento del material y el incremento del ángulo de torsión del árbol, si su longitud es igual a $l = 1$ m y los diámetros son $D = 0{,}12$ m y $d = 0{,}08$ m.



Para el problema 2.28

2.28. Para definir los ángulos de torsión de un árbol hueco en la sección A está montado un indicador cuyo vástago aprieta sobre la palanca acodada C fijada sobre el árbol en la sección B. La distancia

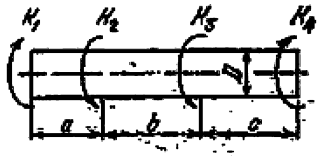
entre las secciones A y B es igual a $l = 0{,}1$ m. El punto de contacto del indicador y la palanca C dista $\rho = 15$ cm del eje del árbol. Los diámetros exterior e interior del árbol son: $D = 0{,}1$ m, $d = 0{,}09$ m. Calcular el módulo de cizallamiento del material G, si durante un crecimiento del momento torsor en $\Delta M_{tor} = 4$ kN·m las indicaciones del instrumento aumentan en $n = 25$ divisiones. El valor de una división del indicador es $c = 0{,}01$ mm.

2.29*. La frecuencia de rotaciones del árbol hueco de un reductor de longitud $l = 0{,}6$ m es igual a $n = 500$ r.p.m. Con ayuda de un tensorresistor pegado sobre el árbol a un ángulo de 45° con respecto a su eje se ha medido el alargamiento relativo $\varepsilon = 3{,}4 \cdot 10^{-4}$ del material del árbol en esta dirección. Determinar la potencia N que transmite el árbol y el valor del ángulo de torsión del mismo. Viene dado: el diámetro exterior del árbol $D = 8$ cm, la relación entre los diámetros interior y exterior $\alpha = 0{,}75$, la longitud del árbol $l = 0{,}6$ m, el módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, el coeficiente de Poisson $\mu = 0{,}3$.

2.30*. Determinar la magnitud del momento torsor mediante el cual el cálculo a la resistencia de un árbol macizo circular da el mismo diámetro D que el cálculo a la rigidez. Hallar D. La tensión tangencial admisible $[\tau] = 80$ MPa, el ángulo de torsión relativo admisible $[\varphi'] = 0{,}5°$ por metro, el módulo de cizallamiento del material del árbol $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

2.31. Un árbol de acero de sección maciza transmite una potencia $N = 60$ kW. La frecuencia de rotación del árbol es $n = 240$ r.p.m. Determinar el diámetro del árbol D basándose en las condiciones de resistencia y rigidez, si $[\tau] = 40$ MPa, el ángulo de torsión admisible $[\varphi'] = 1°$ por metro y el módulo de cizallamiento $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

2.32. Las mediciones realizadas durante el ensayo de un motor mostraron que su árbol de diámetro $D = 50$ mm y longitud $l = 0{,}5$ m, con una frecuencia de rotación igual a $n = 3\,000$ r.p.m., se tuerce a un ángulo $\varphi = 0{,}02°$. Determinar la potencia que transmite el árbol, si se sabe que el módulo de cizallamiento del material es igual a $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.



Para el problema 2.33

2.33*. Calcular el diámetro de un árbol cargado con los momentos $K_1 = 2$ kN·m, $K_2 = 10$ kN·m, $K_3 = 1$ kN·m y $K_4 = 9$ kN·m. La tensión tangencial admisible en el material del árbol es igual a $[\tau] = 50$ MPa. Construir los diagramas de las tensiones tangenciales a lo largo de los radios para cada uno de los tres tramos del árbol cuyas longitudes son: $a = 0{,}5$ m, $b = 0{,}8$ m y $c = 0{,}6$ m. Construir los diagramas de los ángulos de torsión relativos φ' y de los ángulos de giro absolutos φ a lo largo del árbol, considerando inmóvil su extremo izquierdo. El módulo de cizallamiento del material del árbol es $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

2.34. Dos árboles de igual longitud y masa están fabricados de

un mismo material. Uno de los árboles es hueco con una relación de diámetros $\alpha = d/D$ dado. El otro es macizo, el diámetro exterior del cual es D_0. Hallar la relación de los momentos torsores que pueden ser aplicados a los árboles cuando las tensiones admisibles son iguales. Comparar las rigideces de los árboles a la torsión y determinar en cuánto disminuirá la masa del árbol hueco, si éste se hace equirresistente al árbol macizo, conservando constante la relación de diámetros $\alpha = 0{,}8$.

2.35*. Comparar las masas y los ángulos de torsión de dos árboles circulares macizos de longitud $l = 2$ m cada uno, que reciben momentos torsores iguales $M = 1$ kN·m. Un árbol es de acero; el otro, de una aleación de aluminio. Calcular los diámetros de los árboles de acuerdo con la condición de resistencia. Viene dado: para el árbol de acero $[\tau] = 80$ MPa, $\rho = 7{,}85 \cdot 10^3$ kg/m^3, $G = 8 \cdot 10^4$ MPa; para el árbol de aleación de aluminio $[\tau] = 50$ MPa, $\rho = 2{,}6 \cdot 10^3$ kg/m^3, $G = 3 \cdot 10^4$ MPa.

2.36. Un árbol macizo de diámetro $D_0 = 0{,}12$ m y longitud $l = 1{,}5$ m transmite un momento torsor constante M_{tor}. Determinar las dimensiones de la sección transversal de un árbol hueco de la misma longitud, que posee la misma resistencia que el árbol macizo y cuya rigidez es 1,5 veces mayor. Calcular la masa de cada árbol, considerando que ellos están fabricados de un mismo material de densidad $\rho = 7{,}85 \cdot 10^3$ kg/m^3.

2.37. Una potencia de $N = 10$ kW se transmite de un árbol macizo, a través de un embrague de garras, a un árbol hueco con una frecuencia de rotación $n = 100$ r.p.m. Calcular el diámetro D_0 del árbol macizo y el diámetro exterior D del árbol hueco teniendo en cuenta que la relación de diámetros es $\alpha = 0{,}7$, considerando que la tensión tangencial admisible es igual a $[\tau] = 60$ MPa.

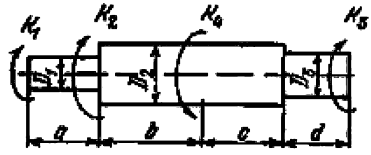
2.38. Determinar la relación de los diámetros de dos árboles, fabricados de un mismo material, que transmiten una potencia igual, si un árbol hace $n_1 = 50$ r.p.m. y el otro, $n_2 = 100$ r.p.m.

2.39*. Un árbol hueco cuya relación de diámetros es $\alpha = d/D = 0{,}6$ se somete a torsión por los momentos $K_1 = 0{,}8$ kN·m, $K_2 = 1{,}2$ kN·m, $K_3 = 0{,}4$ kN·m y por el momento K_4. El momento K_4 equilibra los demás momentos. Determinar las dimensiones de la sección transversal que satisfacen las condiciones de resistencia y rigidez, construir los diagramas del momento torsor M_{tor}, del ángulo de torsión relativo φ' del árbol y del ángulo de giro absoluto φ de la sección a lo largo del árbol y el diagrama de tensiones tangenciales τ a lo largo del radio de la sección peligrosa. Viene dado: $[\tau] = 30$ MPa, $[\varphi'] = 0{,}25°$ por metro, el módulo de cizallamiento $G = 8 \cdot 10^4$ MPa. Elegir la sección fija del árbol a su parecer. Las longitudes de los tramos del árbol son: $a = 1{,}2$ m, $b = 0{,}8$ m, $c = 0{,}6$ m.

2.40*. A un árbol escalonado están aplicados los momentos $K_1 = 2$ kN·m, $K_2 = 10$ kN·m, $K_3 = 8$ kN·m y el momento K_4 que equilibra los primeros tres. Calcular los diámetros D_1, D_2, D_3 de

los tramos del árbol de acuerdo con la tensión admisible $[\tau] = 40$ MPa, construir los diagramas de los ángulos de torsión relativos del árbol φ' y de los ángulos de giro absolutos φ de la sección

Para el problema 2.39

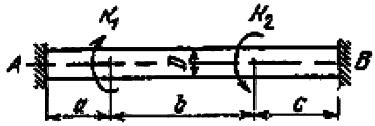


Para el problema 2.40

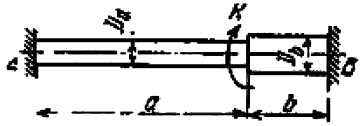
cuando $a = 0{,}5$ m, $b = 1{,}0$ m, $c = 0{,}5$ m, $d = 1{,}2$ m, $G = 8 \times 10^4$ MPa, considerando que el extremo derecho es fijo. Representar el diagrama de tensiones tangenciales a lo largo del radio de una de las secciones del árbol.

§ 4. Problemas estáticamente indeterminados a la torsión

2.41*. Un árbol macizo de sección circular tiene sus extremos rígidamente empotrados y está cargado con dos momentos de sentidos opuestos $K_1 = 0{,}4$ kN·m y $K_2 = 0{,}6$ kN·m. Calcular el diámetro del árbol D de acuerdo con las condiciones de resistencia y rigidez, considerando la tensión admisible $[\tau] = 40$ MPa, el ángulo de torsión admisible es $[\varphi'] = 0{,}25°$ por metro, el módulo de cizallamiento es $G = 8 \cdot 10^4$ MPa, $a = 0{,}5$ m, $b = 0{,}75$ m, $c = 1{,}25$ m.



Para el problema 2.41

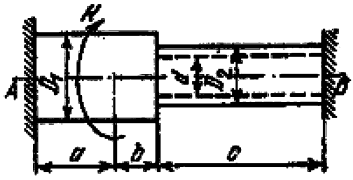


Para el problema 2.42

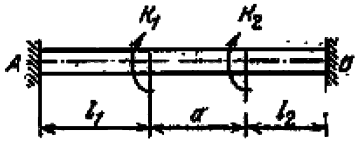
2.42*. Determinar los momentos en los empotramientos de un árbol escalonado, construir los diagramas de los momentos torsores y de los ángulos de torsión. Viene dado: $K = 10$ kN·m, $a = 1{,}2$ m, $b = 0{,}4$ m, $D_a = 4$ cm, $D_b = 5$ cm, $G = 3 \cdot 10^4$ MPa.

2.43*. Los extremos del árbol AB están rígidamente empotrados en paredes fijas. El diámetro de la parte gruesa del árbol es igual a $D_1 = 20$ cm. La parte delgada tiene un diámetro igual a $D_2 = 15$ cm y está debilitada por un canal longitudinal de diámetro $d = 12$ cm. Construir los diagramas de los momentos torsores y de los ángulos de giro a lo largo del árbol, considerando $K = 150$ kN·m, $a = 0{,}4$ m, $b = 0{,}2$ m, $c = 0{,}8$ m. Hacer la comprobación de la resistencia y la rigidez del árbol cuando la tensión admisible es $[\tau] = 60$ MPa y el ángulo de torsión admisible es $[\varphi'] = 0{,}6°$ por metro. El módulo de cizallamiento es $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

2.44*. Los momentos K_1 y K_2 están aplicados a un árbol de sección constante empotrado por ambos extremos tal como está representado en la figura. Determinar cuál debe ser la relación entre los momentos K_1 y K_2 para que los momentos reactivos en las secciones empotradas sean iguales.



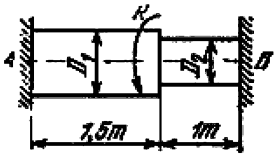
Para el problema 2.43



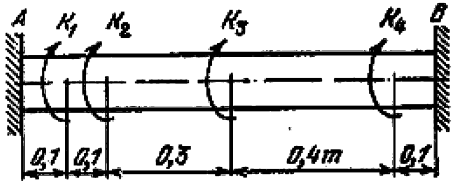
Para el problema 2.44

2.45. Determinar el momento admisible K. Los diámetros de los tramos del árbol son: $D_1 = 7$ cm, $D_2 = 5$ cm, la tensión tangencial admisible es igual a $[\tau] = 60$ MPa.

2.46*. ¿A qué distancia del empotramiento izquierdo del árbol, examinado en el problema 2.45, hace falta aplicar un momento K para que las tensiones máximas en las partes gruesa y delgada del árbol sean iguales? Determinar el momento admisible K en el caso mencionado cuando $[\tau] = 60$ MPa.



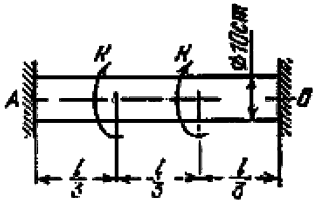
Para el problema 2.45



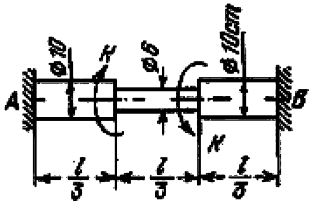
Para el problema 2.47

2.47. Construir los diagramas de los momentos torsores y de los ángulos de torsión. Viene dado: $K_1 = 0{,}3$ kN·m, $K_2 = 1{,}6$ kN·m, $K_3 = 0{,}8$ kN·m, $K_4 = 0{,}1$ kN·m, la rigidez del árbol a la torsión es $GJ_{pol} = 20$ kN·m^2.

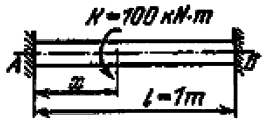
2.48. Calcular la magnitud admisible del momento K según las tensiones admisibles $[\tau] = 80$ MPa y construir el diagrama de los ángulos de giro, considerando $l = 1{,}5$ m, $G = 7 \cdot 10^4$ MPa.



Para el problema 2.48



Para el problema 2.49



Para el problema 2.50

2.49*. Resolver el problema 2.48 con la condición de que el diámetro de la parte media es $D_1 = 6$ cm y los momentos K están dirigidos en sentidos opuestos.

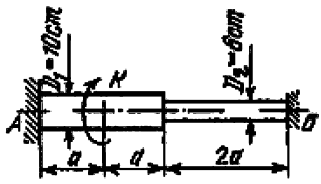
2.50*. Determinar a qué distancia x, a partir del empotramiento izquierdo, hace falta aplicar el momento K para que el cálculo del árbol según la tensión admisible $[\tau] = 100$ MPa y según el ángulo de torsión relativo admisible $[\varphi'] = 0{,}5°$ por metro dé un mismo valor del diámetro. $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

§ 5. Cálculo según el estado límite

2.51*. Un árbol macizo de sección circular de diámetro $D = 5$ cm gira a causa de unos momentos aplicados en sus extremos. Construir el diagrama de tensiones tangenciales a lo largo del radio de la sección, correspondiente al estado límite del árbol; hallar el momento de torsión límite, si el límite de fluencia del material del árbol es $\tau_{fl} = 150$ MPa [1]).

2.52. Construir el diagrama de tensiones tangenciales a lo largo del radio correspondientes al estado límite de un tubo de acero de sección 70×50 mm y hallar el momento de torsión límite, si el límite de fluencia del material es $\tau_{fl} = 200$ MPa [1]).

2.53. Comparar las masas de dos árboles de acero macizos de longitudes iguales calculados con coeficientes de seguridad iguales a $n_{fl} = 2$; el primer árbol se ha calculado según el estado límite y el segundo, según las tensiones admisibles. El momento torsor $M_{tor} = 10$ kN·m, el límite de fluencia del material es $\tau_{fl} = 280$ MPa.



Para el problema 2.55

2.54. Hallar la carga límite para un árbol macizo empotrado en sus dos extremos y cargado en la parte media con un momento de torsión concentrado K. El límite de fluencia del material del árbol es $\tau_{fl} = 300$ MPa, el diámetro del árbol es $D = 4$ cm. Determinar cómo variará el momento límite K, si se elimina uno de los empotramientos.

2.55*. Hallar el momento límite K_{lim} a partir del límite de fluencia del material $\tau_{fl} = 200$ MPa. Determinar cómo variará el momento límite, si se libera el extremo izquierdo del árbol.

§ 6. Torsión de barras de secciones no circulares

2.56. Calcular la potencia admisible que puede ser transmitida por el tramo de un árbol de acero de sección elíptica con semiejes $a = 4$ cm y $b = 2{,}5$ cm, si la tensión admisible es $[\tau] = 50$ MPa, la frecuencia de rotación del árbol es $n = 200$ r.p.m. Hallar el

[1]) Tomar el diagrama de Prandtl (sin tener en cuenta la consolidación).

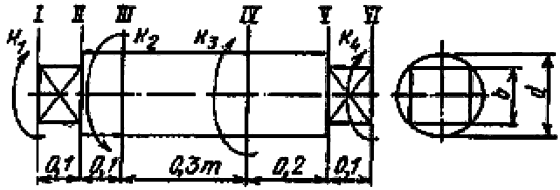
ángulo de torsión relativo φ' considerando que el módulo de cizallamiento es $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

2.57. El tramo de un árbol de sección cuadrada transmite una potencia de $N = 10$ kW con una frecuencia de rotación igual a $n = 120$ r.p.m. Según la condición de resistencia del árbol determinar la dimensión a del lado del cuadrado si la tensión admisible es $[\tau] = 46$ MPa.

2.58*. Una barra de acero de sección rectangular de dimensiones 60×20 mm y longitud $l = 0{,}8$ m está cargada con un momento torsor $M_{tor} = 0{,}4$ kN·m. Calcular la tensión tangencial máxima en la barra, construir los diagramas de las tensiones tangenciales en la sección transversal y determinar el ángulo de torsión de la barra si el módulo de cizallamiento es $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

2.59. Una banda de acero de grosor $h = 15$ mm y de longitud $l = 0{,}8$ m se tuerce por el momento $M = 0{,}6$ kN·m. Determinar el ancho b de la banda basándose en la condición de resistencia si $[\tau] = 80$ MPa.

2.60. Un árbol macizo circular tiene los extremos de secciones cuadradas. El cuadrado de lado b está inscrito en una circunferencia



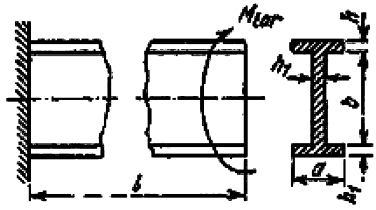
Para el problema 2.60

de diámetro d que determina la sección de la parte media del árbol. El árbol está cargado con los momentos $K_1 = 0{,}4$ kN·m, $K_2 = 1{,}2$ kN·m, $K_3 = 0{,}5$ kN·m, $K_4 = 0{,}3$ kN·m. A partir de la condición de resistencia, determinar el diámetro del árbol, si $[\tau] = 50$ MPa. Construir los diagramas de las tensiones tangenciales en las secciones peligrosas del árbol. La concentración de tensiones se desprecia.

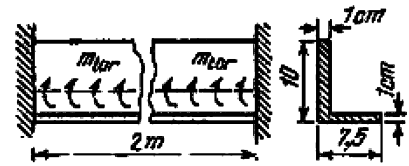
2.61*. Calcular cuántas veces disminuirá la resistencia y la rigidez a la torsión de un tubo de paredes delgadas, si éste se corta a lo largo de la generatriz a toda su longitud. El diámetro interior del tubo es $d = 8$ cm, el grosor de su pared es $h = 0{,}4$ cm.

2.62*. Una viga en doble T de longitud $l = 1{,}5$ m está empotrada en una pared en uno de sus extremos y en el otro está cargada con un momento torsor M_{tor}. Las dimensiones de la sección transversal de la viga son: $a = 12$ cm, $b = 28$ cm, $h = 2$ cm, $h_1 = 1$ cm. Determinar el momento máximo M_{tor} que puede ser soportado por la viga si la tensión admisible es igual a $[\tau] = 60$ MPa. La obstaculización de los desplazamientos longitudinales en la viga se desprecia.

2.63. Un angular está cargado con un momento torsor de intensidad $m_{tor} = 0{,}22$ kN·m por metro repartido uniformemente a lo



Para el problema 2.62

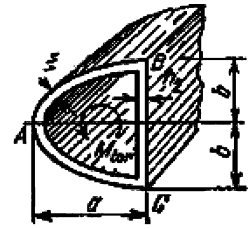


Para el problema 2.63

largo del angular. Construir el diagrama de momentos torsores y calcular las tensiones tangenciales máximas en la sección de más peligro.

2.64*. Una barra de paredes delgadas de sección rectangular cerrada gira bajo la acción de momentos M aplicados en sus extremos. Calcular la magnitud del momento admisible $[M]$ basándose en la condición de resistencia considerando $[\tau] = 60$ MPa. Determinar cuántas veces disminuirá el momento admisible, si la caja se corta a lo largo de toda la generatriz.

Para el problema 2.64



Para el problema 2.65

2.65. Calcular la tensión tangencial en la pared de un tubo de paredes delgadas cerrado de sección en forma de una semielipse ABC con los semiejes $a = 0{,}3$ m, $b = 0{,}1$ m. El momento torsor $M_{tor} = 7$ kN·m, el grosor de la pared curvilínea es igual a $h_1 = 1{,}5$ mm, el grosor de la pared vertical es $h_2 = 2$ mm.

§ 7. Muelles salomónicos de paso pequeño

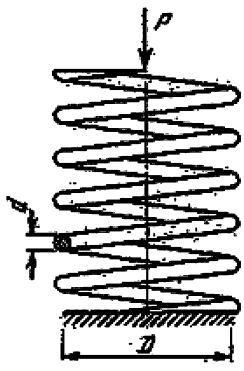
2.66*. Un muelle enroscado de un alambre de diámetro $d = 20$ mm con un número de espiras de trabajo igual a $n = 8$ se comprime por una fuerza $P = 8$ kN. El diámetro medio del muelle es $D = 12$ cm. Determinar la deformación Δ del muelle y las tensiones tangenciales máximas $\tau_{máx}$. El módulo de cizallamiento del material del muelle es $G = 8{,}5 \cdot 10^4$ MPa.

2.67*. Calcular la rigidez de un resorte que tiene el diámetro de la espira igual a $D = 20$ cm, el diámetro del alambre $d = 12$ mm y el número de espiras $n = 5$. El módulo de cizallamiento es $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

2.68*. Determinar el diámetro del alambre de un resorte cilíndrico, cuyas espiras tienen un diámetro promedio $D = 8$ cm, a partir de la condición de resistencia, si la tensión admisible es $[\tau] = 400$ MPa. La carga máxima sobre el resorte es igual a $P = 20$ kN.

2.69. Hallar el número de espiras n de un resorte cilíndrico necesario para garantizar una deformación $\Delta = 5$ mm durante la acción de una fuerza $P = 15$ kN. En este caso la tensión no debe ser mayor que el valor admisible $[\tau] = 400$ MPa. El diámetro de las espiras del resorte $D = 6$ cm. El módulo de cizallamiento es $G = 8{,}5 \cdot 10^4$ MPa.

2.70. Determinar la fuerza admisible de un resorte que consta de $n = 12$ espiras con un diámetro $D = 4$ cm para que la deformación del resorte no sea mayor de $\Delta = 8$ mm. La tensión tangencial admisible del material de resorte es $[\tau] = 200$ MPa; el módulo de cizallamiento, $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.



Para los problemas 2.66—2.70

§ 8. Problemas que se resuelven en ordenador

2.71. Un árbol AB de sección arbitraria cargado con un momento $m(x) = m_0 (1 + e^{-x^2/l^2})$ distribuido en toda su longitud y un momento torsor concentrado $K = \xi m_0 l$ en el extremo libre A, está rígidamente empotrado por el extremo B.

Redactar el programa para calcular los momentos torsores en las secciones del árbol. Asignar los valores de los parámetros m_0, ξ, l y calcular los valores del momento torsor en las secciones que se encuentran una de otra a una distancia igual a la décima parte de la longitud del árbol partiendo del extremo libre A. Realizar los cálculos con una exactitud de milésimas.

2.72*. Determinar la tensión tangencial máxima en una sección dada del árbol AB de sección variable que está empotrado en uno de sus extremos. El árbol soporta la acción de un momento torsor distribuido de intensidad constante m. Un momento concentrado $K = \xi m l$ está aplicado en el extremo libre del árbol.

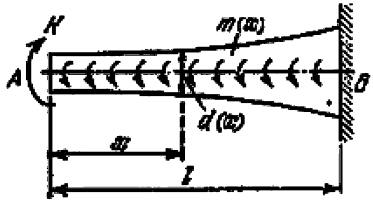
El diámetro del árbol varía de acuerdo con la ley $d(x) = d_0 [1 + (x/l)^{2/3}]$, donde d_0 es el diámetro de la sección extrema.

Redactar el programa para determinar en ordenador el valor máximo de la tensión tangencial en cualquier sección. Asignar los valores de los parámetros ξ, m, d_0, l y calcular $\tau_{máx}$ para once secciones equidistantes entre sí empezando a partir del extremo libre del árbol.

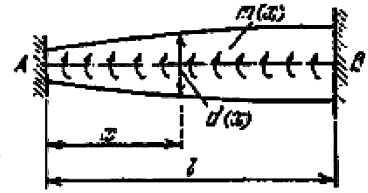
Construir el diagrama de las tensiones máximas a lo largo del árbol.

2.73. Determinar el ángulo de giro de la sección extrema del árbol AB sometido en toda su longitud a la acción de un momento distribuido $m(x) = m\left(1 - \frac{x}{l}\right)$ y de un momento concentrado $K = \xi ml$ en el extremo libre. El extremo derecho del árbol está rígidamente empotrado. El diámetro del árbol varía de acuerdo con la ley $d(x) = d_0\left(1 + \left(\frac{x}{l}\right)^{7/6}\right)$, donde d_0 es el diámetro de la sección del extremo derecho.

Redactar el programa para calcular el ángulo de torsión con una exactitud de milésimas para los parámetros m, ξ, l, d_0 asignados.



Para los problemas 2.71—2.74



Para el problema 2.75

El módulo de cizallamiento se toma de acuerdo con el material supuesto del árbol.

2.74*. Un árbol de sección variable está cargado de un momento concentrado $K = \xi ml$ en el extremo libre A y de un momento distribuido en toda la longitud del árbol de acuerdo con la ley $m(x) = m\left(\frac{x}{l}\right)^2$, donde m es cierto parámetro elegido arbitrariamente. El diámetro del árbol varía según la ley $d(x) = d_0\left(1 + \left(\frac{x}{l}\right)^{1/3}\right)$ donde d_0 es el diámetro de la sección del extremo libre del árbol.

Redactar el programa para calcular los valores del ángulo de giro de las secciones del árbol. Asignar los valores numéricos de los parámetros m, ξ, l, d_0 y el del módulo de cizallamiento del material del árbol. Calcular el ángulo de giro de once secciones equidistantes entre sí empezando por el extremo libre.

Construir el diagrama de los ángulos de giro.

2.75. Construir el diagrama de los momentos torsores de un árbol de sección variable empotrado rígidamente en ambos extremos y cargado con un momento torsor repartido de acuerdo con la ley $m = \text{const}$. Considerar que el diámetro varía a lo largo del árbol según la ley $d(x) = d_0\left(1 + \left(\frac{x}{l}\right)^{8/9}\right)$, donde d_0 es el diámetro de la sección del extremo izquierdo.

Redactar el programa para demostrar la indeterminación estática del árbol.

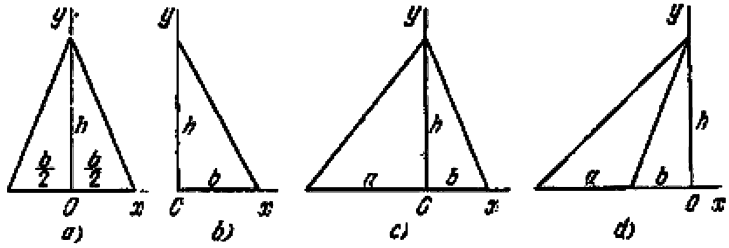
Asignar los valores numéricos de los parámetros d_0, m, l y calcular los momentos de reacción con una exactitud de milésimas.

CAPÍTULO 3

CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DE SECCIONES DE VIGAS

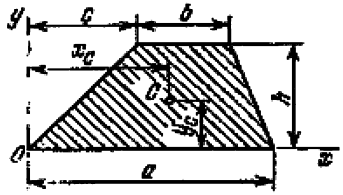
§ 1. Centro del área de una sección

3.1. Calcular las coordenadas de los centros de las áreas de los triángulos, representados en la figura, respecto a los ejes que coinciden con la base y con la altura del triángulo.

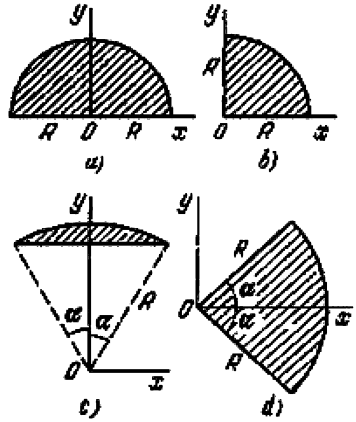


Para el problema 3.1

3.2*. Calcular las coordenadas del centro del área de un trapecio cualquiera por dos métodos diferentes: el de la integración inmediata y el de la descomposición del trapecio en dos triángulos.



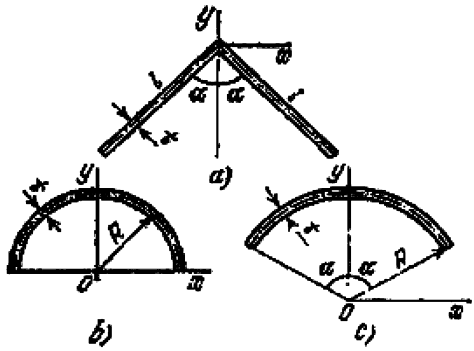
Para el problema 3.2



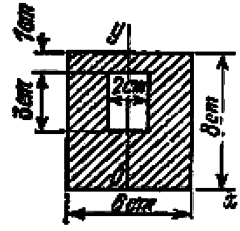
Para el problema 3.3

3.3*. Determinar las coordenadas de los centros de las partes de un círculo representadas en la figura.

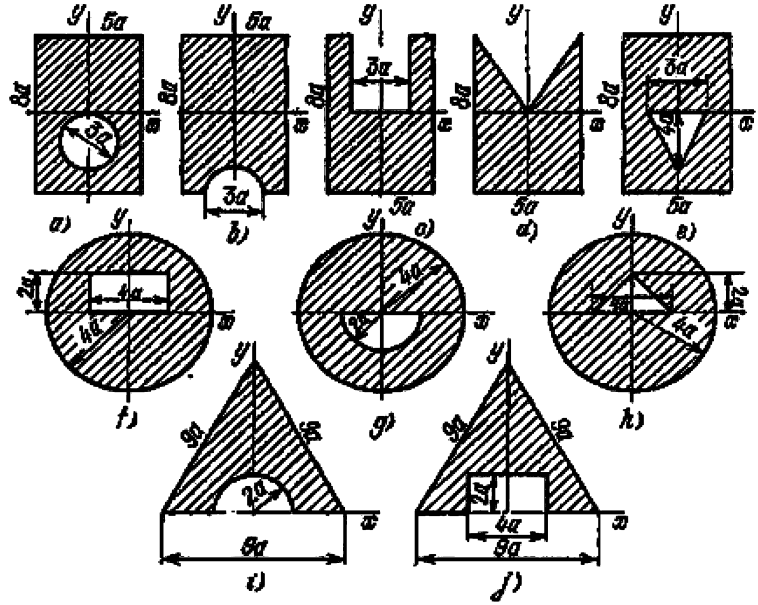
3.4. Hallar las áreas de las secciones de las vigas de paredes delgadas representadas en la figura y determinar las coordenadas de sus centros.



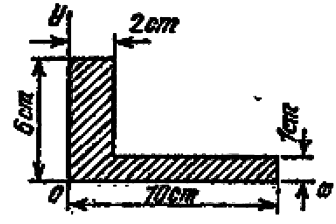
Para el problema 3.4



Para el problema 3.5



Para el problema 3.6



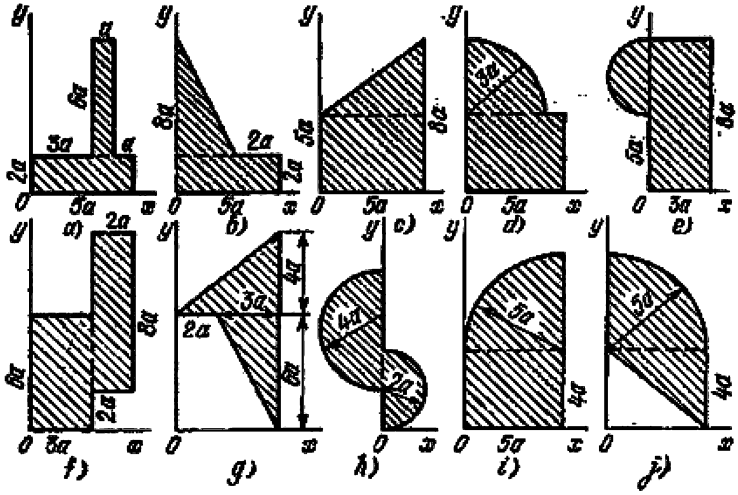
Para el problema 3.7

3.5. Calcular el área de una sección rectangular con un recorte interno y hallar la posición del centro del área por el método de las áreas negativas.

3.6. Para una de las secciones representadas en la figura hallar el área y determinar la posición de su centro, teniendo en cuenta la simetría de la sección.

3.7. Calcular el área do un angular inequilátero y hallar las coordenadas de su centro respecto a los ejes que coinciden con sus caras exteriores.

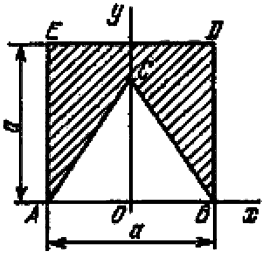
3.8. Determinar el área de la figura y hallar las coordenadas de su centro, utilizando el método de división en figuras simples y haciendo uso de los resultados obtenidos en los problemas 3.1 y 3.3.



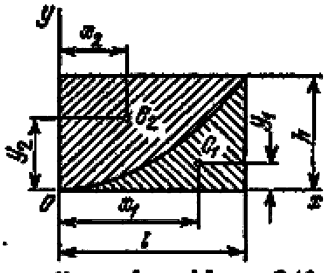
Para el problema 3.8

3.9. Hallar la altura de un triángulo isósceles ABC recortado de un cuadrado, sabiendo que el vértice C coincide con el centro del área de la figura que quedó después del corte.

3.10*. Un rectángulo de ancho l y altura h está dividido en dos partes por una parábola de segundo orden $y = ax^2$. Determinar las áreas y las coordenadas de los centros de cada uno de los dos triángulos curvilíneos obtenidos.



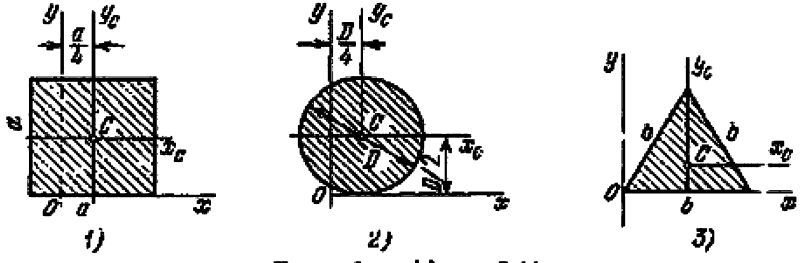
Para el problema 3.9



Para el problema 3.10

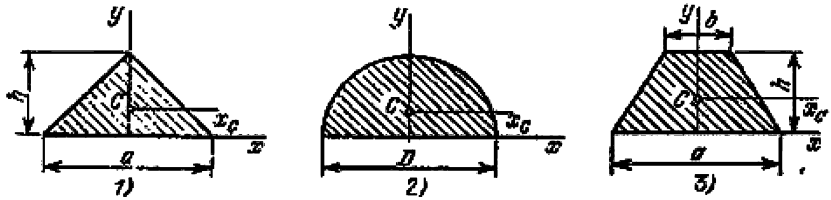
§ 2. Momentos de inercia de secciones transversales

3.11. Determinar los momentos de inercia axiales J_{x_C} y J_{y_C} y el momento de inercia centrífugo $J_{x_C y_C}$ de las secciones: de un cuadrado cuyo lado es a, un triángulo equilátero con un lado igual a b y un



Para el problema 3.11

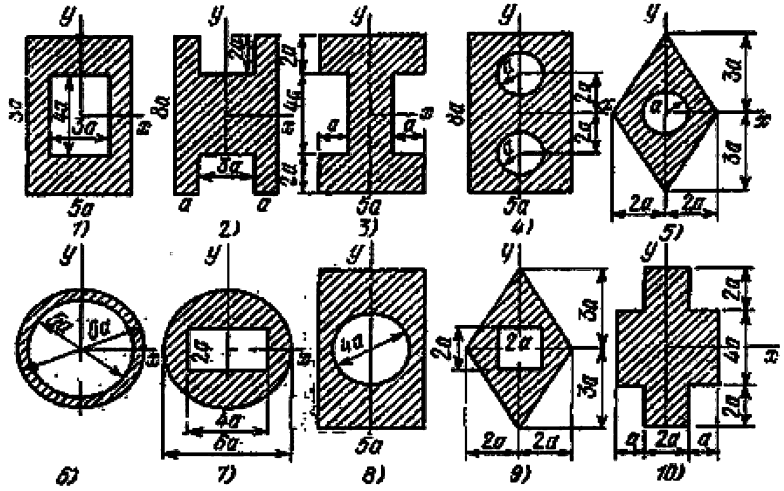
círculo de diámetro D respecto a los ejes x_C e y_C que pasan por el centro de la sección. Hallar los momentos de inercia J_x, J_y, J_{xy} respecto a los ejes x, y.



Para el problema 3.12

3.12*. Determinar los momentos de inercia J_x y J_{x_C}.

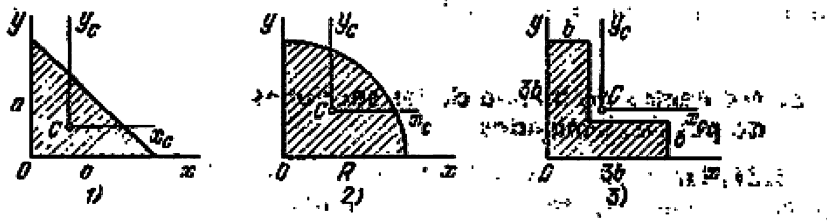
3.13*. Calcular los momentos de inercia respecto a los ejes de simetría de la sección.



Para el problema 3.13

3.14*. Para las secciones representadas en la figura del problema 3.6 determinar los momentos de inercia J_{x_C} y J_{y_C} respecto a los ejes que pasan por el centro de la sección. El eje y_C es el de simetría y es perpendicular al eje x_C.

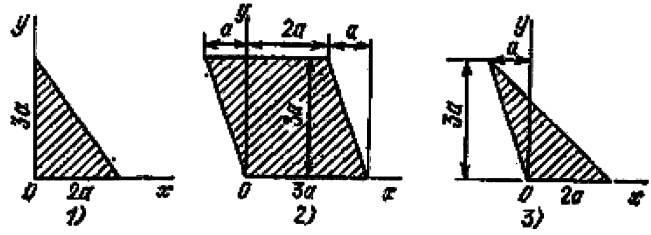
3.15*. Para las secciones con forma de triángulo isósceles, de un cuarto de círculo y de un angular equilátero se pide: a) calcular los



Para el problema 3.15

momentos axiales y centrífugos de inercia respecto a los ejes x e y; b) hallar los momentos de inercia centrífugo y axiales centrales $J_{x_Cy_C}$, J_{y_C} y J_{x_C}, c) hallar la posición de los ejes principales centrales y los valores de los momentos de inercia principales $J_{máx}$ y $J_{mín}$.

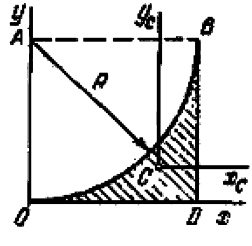
3.16*. Hallar las direcciones de los ejes principales centrales y determinar los momentos de inercia principales.



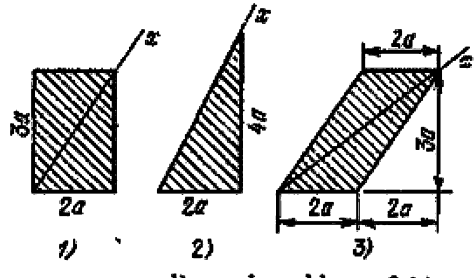
Para el problema 3.16

3.17. Determinar la posición del centro de gravedad del área de una figura acotada por el arco de un cuarto de círculo y dos lados de un cuadrado. Calcular los momentos de inercia J_{x_C}, J_{y_C} y $J_{x_Cy_C}$ respecto a los ejes centrales paralelos a los lados del cuadrado. Hallar también los valores máximo y mínimo de los momentos de inercia axiales centrales y sus correspondientes radios de giro $i_{máx}$ e $i_{mín}$.

3.18. Calcular los momentos de inercia respecto al eje x.



Para el problema 3.17



Para el problema 3.18

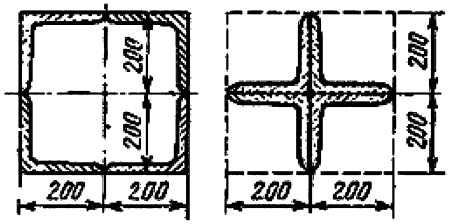
3.19. Para las secciones asimétricas representadas en la figura del problema 3.8 calcular los momentos de inercia centrales J_{x_C}, J_{y_C} y $J_{x_C y_C}$; hallar las direcciones de los ejes principales, así como los momentos de inercia principales y los radios de giro principales $i_{máx}$ e $i_{mín}$.

3.20. Determinar los momentos de inercia del área de un triángulo de altura h respecto a la línea media paralela a la base b.

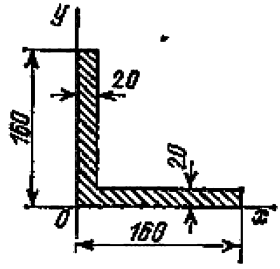
§ 3. Momentos de inercia de las secciones de perfiles laminados

3.21. Haciendo uso de las tablas del surtido de perfiles laminados (véase el anexo), determinar los momentos de inercia centrífugos J_{xy} respecto a los ejes centrales paralelos a las alas de un angular equilátero de 100 × 100 × 10 mm y $J_{x_1 y_1}$ respecto a los ejes que coinciden con las caras exteriores del angular.

3.22. Determinar cuántas veces se diferencian los momentos de inercia centrales J_1 de una sección tubular compuesta de angulares equiláteros de 200 × 200 × 20 mm de los correspondientes momentos de inercia J_2 de una sección en cruz formada por los mismos perfiles.



Para el problema 3.22



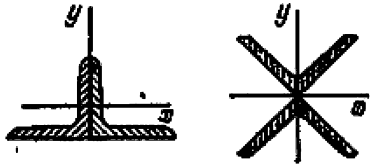
Para el problema 3.23

3.23*. Establecer el error relativo de cálculo de los momentos de inercia respecto a los ejes centrales paralelos a las alas de un angular equilátero de 160 × 160 × 20 mm, al sustituirlo por dos rectángulos sin tomar en consideración los redondeos.

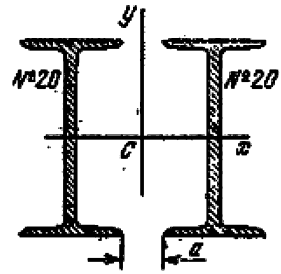
3.24. Con ayuda de los datos del surtido, determinar el valor máximo del momento de inercia axial central $J_{máx}$ de un angular inequilátero de 160 × 100 × 10 mm; se pide también hallar los momentos centrífugos respecto a los ejes centrales paralelos a las alas del angular ($J_{x_C y_C}$) y respecto a los ejes que coinciden con sus caras exteriores ($J_{x_1 y_1}$).

3.25. Calcular y comparar entre sí los valores máximos de los momentos de inercia respecto a los ejes centrales de una sección en forma de T y otra en forma de cruz formadas por dos angulares de 40 × 40 × 5 mm.

3.26. Determinar los momentos de inercia de una sección en doble T N° 10 respecto al eje que pasa por la base de la sección en doble T y respecto al eje central que forma un ángulo de 30° con la horizontal.



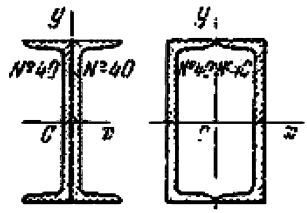
Para el problema 3.25



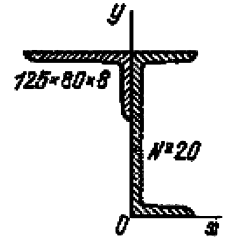
Para el problema 3.27

3.27*. Determinar la distancia a de manera que todos los momentos centrales de inercia de la sección obtenida sean iguales.

3.28. Dos perfiles U N° 40, unidos entre sí por sus paredes, forman una sección doble T. Calcular los momentos principales de inercia de esta sección y compararlos con los correspondientes de una viga en doble T estandarizada de la misma altura. Hallar cómo variarán los momentos de inercia principales, al formar una sección tubular con los perfiles en U (figura de la derecha).



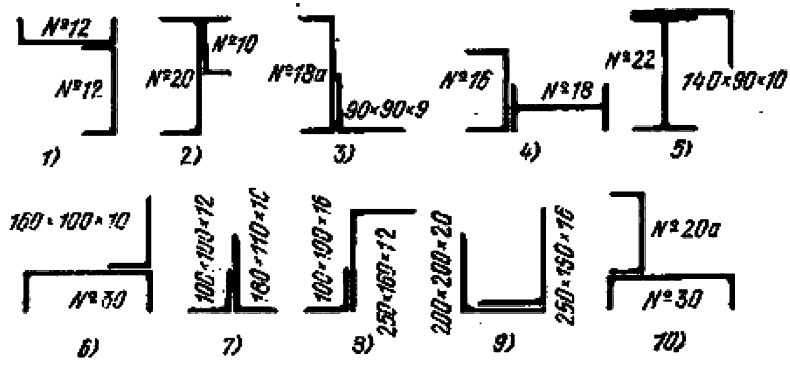
Para el problema 3.28



Para el problema 3.29

3.29. Calcular las coordenadas del centro de gravedad, determinar las direcciones de los ejes principales y hallar los valores de los momentos de inercia principales centrales de una sección formada por un angular inequilátero de 125 × 80 × 8 mm y un perfil U N° 20, tal como está representado en la figura.

3.30. Determinar la posición del centro de gravedad, las direcciones de los ejes principales y calcular los momentos de inercia principales, así como los correspondientes a ellos radios de giro de una sección compuesta.

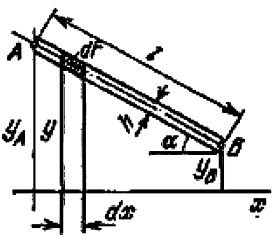


Para el problema 3.30

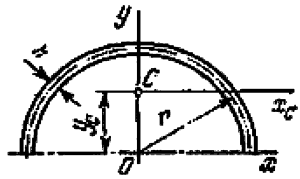
§ 4. Momentos de inercia de secciones de vigas de paredes delgadas

3.31*. Calcular el momento de inercia de la sección de una banda estrecha AB respecto al eje dado x, si se conocen las distancias y_A e y_B de sus extremos al eje, la longitud l de la banda y el ancho h de la misma.

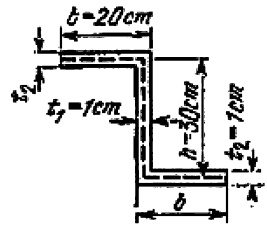
3.32. Calcular los momentos de inercia polar y axial de la sección de un tubo de paredes delgadas cuyo diámetro promedio es igual a d_{pr} y el espesor es h.



Para el problema 3.31



Para el problema 3.33



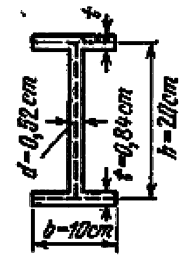
Para el problema 3.34

3.33. Calcular los momentos de inercia principales de la mitad de un anillo estrecho cuyo radio promedio es igual a r y el espesor es h.

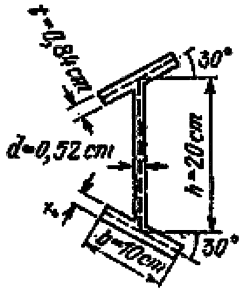
3.34. Hallar las direcciones de los ejes principales centrales y los momentos de inercia principales de una sección en forma de Z de paredes delgadas. Indicar qué sumandos pueden ser despreciados durante el cálculo de las secciones de paredes delgadas.

3.35. Calcular los momentos de inercia principales J_x y J_y de un perfil doble T simétrico de paredes delgadas. Comparar los resultados obtenidos con los valores del surtido para el perfil doble T N° 20.

3.36. Calcular los momentos de inercia principales de un perfil doble T de paredes delgadas y alas inclinadas y compararlos con los resultados obtenidos en el problema 3.35. Hacer las conclusiones necesarias acerca de la influencia de la inclinación de las alas en los valores de los momentos de inercia.

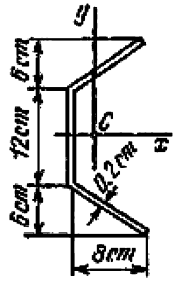


Para el problema 3.35

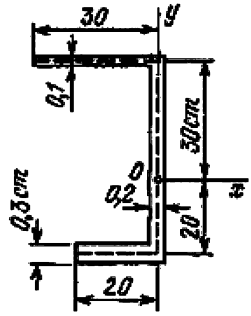


Para el problema 3.36

3.37. Determinar la posición del centro de una sección de paredes delgadas y calcular sus momentos de inercia principales.

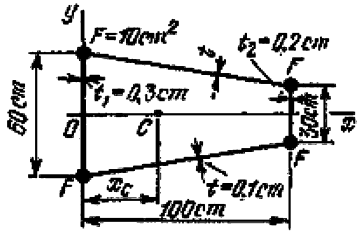


Para el problema 3.37

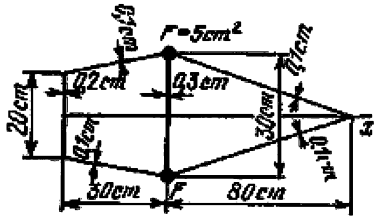


Para el problema 3.38

3.38. Calcular las coordenadas del centro de un perfil asimétrico de paredes delgadas y hallar las direcciones de sus ejes principales y los valores de los momentos de inercia principales.



Para el problema 3.39



Para el problema 3.40

3.39. Hallar la posición del centro de una sección cerrada de paredes delgadas reforzada en los ángulos con áreas concentradas. Calcular los momentos de inercia principales de la sección.

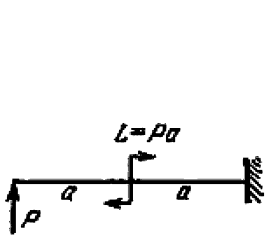
3.40. Calcular el momento de inercia de un perfil de paredes delgadas reforzado en dos puntos con áreas concentradas respecto a su eje de simetría. Hallar el radio de giro i_x de la sección.

CAPITULO 4

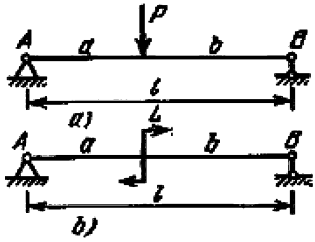
TENSIONES EN VIGAS Y ESTRUCTURAS [1] SOMETIDAS A FLEXIÓN

§ 1. Diagramas de fuerzas interiores

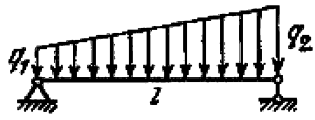
4.1*. Construir los diagramas de esfuerzos cortantes Q y de momentos flectores M de una viga en voladizo sobre el cual actúan una fuerza concentrada P y un momento concentrado $L = Pa$.



Para el problema 4.1



Para el problema 4.2



Para el problema 4.3

4.2. Determinar las reacciones V_A y V_B en los apoyos de una viga sobre dos apoyos y construir los diagramas Q y M, si ésta soporta la acción de: a) una fuerza concentrada P, b) un momento concentrado L.

4.3*. Construir los diagramas Q y M de una viga sobre la cual actúa una carga distribuida de intensidad q. La intensidad q varía a lo largo de la viga en forma lineal. Analizar los casos particulares $q_2 = 0$, $q_1 = q_2 = q$, así como el caso $q_1 < 0$.

4.4. Construir los diagramas Q y M de vigas cargadas con fuerzas concentradas.

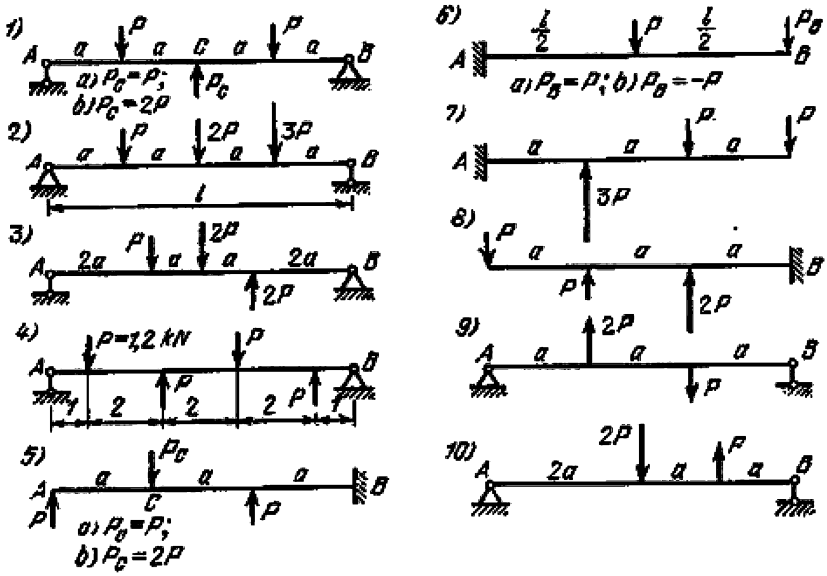
4.5. Construir los diagramas Q y M. Verificar la dependencia diferencial entre Q y M.

4.6*. Determinar las reacciones en los apoyos A y B y construir los diagramas Q y M de una viga con voladizo que descansa sobre dos apoyos sometida a cargas concentradas.

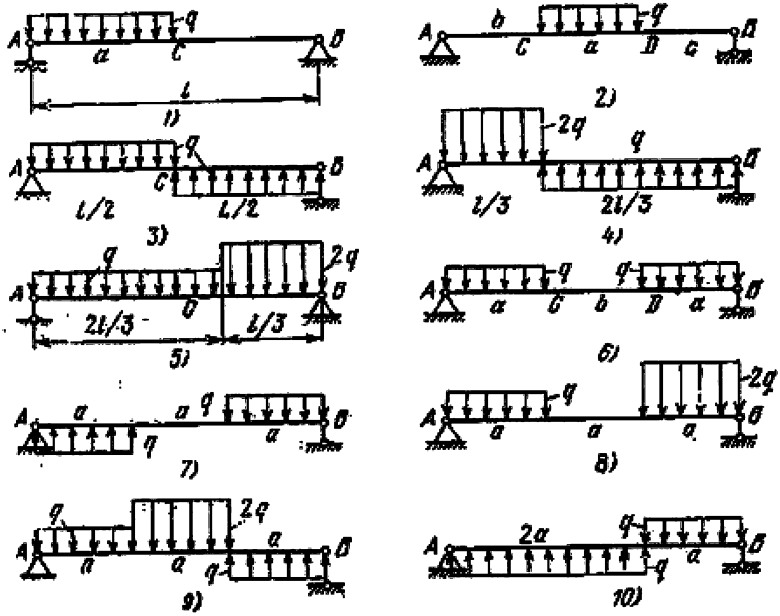
4.7. Hallar las reacciones en los apoyos y construir los diagramas Q y M de una viga con voladizo sometida a la acción de una carga distribuida uniformemente.

---

[1] La curvatura de las barras curvilíneas se considera pequeña (las barras con curvatura grande se examinan en el capítulo 8). No debe considerarse el peso propio de las vigas y las estructuras, salvo se diga lo contrario.



Para el problema 4.4

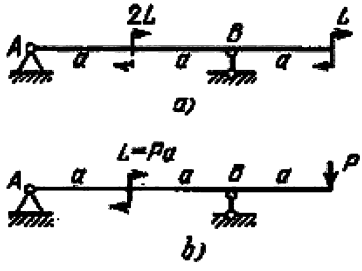


Para el problema 4.5

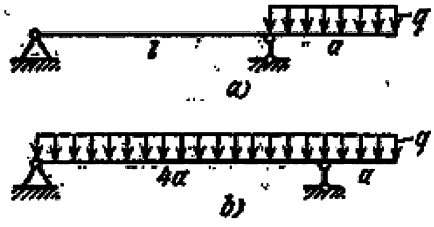
4.8*. Construir los diagramas Q y M de una ménsula sometida a una carga distribuida en forma triangular.

4.9. Determinar las reacciones en los apoyos y construir los diagramas Q y M.

4.10. Para una viga en voladizo, construir los diagramas Q y M.



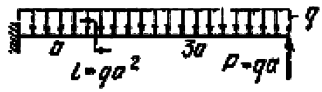
Para el problema 4.6



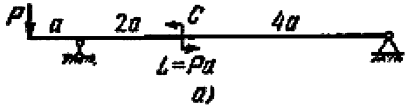
Para el problema 4.7

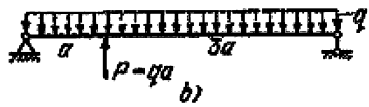
Para el problema 4.8

Para el problema 4.9



Para el problema 4.10





Para el problema 4.11

4.11. Determinar las reacciones en los apoyos y hallar el momento flector máximo.

4.12. Construir los diagramas Q y M de vigas con voladizo. Calcular el momento flector máximo. Verificar la dependencia diferencial entre Q y M.

4.13. Construir los diagramas Q y M de vigas sobre dos apoyos que soportan cargas distribuidas de acuerdo con una ley lineal.

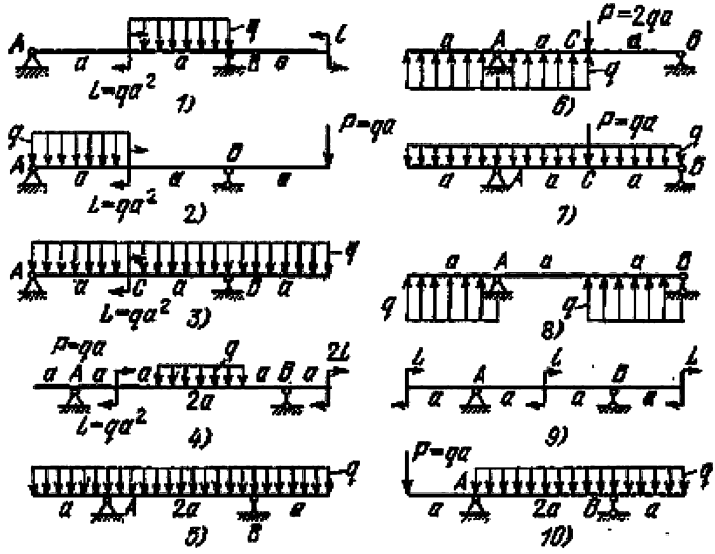
4.14. Se pide lo mismo para vigas con voladizos.

4.15*. Construir los diagramas Q y M.

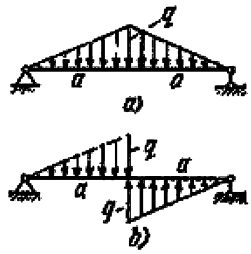
4.16*. Para las vigas representadas en la figura, construir los diagramas Q y M a partir de una carga de momento distribuida de intensidad uniforme m; verificar la dependencia diferencial entre Q y M.

4.17*. Para las vigas con charnelas, construir los diagramas Q y M.

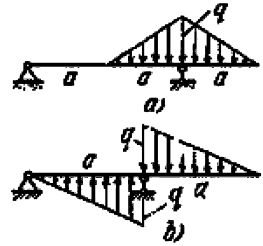
4.18. Determinar el esfuerzo cortante en la charnela y el momento flector máximo.



Para el problema 4.12

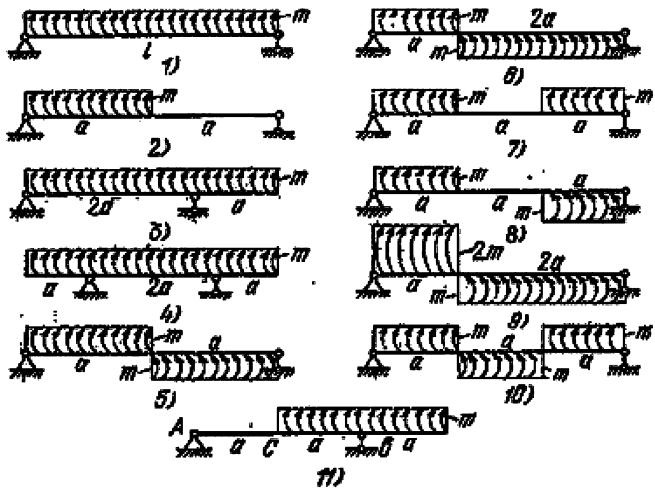


Para el problema 4.13

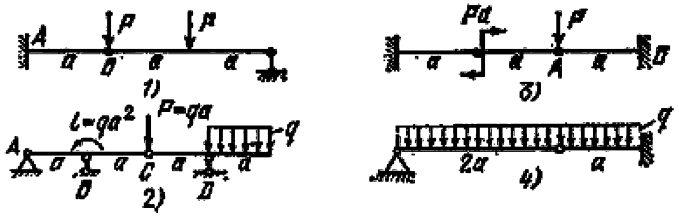


Para el problema 4.14

Para el problema 4.15

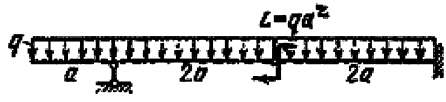


Para el problema 4.16

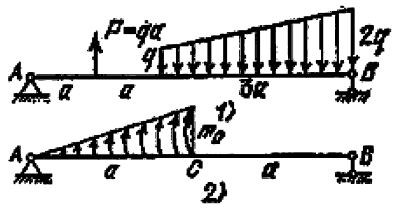


Para el problema 4.17

4.19. Determinar las reacciones en los apoyos. Construir los diagramas Q y M. Determinar el valor y el lugar del momento flector máximo.



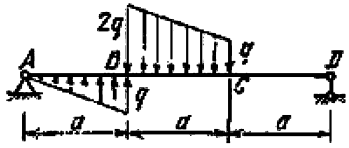
Para el problema 4.18



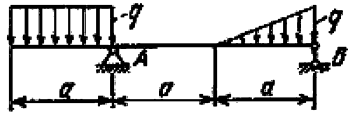
Para el problema 4.19

4.20. Construir los diagramas de los esfuerzos cortantes y de los momentos flectores de una viga sobre dos apoyos que soporta una carga distribuida linealmente.

4.21. Construir los diagramas Q y M de una viga con voladizo.



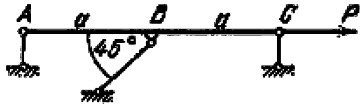
Para el problema 4.20



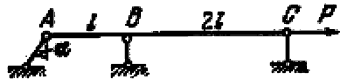
Para el problema 4.21

4.22*. Una viga tiene como apoyo central una barra inclinada. Construir los diagramas N, Q y M de esta viga.

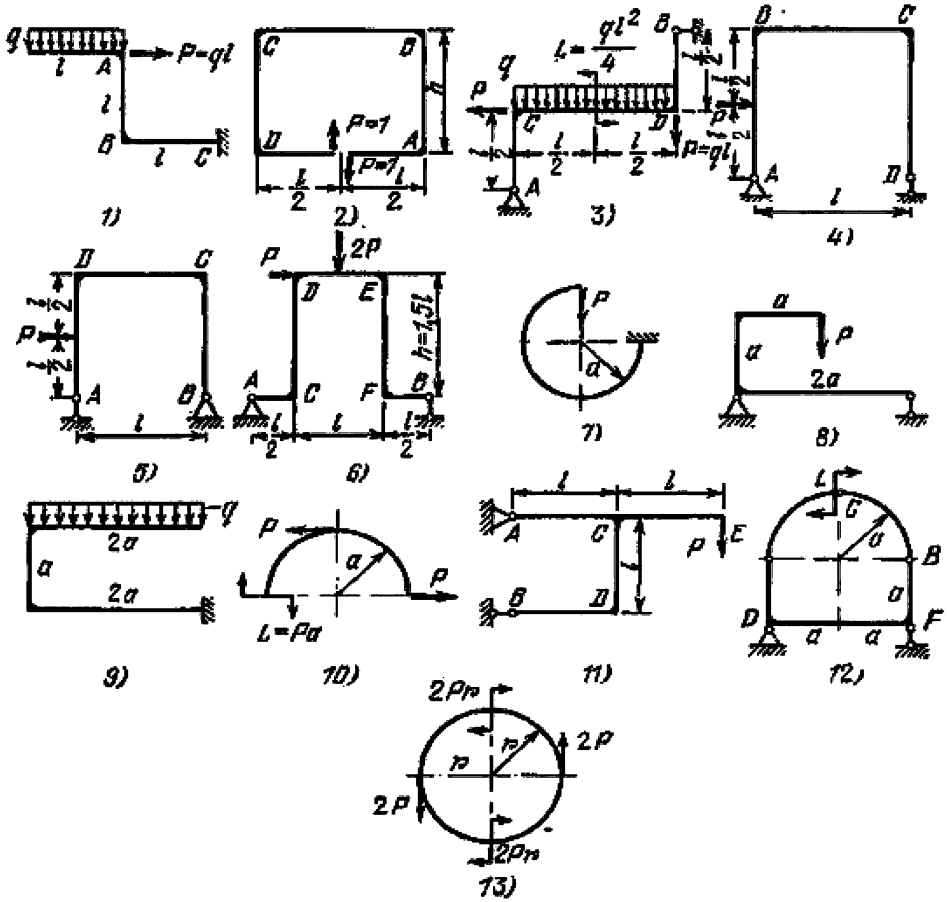
4.23. La viga AC se sostiene por tres barras de apoyo. Determinar las reacciones en los apoyos y construir los diagramas N, Q y M de la viga.



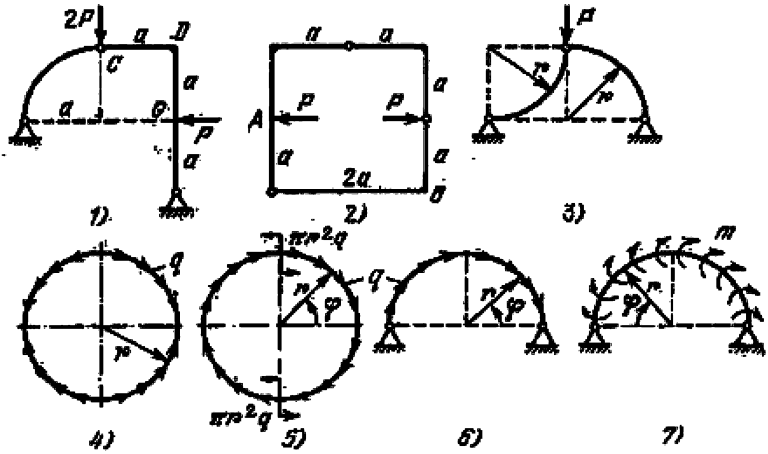
Para el problema 4.22



Para el problema 4.23



Para el problema 4.24



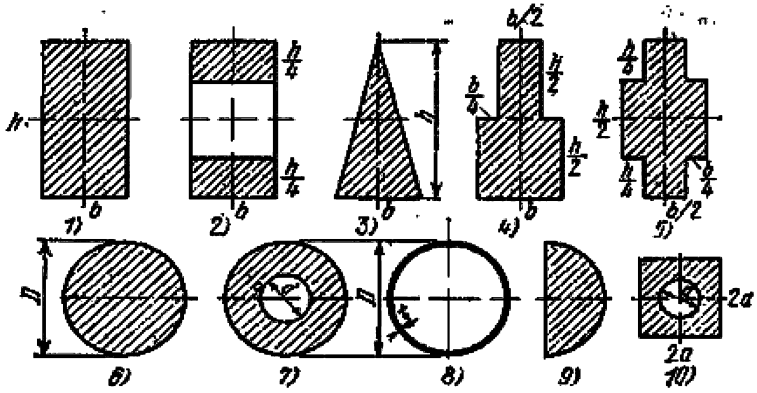
Para el problema 4.25

4.24*. Construir los diagramas N, Q y M de los pórticos [1]).

4.25*. Construir los diagramas N, Q y M de los pórticos [1]). En las variantes *4*, *5* y *6* se da una carga tangencial distribuida uniformemente, cuya intensidad es igual a q. En la variante *7* se da una carga de momento distribuida uniformemente en el plano del pórtico; la intensidad de esta carga es igual a m.

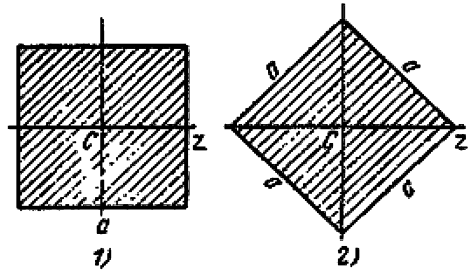
§ 2. Módulos resistentes a la flexión

4.26. Hallar los módulos resistentes a la flexión respecto a los ejes principales z e y de las secciones representadas en la figura.



Para el problema 4.26

4.27. Determinar cómo variará el módulo resistente de una sección cuadrada respecto al eje central horizontal z, si se hace girar la viga a 90° alrededor de su eje.



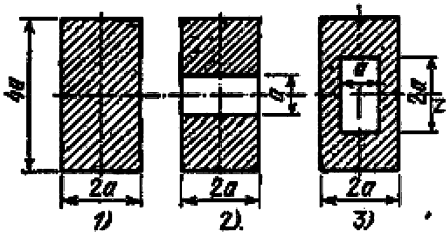
Para el problema 4.27

4.28*. Calcular y comparar entre sí los módulos resistentes respecto al eje central horizontal de las tres secciones representadas en la figura.

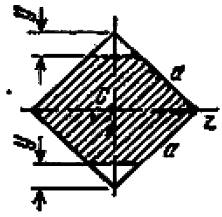
---

[1]) Aunque en el problema se da un anillo cerrado, como consecuencia de la asimetría de la carga, el problema se resuelve con ayuda de las ecuaciones de Estática.

4.29. Hallar la magnitud de y a la que se debe cortar los ángulos de una sección cuadrada para obtener el valor máximo del módulo resistente respecto al eje central horizontal z. ¿En qué por ciento el módulo resistente máximo superará al del cuadrado inicial?



Para el problema 4.28



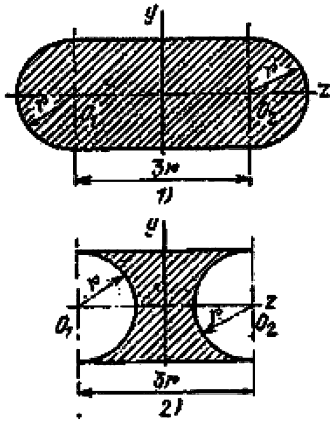
Para el problema 4.29

4.30. Calcular cuántas veces aumentará el módulo resistente de un rectángulo respecto al eje central horizontal, si se aumenta k veces: a) la altura h, b) la anchura b.

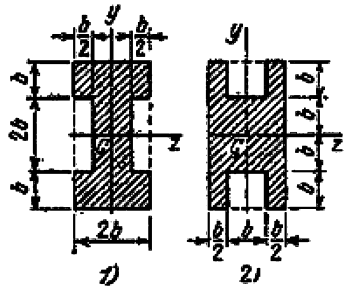
4.31. Calcular y comparar los módulos resistentes de las dos secciones representadas en la figura.

4.32*. Calcular y comparar los módulos resistentes respecto a los dos ejes principales de dos secciones rectangulares debilitadas con recortes de áreas iguales.

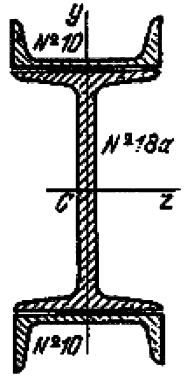
4.33. Determinar las dimensiones de una sección rectangular, cuya relación de lados es $h : b = 2$, una sección circular y una tubular con una relación entre los diámetros interior y exterior $\alpha = d/D = 0{,}9$ de tal modo que sus módulos resistentes W_z sean iguales al de la sección del perfil doble T N° 20. Comparar las áreas de las secciones obtenidas.



Para el problema 4.31



Para el problema 4.32



Para el problema 4.34

4.34. Calcular los módulos resistentes principales de una sección compuesta por un perfil doble T N° 18a y dos perfiles U N° 10.

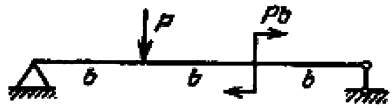
4.35. Calcular los módulos resistentes W_z de las secciones en cruz y tubular compuestas de angulares equiláteros como está representado en la figura del problema 3.22.

§ 3. Tensiones de flexión. Cálculo de secciones

4.36*. Determinar la tensión normal máxima en la sección de una viga, si esta sección tiene forma de rectángulo de base b y altura h. El momento flector en la sección es igual a M.

4.37*. El momento flector M en la sección de una viga de acero ($E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa) es igual a 2,58 kN·m. Determinar el radio de curvatura ρ del eje de la viga. Construir el diagrama de tensiones normales. La sección transversal de la viga es un rectángulo: $b \times h = 3 \times 5$ cm.

4.38*. Definir la magnitud admisible P_{ad} para una viga en doble T N° 30a. La tensión admisible $[\sigma] = 160$ MPa. Viene dado: $b = 2$ m.



Para el problema 4.38

4.39. La viga consta de un perfil doble T N° 20. Determinar las tensiones normales en los puntos distantes de la capa neutral a 5 cm y 10 cm, si el momento flector es igual a 15 kN·m.

4.40. Determinar la tensión normal máxima en un tubo circular de diámetros exterior $D = 5$ cm e interior $d = 4$ cm, si el momento flector es igual a $M = 1{,}5$ kN·m.

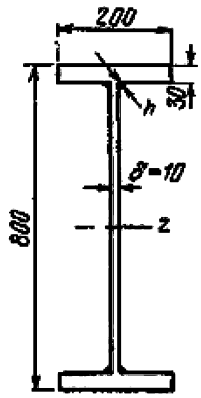
4.41. Calcular la tensión normal máxima en una viga sobre apoyos articulados con un vano $l = 2$ m sobre la que actúa una carga $P = 15$ kN en la sección media. La viga está hecha de un perfil doble T N° 12.

4.42. Seleccionar el número de un perfil doble T para la viga del problema anterior, si $[\sigma] = 190$ MPa.

4.43*. Definir las tensiones tangenciales y normales máximas en una viga sobre apoyos articulados con un vano $l = 1{,}5$ m de sección rectangular $b \times h = 4 \times 6$ cm que soporta en su sección media un momento concentrado $L = 7{,}2$ kN·m.

4.44. Una viga doble T N° 16 de longitud $l = 1{,}5$ m, empotrada por un extremo, soporta una fuerza igual a 10 kN en el otro. Determinar las tensiones tangenciales y normales máximas en la sección más peligrosa de la viga.

4.45. Viene dado: $Q = 1$ kN, $M = 1$ kN·m, la sección de la viga es rectangular, $b = 5$ cm, $h = 12$ cm. Determinar las tensiones tangenciales y normales en la sección transversal de la viga a la distancia de 3 cm del eje neutro de la sección.



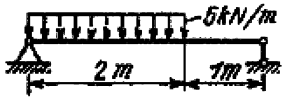
Para el problema 4.46

4.46. a) Definir el espesor h de un cordón de soldadura de una viga doble T. El esfuerzo cortante en la sección de la viga es $Q = 300$ kN. La tensión admisible en el material de la soldadura es igual a $[\tau] = 50$ MPa.

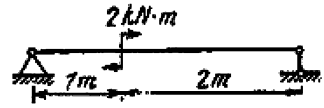
b) El cordón de soldadura continuo fue sustituido por otro discontinuo de espesor $h = 1$ cm. La longitud de los tramos soldados es igual a $l = 4$ cm. Determinar el paso e de los tramos del cordón discontinuo.

4.47. Seleccionar el número del perfil U según la tabla del surtido de perfiles laminados. La tensión admisible es $[\sigma] = 160$ MPa.

4.48. Calcular la sección rectangular de una viga con una razón de lados igual a $b/h = 2/3$. Viene dado: $[\sigma] = 10$ MPa.



Para el problema 4.47



Para el problema 4.48

4.49. Elegir el número de una viga de doble T según el surtido de perfiles laminados. El momento flector $M = 10$ kN·m, la tensión admisible $[\sigma] = 150$ MPa.

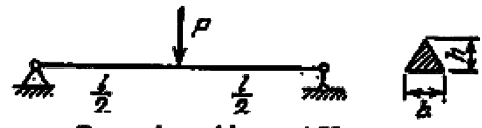
4.50. Determinar el diámetro de la sección transversal circular de una viga siendo la tensión admisible igual a $[\sigma] = 10$ MPa.

4.51. Calcular la sección cuadrada de una cartola de 1 m de longitud cargada en su extremo con una fuerza igual a 1 kN, si la tensión admisible es $[\sigma] = 12$ MPa.

4.52. Resolver el problema anterior en el caso de un tubo circular con una relación entre el diámetro interior y el exterior $\alpha = d/D$ igual a 0,7 cuando $[\sigma] = 150$ MPa.

4.53*. Determinar la carga admisible para una viga de hierro fundido de sección triangular de altura $h = 5$ cm y ancho de base

Para el problema 4.50

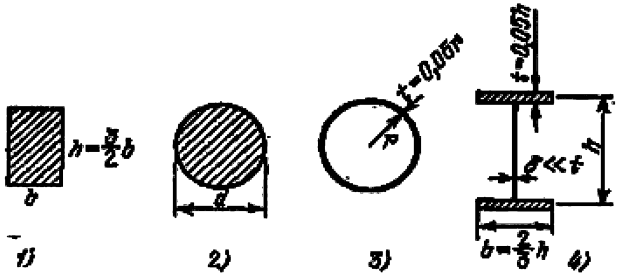


Para el problema 4.53

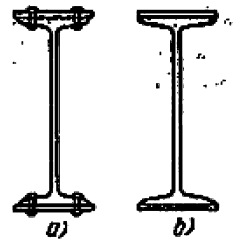
$b = h$ si el factor de seguridad es igual a $n = 3$ y el límite de resistencia del hierro fundido a tracción es $\sigma_{r,tr} = 200$ MPa y a compresión es $\sigma_{r,comp} = 1\,000$ MPa. La longitud de la viga es igual a $l = 1$ m.

4.54. Determinar los momentos flectores admisibles de un perfil de acero doble T N° 12 en los dos planos principales de la viga cuando $[\sigma] = 160$ MPa.

4.55*. Calcular las dimensiones de las secciones de la forma indicada para el caso cuando la tensión máxima es igual a $\sigma = 160$ MPa. El momento flector $M = 0{,}64$ kN·m. Comparar las áreas de las secciones con el área menor.



Para el problema 4.55



Para el problema 4.56

4.56*. a) Un perfil doble T N° 60 está reforzado con bandas $B \times \delta = 200 \times 10$ mm fijadas a sus alas con remaches de diámetro $d = 2$ cm. Determinar el paso e de los remaches. Las tensiones admisibles son: la de tracción y compresión de las bandas $[\sigma] = 130$ MPa; la de cizallamiento de los remaches $[\tau] = 80$ MPa, la de aplastamiento de los remaches, las bandas y el perfil doble T $[\sigma_{ap}] = 250$ MPa. El esfuerzo cortante Q en la sección de la viga es igual a 300 kN.

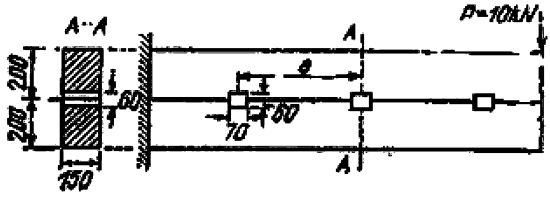
b) Los remaches se sustituyen por cordón de soldadura. Determinar el grosor h del cordón. La tensión admisible en el material de la soldadura al cizallamiento es $[\tau] = 50$ MPa.

c) El cordón continuo se sustituye por uno discontinuo. Determinar el paso e del cordón discontinuo, si su grosor es igual a 5 mm y la longitud es de 3 cm.

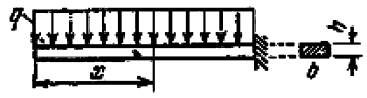
4.57. Determinar el paso e de las chavetas en una viga en voladizo compuesta. La dimensión de una chaveta es 60×70 mm. Las tensiones admisibles son: la de aplastamiento de la chaveta $[\sigma]_{ap} = 5{,}0$ MPa, la de cizallamiento de la chaveta y la barra $[\tau] = 1$ MPa.

4.58*. a) Una viga en voladizo se proyecta equirresistente a la flexión. Su sección transversal es rectangular de altura constante h. Definir la ley de la variación del ancho $b = b(x)$ de la sección. La tensión normal máxima en cada sección de la viga debe ser igual a la admisible $[\sigma]$.

b) Resolver el problema cargando el extremo del voladizo con una fuerza concentrada P.



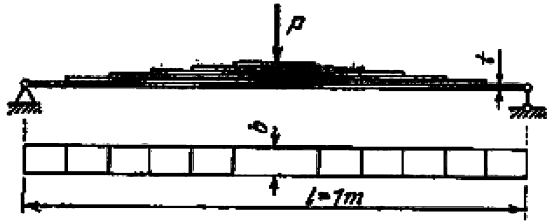
Para el problema 4.57



Para el problema 4.58

4.59. Una viga en voladizo es de sección rectangular $b \times h$ (b es constante) y soporta una carga uniforme de intensidad q repartida en toda su longitud. ¿Según qué ley debe variar la altura h de la sección para que las tensiones normales máximas sean constantes a lo largo de la viga?

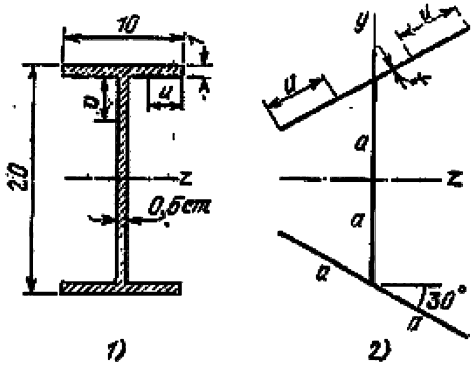
4.60. Determinar el valor admisible de la carga P que actúa sobre una ballesta cuando $[\sigma] = 300$ MPa. La sección de la hoja es $b \times t = 10 \times 1$ cm; el número de hojas es $n = 6$.



Para el problema 4.60

§ 4. Vigas de paredes delgadas. Centro de flexión. Tensiones principales

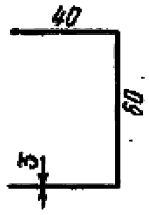
4.61*. a) Construir el diagrama de tensiones tangenciales τ de la sección transversal de una viga de perfil en doble T. El esfuerzo cortante en la sección es igual a $Q = 20kN$.



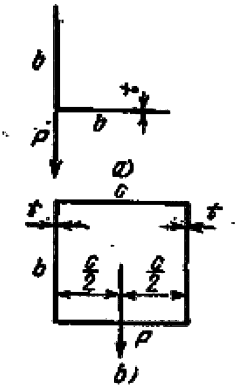
Para el problema 4.61

b) Construir el diagrama τ de un perfil en doble T con alas inclinadas que soporta flexiones en los planos horizontal y vertical. El grosor t de las paredes es constante.

4.62. Construir el diagrama de tensiones tangenciales de flexión τ de un perfil en U que soporta una carga vertical, si $Q = 3$ kN. Hallar el centro de flexión. Las dimensiones están dadas en mm.



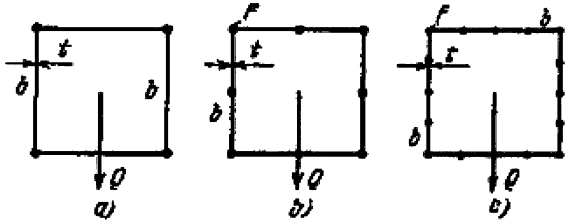
Para el problema 4.62



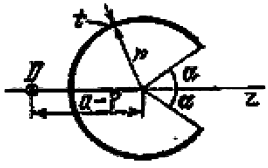
Para el problema 4.63

4.63*. Construir el diagrama de tensiones tangenciales: a) de una viga en voladizo de paredes delgadas de perfil angular cargada en el extremo con una fuerza P, b) lo mismo para una viga de sección tubular.

4.64*. Determinar las tensiones tangenciales en una viga de sección tubular de paredes delgadas que posee trancaniles longitudinales equidistantes entre sí cuyas áreas de secciones F son iguales. Al hacer los cálculos considerar que las paredes no perciben tensiones normales en la sección transversal de la viga.



Para el problema 4.64

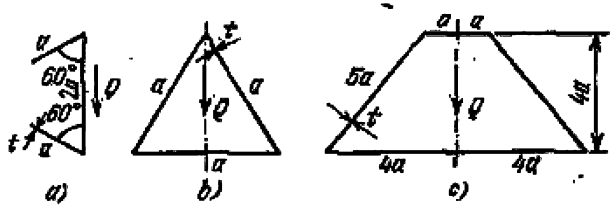


Para el problema 4.65

4.65*. Determinar la posición del centro de flexión de una viga de paredes delgadas de perfil abierto que representa de sí el arco de una circunferencia.

4.66*. Construir el diagrama de tensiones tangenciales de la sección de un tubo circular de paredes delgadas en flexión.

4.67*. Construir el diagrama τ de una sección con paredes inclinadas que se encuentra en flexión.



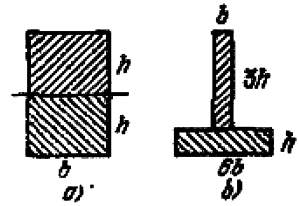
Para el problema 4.67

4.68*. El esfuerzo cortante en la sección de una viga en doble T N° 16 es igual a 20 kN. Determinar las tensiones principales en la capa neutra.

4.69. Para las condiciones del problema anterior, determinar las tensiones principales en la pared de la viga a 5 cm de distancia de la capa neutral. El momento flector en la sección es igual a 20 kN·m.

4.70. Una viga en voladizo está compuesta de dos vigas encoladas. El límite de resistencia de la cola al cizallamiento es $\tau_r = 0{,}5$ MPa. Determinar la carga admisible P de acuerdo con la resistencia del encolado, considerando que el factor de seguridad es igual a $n_r = 2$. La unión se considera rígida.

Para el problema 4.70



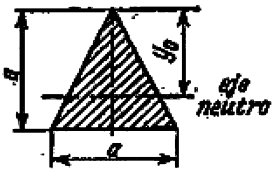
Para el problema 4.71

4.71*. Una viga está compuesta de dos barras unidas entre sí rígidamente en toda la superficie de contacto. El módulo de elasticidad del material de la barra superior es dos veces mayor que el del material de la barra inferior: $E_2 = 2E_1$. Construir el diagrama de tensiones normales σ en la sección transversal de la viga compuesta. El momento flector en la sección es igual a M.

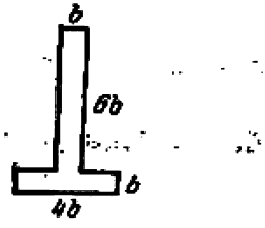
4.72*. Determinar las tensiones principales a una distancia $r/2$ del eje neutro de un tubo de paredes delgadas de radio r. El momento flector y el esfuerzo cortante en la sección transversal del tubo son iguales a M y Q. El espesor t de la pared del tubo, en comparación con su radio, es pequeño.

§ 5. Cálculo según el estado límite[1])

4.73*. Una viga de longitud $l = 1$ m de sección triangular, apoyada en sus extremos, soporta en el plano de simetría una carga uniformemente distribuida. Hallar la intensidad límite q_{lim} de la carga, si el límite de fluencia del material es igual a $\sigma_{fl} = 240$ MPa. Comparar el resultado con la carga q_{fl} correspondiente al caso en que la tensión alcanza el límite de fluencia σ_{fl} solamente en el punto superior de la sección.



Para el problema 4.73



Para el problema 4.77

4.74*. Hallar el momento flector máximo de una viga de acero de perfil en doble T laminado estandartizado N° 20. Considerar el límite de fluencia igual a 240 MPa.

4.75*. Determinar el momento flector admisible de la viga del problema anterior considerando que el factor de seguridad es igual a $n_{fl} = 1{,}5$. Comparar este momento con el momento flector admisible calculado de acuerdo con la tensión admisible en el punto peligroso con el mismo factor de seguridad.

4.76. Comparar el valor del coeficiente k_{lim} del incremento de la capacidad de carga de cálculo al pasar del cálculo según las tensiones admisibles al cálculo según las cargas límites, obtenido en el problema anterior, con el valor de k_{lim} para secciones circular y cuadrada. ¿De qué modo se caracteriza la racionalidad de la forma de la sección por el valor de k_{lim}?

4.77*. Hallar la posición del eje neutro de una viga de sección doble T en éstado límite.

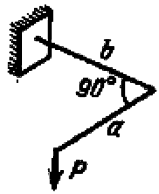
4.78. Para la sección T representada en la figura del problema 4.77 calcular, según el estado límite, la magnitud b por los datos siguientes: momento flector $M = 1$ kN·m, $\sigma_{fl} = 240$ MPa, $n_{fl} = 1{,}5$.

---

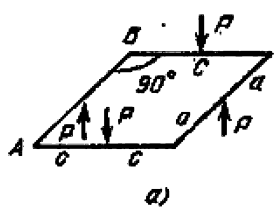
[1]) Tomar el diagrama de tracción—compresión de Prandtl (sin consolidación).

§ 6. Estructuras plano-espaciales [1]

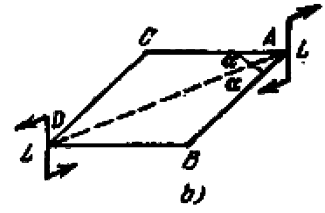
4.79*. Un voladizo rectangular horizontal soporta en su extremo una fuerza horizontal P. Construir los diagramas M, M_{tor} y Q.



Para el problema 4.79



a)



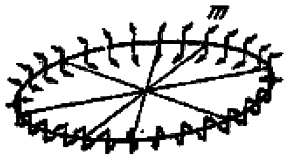
b)

Para el problema 4.80

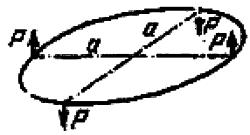
4.80*. Construir los diagramas de momentos flectores M y de momentos torsores M_{tor} de: a) una estructura cuadrada, b) una estructura de forma rombal [2]).

4.81*. Determinar el momento flector en la sección de un anillo que soporta un momento torsor distribuido uniformemente de intensidad m.

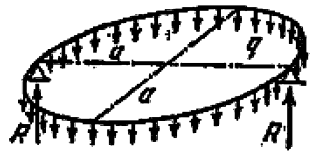
4.82*. Construir los diagramas M, M_{tor} y Q de un anillo dispuesto horizontalmente y cargado verticalmente con cuatro fuerzas P concentradas e iguales.



Para el problema 4.81



Para el problema 4.82



Para el problema 4.83

4.83*. Construir los diagramas M, M_{tor} y Q de un anillo que soporta una carga de intensidad q repartida uniformemente por el anillo.

4.84*. Demostrar que en una estructura plano-espacial curvilínea, en ausencia de una carga de torsión distribuida, la derivada del momento torsor respecto al ángulo central es igual al momento flector.

4.85*. Construir los diagramas de los momentos torsores y flectores, así como de los esfuerzos cortantes de un voladizo circular con

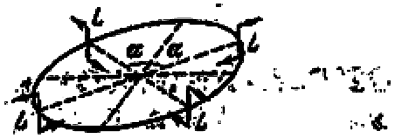
---

[1]) Bajo este título condicional se tienen en cuenta las estructuras planas cargadas perpendicularmente a sus planos. Aquí se examinan solamente problemas estáticamente determinados. Los problemas estáticamente indeterminados se estudian en el cap. 5.

[2]) Aunque se examinan estructuras cerradas, a causa de la simetría de la carga, los problemas se resuelven por los métodos de la estática, igual que los problemas 4.81—4.83, 4.86 y 4.87.

el ángulo central igual a 90° cargado con una fuerza concentrada P y un momento concentrado L.

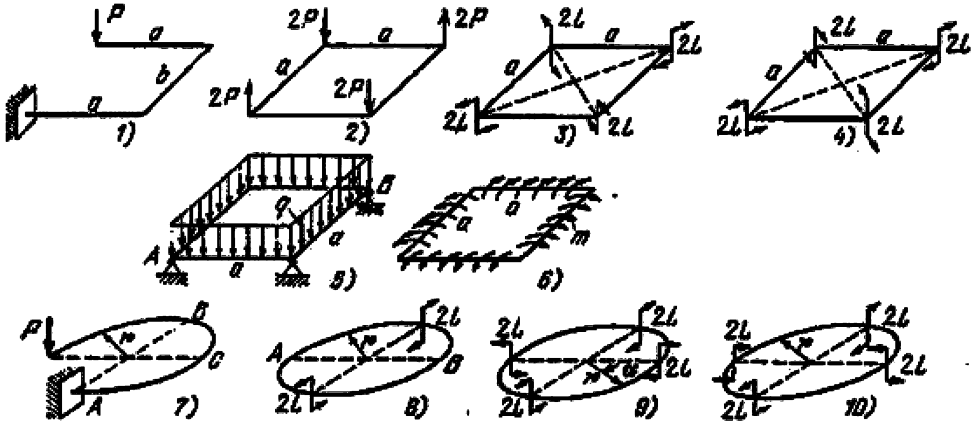
Para el problema 4.85



Para el problema 4.86

4.86*. Construir los diagramas de los momentos torsores y flectores, así como de los esfuerzos cortantes de un anillo cargado simétricamente con cuatro momentos concentrados L los cuales se equilibran mutuamente.

4.87. Construir los diagramas de los momentos flectores M y torsores M_{tor}, así como de los esfuerzos cortantes Q.



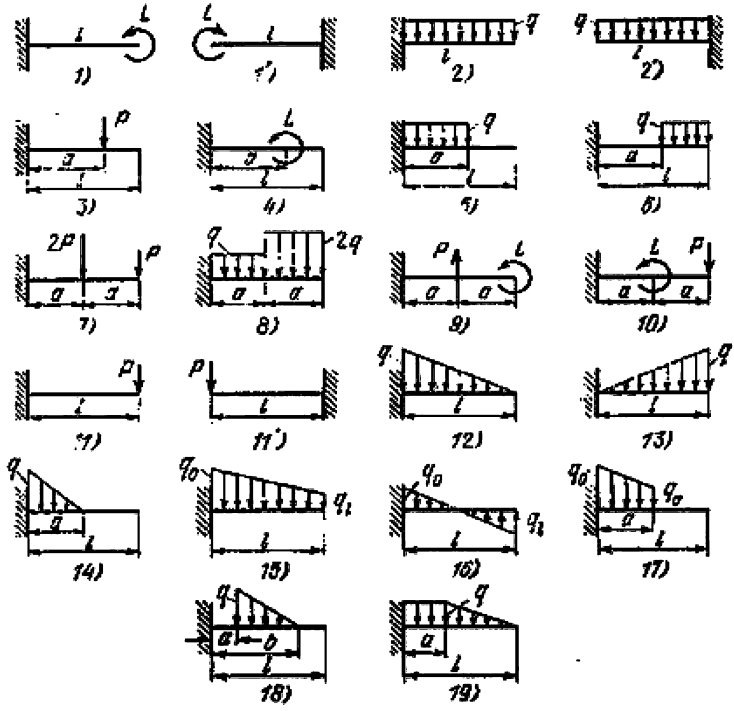
Para el problema 4.87

CAPÍTULO 5

DESPLAZAMIENTOS EN VIGAS Y ESTRUCTURAS SOMETIDAS A FLEXIÓN

§ 1. Vigas de secciones constantes estáticamente determinadas

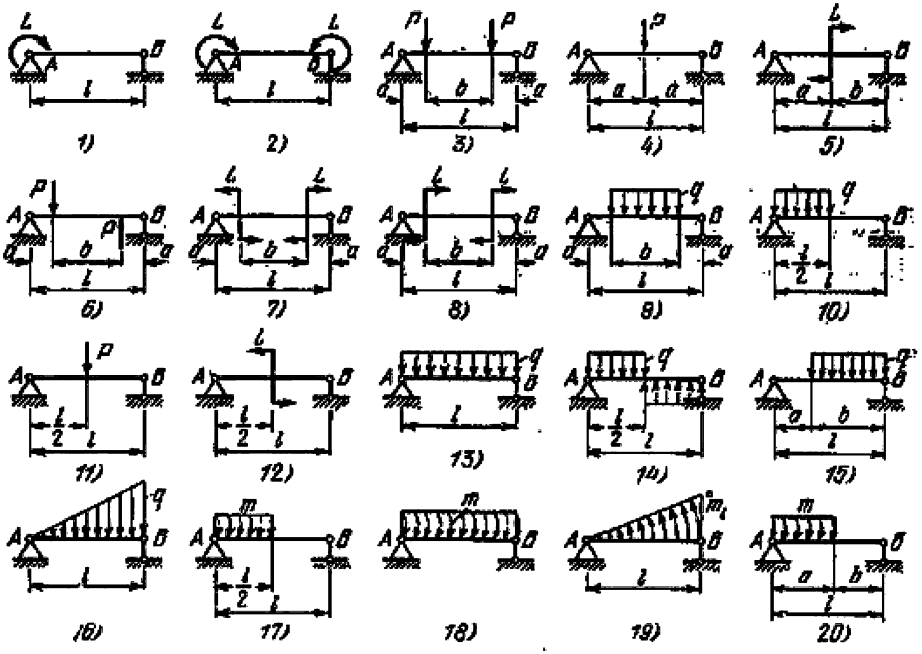
5.1*. Obtener las expresiones del ángulo de giro θ (x) y de la flecha v (x) en la sección situada a una distancia x del extremo izquierdo de una viga en voladizo y obtener los valores de θ y v en el extremo libre de la misma.



Para el problema 5.1

5,2. Determinar la flecha en el extremo de un voladizo de duraluminio (fig. 11 del problema 5.1) de perfil en U Pr. 106 N° 3 (J = = 1,185 cm^4). La longitud del voladizo es l = 50 cm, E = 7,5 × × 10^4 MPa, P = 150 N.

5.3*. Obtener la expresión del ángulo de giro de la sección $\theta(x)$ y de la flecha $v(x)$. Determinar θ y v en el centro del vano y los ángulos de giro θ_A y θ_B en las secciones extremas.



Para el problema 5.3

5.4. Determinar la flecha en el centro de la viga de duraluminio (la fig. 11 del problema 5.3) hecha de perfil en U con las alas reforzadas Pr. 107 N° 5 ($J = 2{,}365$ cm^4). La longitud de la viga es $l = 50$ cm, $E = 7{,}5 \cdot 10^4$ MPa, $P = 0{,}8$ kN.

5.5. Determinar la flecha en el centro de una viga que soporta una carga uniformemente distribuida (fig. 13 del problema 5.3). La sección de la viga es rectángular; $b = 10$ cm, $h = 20$ cm, $l = 3$ m, $E = 10^4$ MPa, $q = 4$ kN/m.

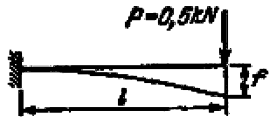
5.6. Hallar la flexión en el centro de la viga y los ángulos de giro en las secciones extremas (fig. 1 del problema 5.3). La sección de la viga es circular; $d = 2$ cm, $l = 1$ m, $E = 7 \cdot 10^4$ MPa, $L = 100$ N·m.

5.7*. Elegir el número del perfil en U de acero a partir de las condiciones de resistencia y rigidez. La tensión admisible es $[\sigma] = 160$ MPa. La flecha admisible es $[f] = l/400$. Comparar los pesos de la viga obtenidos según las condiciones de resistencia y de rigidez; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $l = 2$ m.

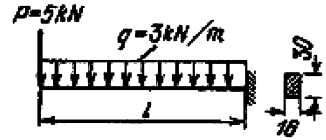
5.8. Una ménsula de madera de sección rectangular y de longitud $l = 2$ m soporta una carga continua uniformemente distribuida $q = 2$ kN/m. Considerando que la altura de la sección de la ménsula es igual a 20 cm, determinar el ancho b de la sección, si la flecha no debe ser mayor de $l/400$; $E = 1{,}2 \cdot 10^4$ MPa. Controlar la

tensión. Determinar el ancho b de la sección, basándose en la condición de resistencia y considerando $[\sigma] = 10$ MPa; definir en cuánto será más ligera la ménsula en el último caso.

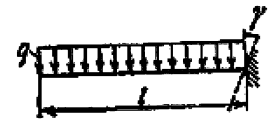
5.9. a) Determinar la flecha en el extremo de la viga en voladizo, si el módulo de elasticidad del material es igual a $E = 1{,}2 \cdot 10^4$ MPa, $l = 3$ m, b) determinar el ancho b de la viga basándose en la condición de que la flecha no sea mayor de $l/200$. Definir b a partir de la condición de resistencia, considerando $[\sigma] = 15$ MPa.



Para el problema 5.7



Para el problema 5.9

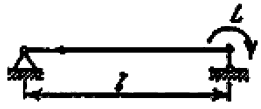


Para el problema 5.10

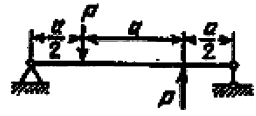
5.10*. Escribir la expresión de la flecha y del ángulo de giro en el extremo de la ménsula, teniendo en cuenta que el empotramiento puede girar a un ángulo pequeño γ (véase la figura).

5.11*. Determinar el lugar de la viga en el que la flecha es máxima $v_{máx}$. Escribir la expresión de $v_{máx}$. Compararla con la flecha en el centro de la viga.

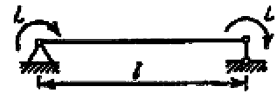
5.12*. Determinar las flechas y los ángulos de giro en los apoyos, en el centro de la viga y en los puntos de aplicación de las fuerzas P.



Para el problema 5.11



Para el problema 5.12



Para el problema 5.13

5.13. Construir los diagramas Q, M, θ y v.

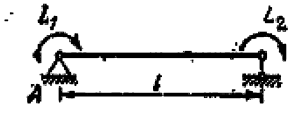
5.14. Determinar el punto de inflexión del eje de una viga deformada y los ángulos de giro de las secciones de la viga junto al apoyo izquierdo (A) y en el punto de inflexión. Viene dado: $L_2 = 2L_1$.

5.15. Un tubo circular de duraluminio de sección 50 × 44 mm está dispuesto horizontalmente sobre dos apoyos. Determinar la luz admisible máxima l basándose en las condiciones de que la flecha debida al peso propio no resulte mayor de $l/200$. El peso específico del material es $\gamma = 2{,}6 \cdot 10^4$ N/m^3. El módulo de elasticidad es $E = 7{,}5 \cdot 10^4$ MPa.

5.16. Al aplicar la carga $P = 4$ kH en el centro de una tabla de pino que descansa libremente sobre dos apoyos, ha sido medida la flecha bajo la carga resultando aquella igual a $f = 2{,}00$ mm. Determinar el módulo de elasticidad del material.

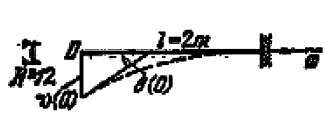
5.17. Sobre una viga de acero en doble T actúa una carga distribuida uniformemente. Determinar la intensidad q de la misma, si por medio de una medición ha sido establecido que la tangente al eje

de la viga deformada forma, en el extremo de ésta, con el eje Ox un ángulo $\theta(0) = 6{,}49 \cdot 10^{-3}$. Considerar $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.



Para el problema 5.14

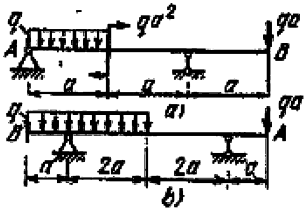
Para el problema 5.16



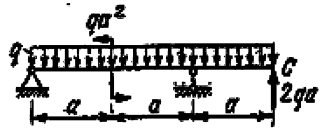
Para el problema 5.17

5.18*. Determinar la flecha de la viga en el punto B de su eje y el ángulo de giro en la sección A.

5.19*. Determinar la flecha y el ángulo de giro de la viga en la sección C.



Para el problema 5.18

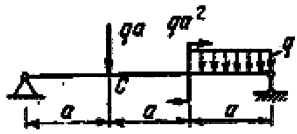


Para el problema 5.19

5.20. Determinar la flecha de la viga en los puntos C y D de su eje.

5.21. Hallar la flecha de la viga en el punto C.

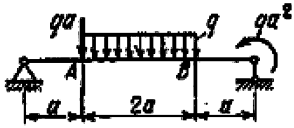
Para el problema 5.20



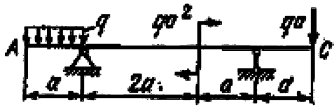
Para el problema 5.21

5.22*. Hallar el giro de la sección B respecto a la sección A de la viga, así como la flecha en el punto B.

5.23. Determinar las flechas y los ángulos de giro de la viga en los extremos de los voladizos A y C.

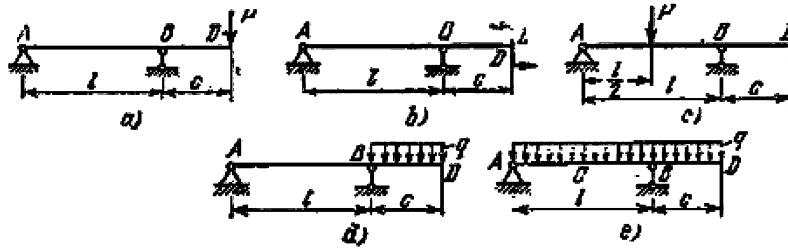


Para el problema 5.22



Para el problema 5.23

5.24*. Componer las expresiones de $\theta(x)$ y $v(x)$. Hallar los valores de θ y v en el centro del vano (θ_C y v_C) y en el extremo del voladizo (θ_D y v_D), así como θ junto a los apoyos (θ_A y θ_B).

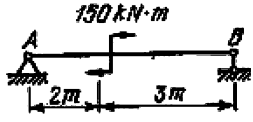


Para el problema 5.24

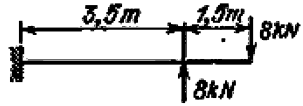
5.25. Construir los diagramas de los ángulos de giro θ y de las flechas v; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $J = 9 \cdot 10^3$ cm^4.

5.26. Determinar las flechas y los ángulos de giro de una ménsula en las secciones donde tiene aplicadas las cargas; $E = 10^4$ MPa, $J = 1{,}6 \cdot 10^4$ cm^4.

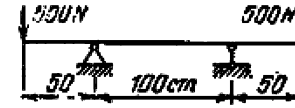
5.27. Determinar el radio de curvatura de la parte media de la viga. La sección transversal de ésta es un cuadrado cuyo lado es igual a 2,5 cm; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.



Para el problema 5.25



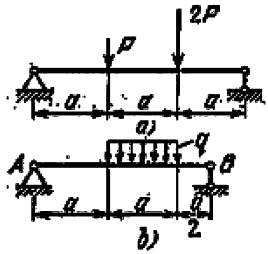
Para el problema 5.26



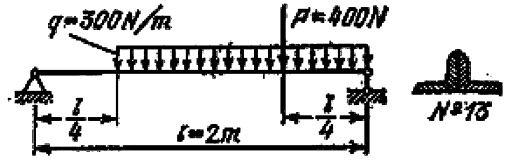
Para el problema 5.27

5.28. Determinar la flecha en el centro de la viga.

5.29. Determinar los ángulos de giro junto a los apoyos (véase la fig. del problema 5.28, *b*).



Para el problema 5.28

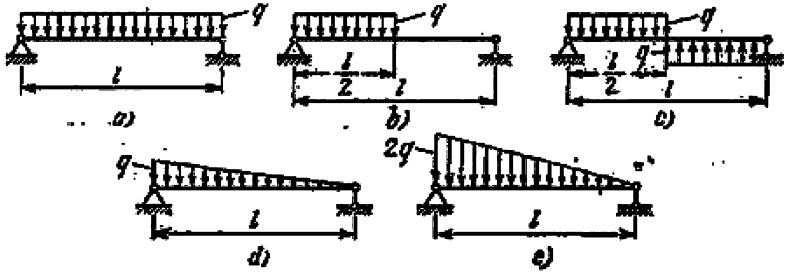


Para el problema 5.30

5.30. Una viga de duralumínio compuesta de dos angulares prensados Pr. 100 N° 13 (véase la tabla 10 del anexo) soporta la carga representada en la figura. Determinar la flecha v_e en el centro de la

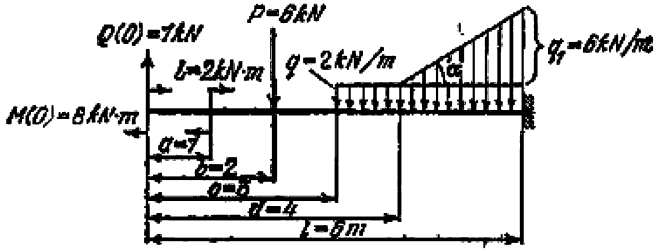
viga; $E = 7{,}5 \cdot 10^4$ MPa. ¿Cuál debe ser el momento de inercia de la sección de la viga para que la flecha v_{med} no sea mayor de $l/200$?

5.31. Basándose en el principio de composición de la acción de las fuerzas, comparar las flechas en el punto medio del vano de vigas iguales $a - e$. Definir cuántas veces la flecha máxima de la viga a es mayor que la flecha máxima de la viga c.



Para el problema 5.31

5.32*. Construir los diagramas $\theta(x)$ y $v(x)$ de una ménsula de sección constante. Calcular $\theta(0)$ y $v(0)$. El momento de inercia de la sección transversal de la ménsula es $J = 4 \cdot 10^4$ cm^4; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

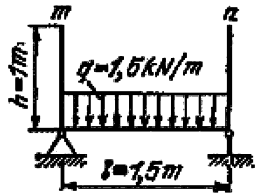


Para el problema 5.32

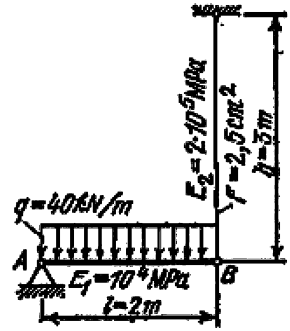
5.33. Una viga que descansa sobre dos apoyos está compuesta de dos angulares con un momento de inercia total de la sección compuesta igual a $J = 7{,}5$ cm^4. Unos soportes de altura $h = 1$ m están rígidamente fijados en los extremos de la viga. Determinar el acercamiento δ de los extremos m y n de los soportes como resultado de la acción de una carga de intensidad $q = 1{,}50$ kN/m distribuida uniformemente a lo largo de la viga; $l = 1{,}5$ m, $E = 7{,}5 \cdot 10^4$ MPa.

5.34*. El extremo izquierdo de una barra de madera de sección cuadrada igual a 20 × 20 cm descansa sobre el apoyo fijo A. El extremo derecho de la barra está suspendido por medio de una barra de acero de sección $F = 2{,}5$ cm^2. Escribir las ecuaciones de los diagramas de los ángulos de giro θ y de las flechas v de la barra.

Determinar la flecha máxima, así como las flechas en el centro del vano y en el punto B.



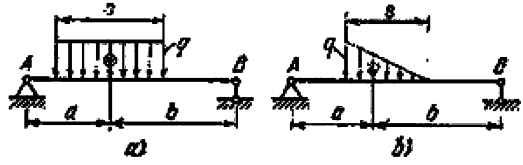
Para el problema 5.33



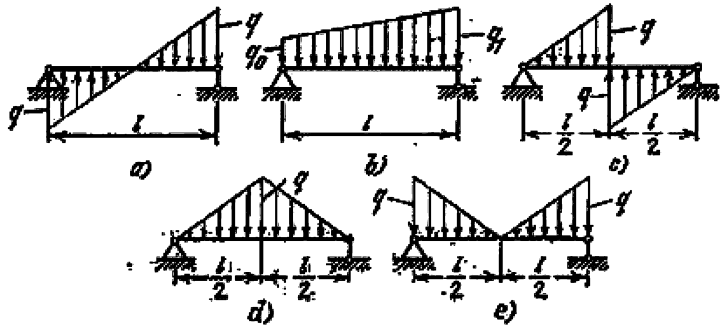
Para el problema 5.34

5.35. Determinar los ángulos de giro de los extremos.

5.36. Determinar los ángulos de giro de los extremos y la flecha en el centro de la viga.



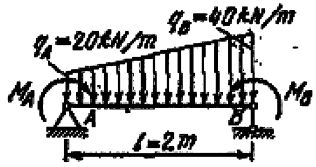
Para el problema 5.35



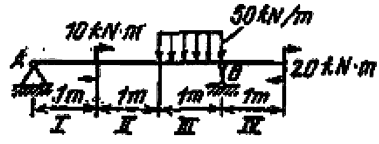
Para el problema 5.36

5.37. Una viga de acero está cargada en los extremos con los momentos $M_A = 10$ kN·m y $M_B = 20$ kN·m y en el vano con una carga linealmente distribuida. Hallar el ángulo de giro $\theta(0)$ del extremo A y la flecha $v(0{,}5\,l)$ en el punto medio del vano: $E = 2{,}2 \cdot 10^5$ MPa, $J = 2 \cdot 10^3$ cm^4.

5.38. Escribir las expresiones de $\theta(x)$ y $v(x)$ para todos los tramos del vano.



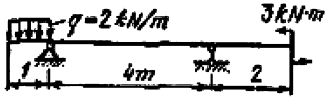
Para el problema 5.37



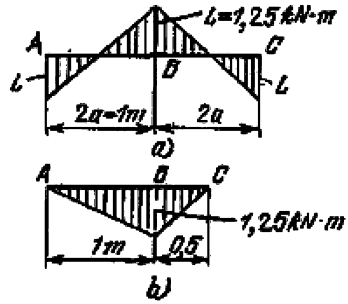
Para el problema 5.38

5.39. Determinar las flechas en los extremos de los voladizos; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $J = 300$ cm^4.

5.40. La figura presenta los diagramas de los momentos flectores construidos para vigas de sección uniforme; $J = 25$ cm^4, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.



Para el problema 5.39



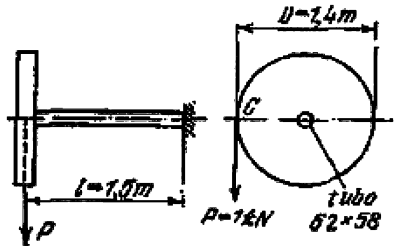
Para el problema 5.40

a) Construir el diagrama de las flechas de la viga, si se sabe que en la sección A la flecha y el ángulo de giro son iguales a cero.

b) Determinar el ángulo de giro de la sección C de la viga, si las flechas en las secciones A y B son nulas.

5.41. Un disco de diámetro $D = 1{,}4$ m está fijado en el extremo libre de una ménsula que representa de sí un tubo de acero de longitud $l = 1{,}5$ m. Una carga $P = 1$ kN está suspendida en el punto C situado en el extremo del diámetro horizontal del disco. Hallar el descenso f del punto C como resultado de la acción de la carga P, si $E = 2{,}2 \cdot 10^5$ MPa, $G = 8{,}5 \cdot 10^4$ MPa.

5.42. Determinar el desplazamiento de la charnela C.



Para el problema 5.41

Para el problema 5.42

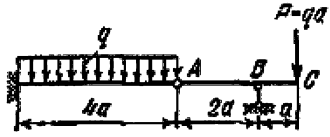
5.43. Determinar el ángulo de giro del extremo A de la viga.

Para el problema 5.43

5.44. Determinar los ángulos de giro y la flecha en la charnela A.

5.45. Determinar los ángulos de giro y las flechas en las secciones B y C del problema anterior.

5.46. Determinar el área limitada por el eje x y el eje de la viga deformada en el plano de flexión.



Para el problema 5.44

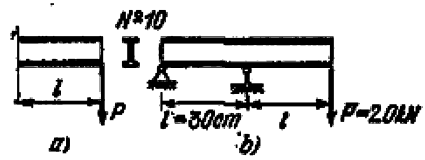
Para el problema 5.46

5.47*. Una barra delgada de longitud l se dobla elásticamente formando una circunferencia y sus extremos se unen suavemente. Determinar el momento flector en la barra.

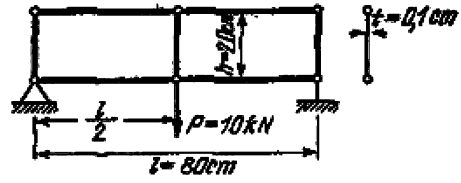
5.48*. Para una viga de longitud l articulada en sus apoyos, cargada en sus extremos con momentos iguales M (flexión pura), hallar la flecha máxima v_{med}, los ángulos de giro θ_A y θ_B en los extremos, así como el desplazamiento Δ del apoyo móvil. Comparar la solución aproximada con la exacta.

5.49. Determinar la flecha máxima y el ángulo de giro de una ménsula elástica de sección constante que soporta en el extremo libre un par de flexión de momento $L = 5{,}63$ N·m, $l = 50$ cm, $EJ = 5$ N·m².

5.50. Determinar la flecha en el extremo de un voladizo teniendo en cuenta la deformación de cizallamiento ($k = 2{,}9$).



Para el problema 5.50



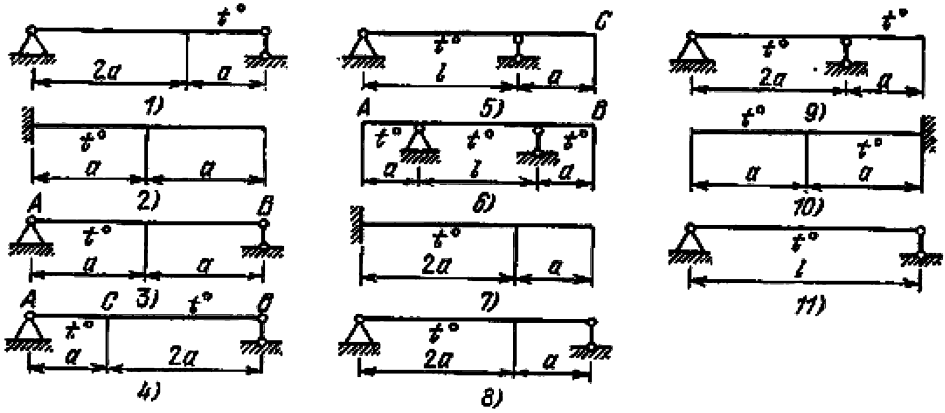
Para el problema 5.51

5.51. Determinar la flecha en el centro de una viga de acero de paredes delgadas y el ángulo de giro en el extremo, teniendo en cuenta la

deformación de cizallamiento de la pared y considerando que la estabilidad de ésta está asegurada; $J = 500$ cm^4, $\mu = 0{,}3$, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

Flexión de vigas a causa del calentamiento

5.52*. Hallar la flecha f en el centro del vano y el ángulo de giro θ_A en el extremo de una viga de longitud l con apoyos articulados al calentar ésta por abajo a $t°$. Considerar que la temperatura disminuye linealmente por la altura de la sección de la viga. El coeficiente de dilatación térmica del material es igual a α.



Para el problema 5.55

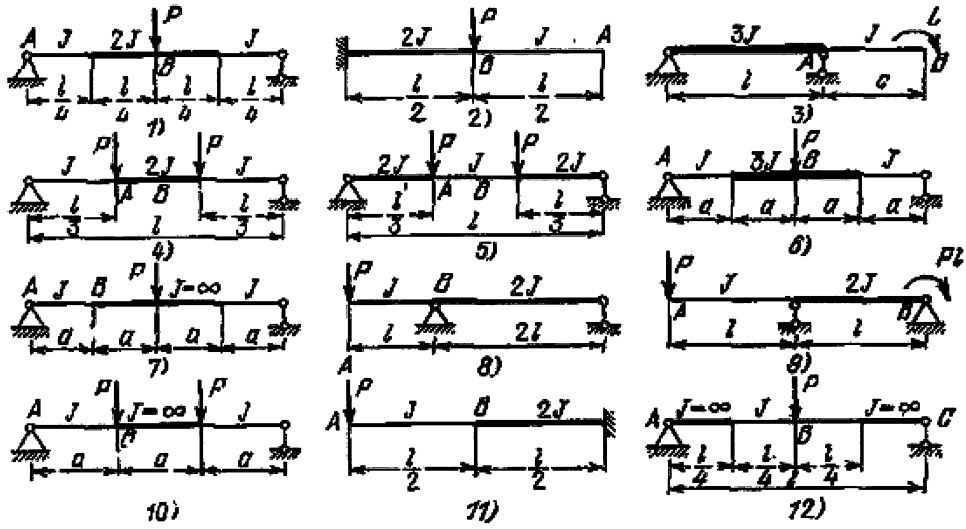
5.53. Hallar la flecha f en el centro del vano y los ángulos de giro θ_A y θ_B en los extremos de la viga del problema anterior al calentar una mitad de la viga.

5.54. Hallar la flecha f en el centro del vano y los ángulos de giro θ_A y θ_B en los extremos de la misma viga, si se calienta el tramo a de ésta (cerca del apoyo A).

5.55*. Para una viga que se calienta por abajo o por arriba en toda su longitud o en parte de ella, construir los diagramas de las flechas y de los ángulos de giro (la temperatura varía linealmente por la altura de la sección).

§ 2. Vigas de sección variable

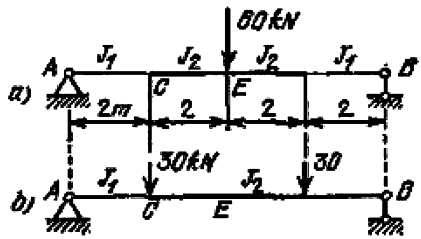
5.56*. Determinar los ángulos de giro y las flechas en las secciones A y B de una viga con tramos de rigideces diferentes.



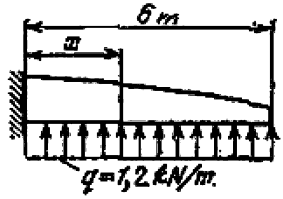
Para el problema 5.56

5.57. Determinar las flechas en las secciones C y E de una viga. Los momentos de inercia son $J_1 = 6550$ cm^4, $J_2 = 12\,430$ cm^4, el módulo de elacticidad es $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

5.58*. Una ménsula de sección variable de longitud $l = 6$ m está sometida a una carga de intensidad $q = 1{,}20$ kN/m distribuida uni-



Para el problema 5.57



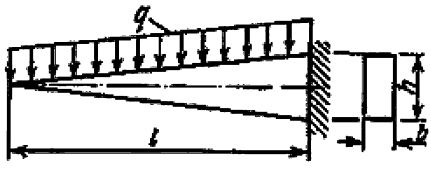
Para el problema 5.58

formemente. El momento de inercia J de su sección varía continuamente; los valores de J en distintas secciones de la ménsula (con intervalos de 1 m) se dan en la tabla:

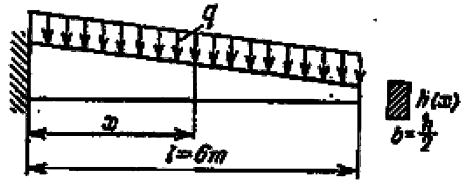
x, m	0	1	2	3	4	5	6
J, cm^4	$54 \cdot 10^3$	$38 \cdot 10^3$	$26 \cdot 10^3$	$17{,}1 \cdot 10^3$	$10{,}7 \cdot 10^3$	$5{,}6 \cdot 10^3$	$3{,}4 \cdot 10^3$

Construir los diagramas de los ángulos de giro θ y de las flechas v de la ménsula; $E = 10^4$ MPa.

5.59. Demostrar que una ménsula de ancho constante equirresistente a la flexión y cargada uniformemente tiene forma de cuña. Hallar la flecha máxima de la mensula y compararla con la flecha de una ménsula de sección uniforme.



Para el problema 5.59



Para el problema 5.60

5.60. Una ménsula de sección rectangular tiene una relación entre la altura y el ancho de 1 : 2. La altura h de la sección varía de acuerdo con la ley: $h(x) = 0{,}05\,(1200 - x)$, donde x y $h(x)$ se miden en centímetros. Construir los diagramas de θ y v. El módulo de elasticidad es $E = 10^4$ MPa.

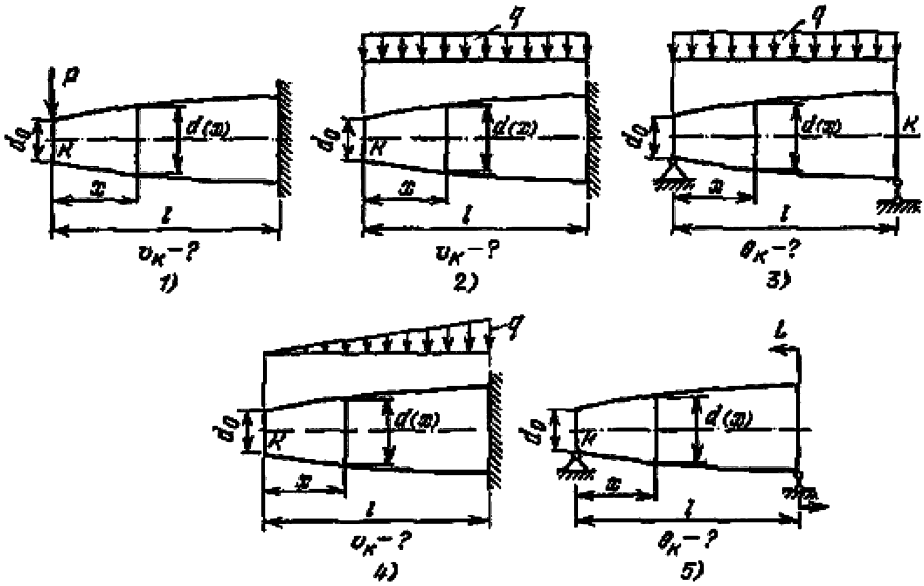
5.61*. Determinar la flecha v_K o el ángulo de giro θ_K de una viga de sección circular variable (tómese por ley de la variación del diámetro una de las siete variantes de la tabla). Para eso:

N°	Ley $d(x)$	N°	Ley $d(x)$
1	$d(x) = d_0\,(1 + \sqrt{x/l})$	5	$d(x) = d_0\,[1 + \sqrt[3]{(x/l)^4}]$
2	$d(x) = d_0\,[1 + \sqrt{(x/l)^3}]$	6	$d(x) = d_0\,(1 + \sqrt[4]{x/l})$
3	$d(x) = d_0\,(1 + \sqrt[3]{x/l})$	7	$d(x) = d_0\,[1 + \sqrt[4]{(x/l)^3}]$
4	$d(x) = d_0\,[1 + \sqrt[3]{(x/l)^2}]$		

a) escribir la integral de Mohr del desplazamiento incógnito usando la variable adimensional $x/l = t$;

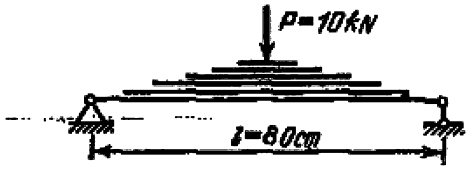
b) considerando $q = 2{,}1$ kN/m (o $P = 0{,}524$ kN, $L = 0{,}76$ kN·m), $l = 1{,}53$ m, $d_0 = 2{,}4$ cm y $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, hacer el programa en el lenguaje fortran-4 para calcular el desplazamiento en ordenador;

c) una vez hecho el cálculo, copiar de la tarjeta el valor del desplazamiento buscado y compararlo con lo obtenido para una viga de sección uniforme: 1) con el diámetro d_0 y 2) con el diámetro $d(l)$.

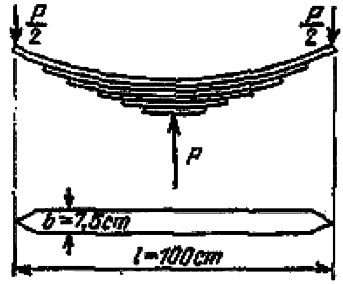


Para el problema 5.61

5.62. Determinar la flecha $v_{máx}$ de una ballesta hecha en forma de barra de resistencia igual a la flexión y cargada con una fuerza igual a 10 kN. El vano de la ballesta es igual a $l = 80$ cm. El número de hojas es $n = 6$. El espesor de las hojas es $t = 0{,}75$ cm; el ancho, $b = 7$ cm. El módulo de elasticidad del material es $E = 2{,}1 \times 10^5$ MPa.



Para el problema 5.62

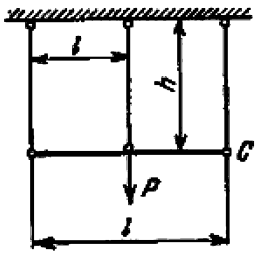


Para el problema 5.63

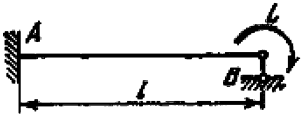
5.63. Una ballesta se compone de 10 hojas de ancho $b = 7{,}5$ cm y espesor $t = 10$ mm. El vano de la ballesta es igual a $l = 1$ m. La tensión admisible, $[\sigma] = 400$ MPa; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. Determinar la capacidad de carga de la ballesta y el valor de la flecha en el centro del vano.

§ 3. Vigas estáticamente indeterminadas

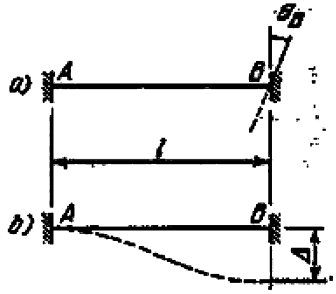
5.64*. Una viga de duraluminio de longitud $l = 1$ m de sección en U (Pr. 106 N° 15; $J = 34{,}56$ cm^4, $W = 9{,}87$ cm^3) está suspendida con tres tirantes de acero de longitud $h = 1$ m y de sección transversal igual a 0,1 cm^2. La viga soporta una carga $P = 5$ kN aplicada a su centro. Determinar los esfuerzos en los tirantes y la tensión máxima σ en la viga; $E_{ac} = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, $E_{dur} = 7 \cdot 10^4$ MPa.



Para el problema 5.64



Para el problema 5.66



Para el problema 5.67

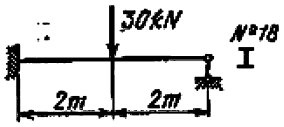
5.65*. Resolver el problema anterior suponiendo que: a) la viga es absolutamente rígida, b) los tirantes son rígidos y la viga es elástica.

5.66. Determinar el ángulo de giro θ_B, el momento flector M_A y las reacciones V_A y V_B provocados por el momento L.

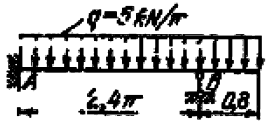
5.67*. a) Determinar los momentos flectores M_A y M_B en los extremos A y B de una viga con los extremos empotrados, si el empotramiento derecho es girado alrededor del punto B a un ángulo θ_B. b) La viga AB está empotrada en ambos extremos y no soporta carga alguna. El empotramiento derecho B de ésta ha efectuado un desplazamiento de traslación hacia abajo a una distancia Δ. Determinar los momentos M_A y M_B en los empotramientos.

5.68. Determinar la tensión normal máxima en una viga empotrada en un extremo y apoyada libremente en el otro.

5.69. Construir los diagramas Q y M.



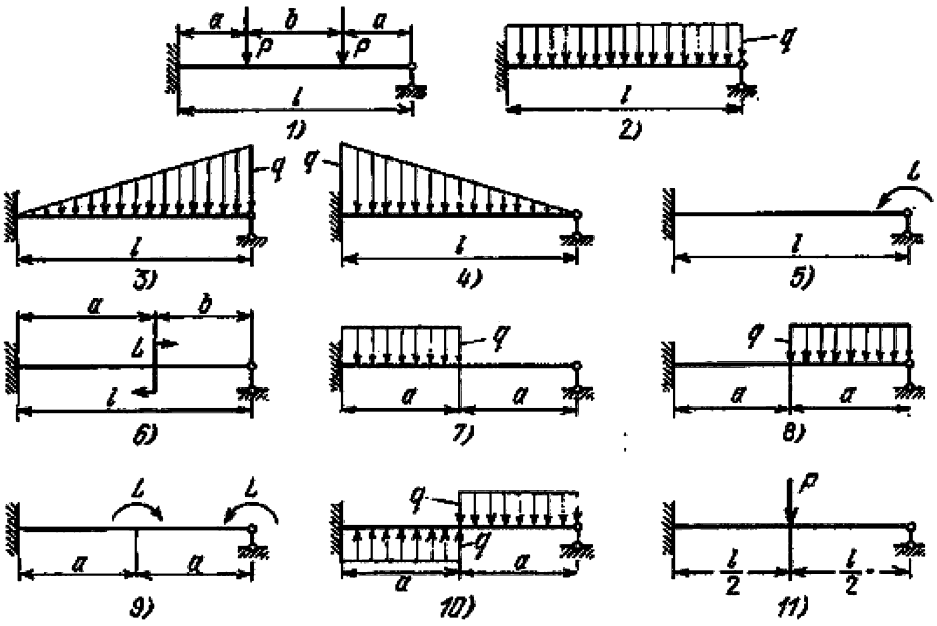
Para el problema 5.68



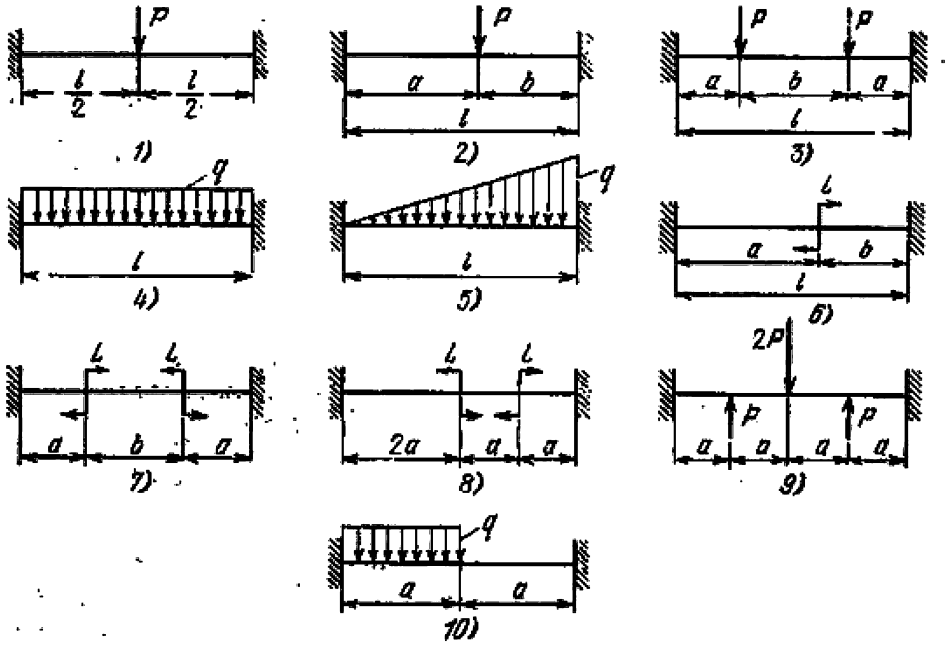
Para el problema 5.69

5.70*. Construir los diagramas de los momentos flectores y determinar las flechas en el punto de aplicación de la fuerza, en el centro del vano, y la flecha máxima de unas vigas empotradas en un extremo y apoyadas articuladamente en el otro.

5.71. Lo mismo para vigas empotradas en ambos extremos.

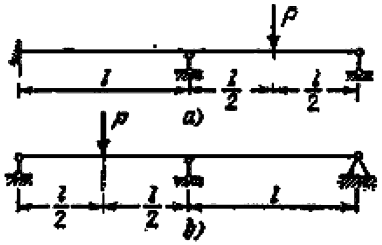


Para el problema 5.70

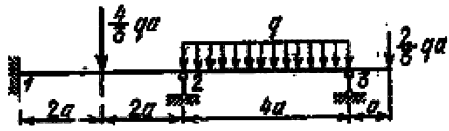


Para el problema 5.71

5.72. Una viga de dos vanos iguales está cargada con una fuerza concentrada en el centro de uno de los vanos. Construir el diagrama M.



Para el problema 5.72

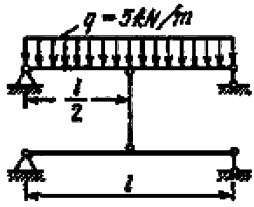


Para el problema 5.73

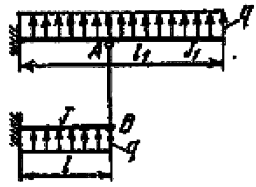
5.73. Construir los diagramas Q y M.

5.74. En el problema anterior se pide determinar el ángulo de giro de la sección sobre el apoyo 2.

5.75. Dos vigas de longitud $l = 1$ m cada una, fabricadas de un mismo material están unidas mediante una barra vertical en sus puntos medios. Determinar el esfuerzo S en la barra vertical (la deformación de ésta se desprecia). Los momentos de inercia de las secciones de las vigas son: de la viga superior $J_1 = 12{,}56 \cdot 10^3$ cm^4, de la inferior $J_2 = 5{,}44 \cdot 10^3$ cm^4.



Para el problema 5.75



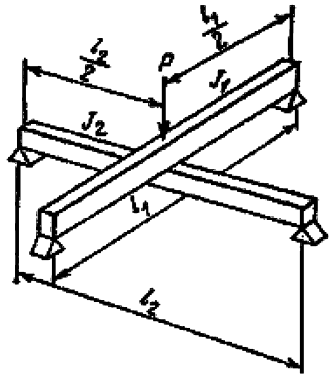
Para el problema 5.76

5.76. Dos ménsulas hechas de tubos están unidas por la barra AB. La sección del tubo superior es igual a 90 × 82 mm, la del tubo inferior, 100 × 90 mm. Las longitudes de las ménsulas son $l_1 = 4$ m, $l = 1$ m. La intensidad de la carga es $q = 1{,}5$ kN/m. Determinar el esfuerzo S en la barra AB (durante el cálculo, despreciar su deformación). El material de los tubos es el mismo.

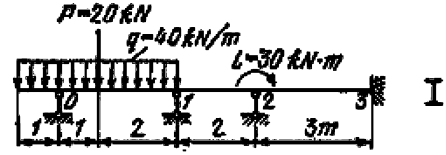
5.77. En el problema anterior se pide determinar la flecha en el extremo de la ménsula superior y la tensión máxima en ella. La ménsula está hecha de acero al cromo-manganeso-silíceo; su módulo es $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa.

5.78*. Dos vigas cruzadas de longitud l_1 y l_2 están cargadas en el lugar de cruce con una fuerza P. Hallar la distribución de la carga entre las vigas. Los momentos de inercia de las secciones de las vigas son respectivamente iguales a J_1 y J_2. El material de las vigas es el mismo.

5.79*. Construir los diagramas de los esfuerzos cortantes y de los momentos flectores.



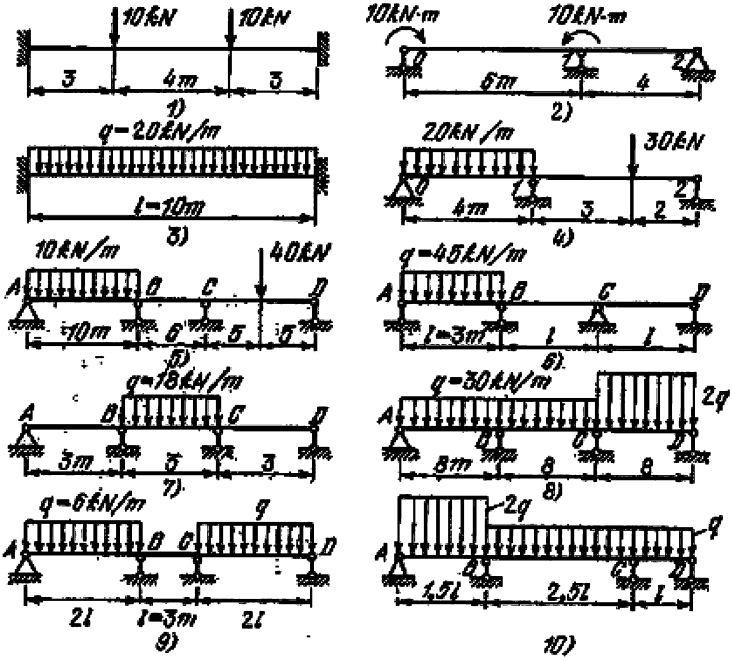
Para el problema 5.78



Para el problema 5.79

Calcular la viga de acero en doble T y seleccionar el perfil de acuerdo con el surtido. Determinar los ángulos de giro de las secciones sobre los apoyos, así como la flecha en el centro del vano *1—2*. Considerar $[\sigma] = 140$ MPa y $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

5.80. Construir los diagramas de los momentos flectores y de los esfuerzos cortantes, determinar las reacciones en los apoyos, trazar aproximadamente las deformadas de las vigas y marcar la posición de los puntos de inflexión.



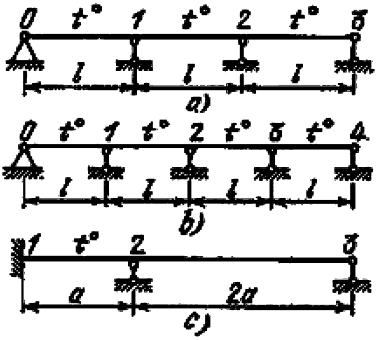
Para el problema 5.80

5.81. Una viga continua de sección constante con vanos iguales está cargada en un extremo con un momento L. a) Construir el diagrama de los momentos flectores, suponiendo que el número de vanos de la viga es sumamente grande. b) Construir el diagrama de momentos de una viga de tres vanos; compárar la solución con la del problema anterior.

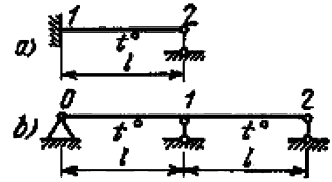
Para el problema 5.81

Calentamiento de vigas continuas

5.82*. Construir el diagrama de los momentos flectores de una viga calentada a $t°$: a), b) por arriba a lo largo de la viga, c) por abajo en el vano izquierdo [1]).



Para el problema 5.82



Para el problema 5.83

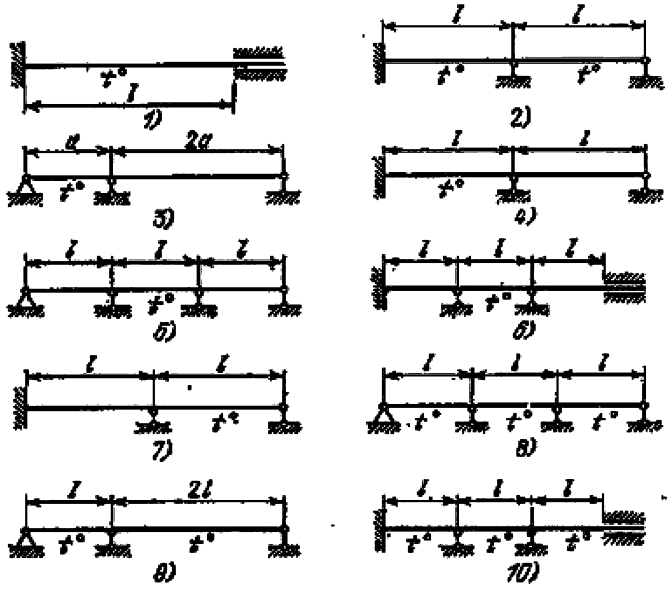
5.83*. Para una viga de sección bisimétrica calentada por abajo a $t°$ se pide determinar la tensión normal máxima y construir el diagrama de flechas [1]).

5.84. Construir los diagramas de flechas de vigas que se calientan uniformemente por abajo a lo largo de toda la viga o a lo largo de un vano [1]).

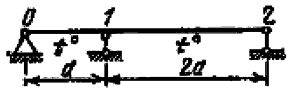
5.85. Para una viga que se calienta uniformemente por abajo [1]) se pide determinar el momento flector máximo, la flecha máxima y el ángulo de giro en la sección sobre el apoyo *1*.

5.86. Determinar el esfuerzo S en la barra AB durante su calentamiento a $t = 60°$: a) teniendo en cuenta la deformación por compresión de la barra y b) sin tenerla en cuenta. La barra AB es un tubo

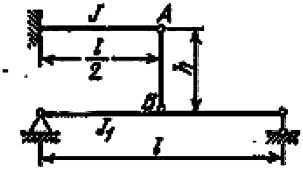
[1]) Considerar que la temperatura varía con la altura de la sección linealmente.



Para el problema 5.84



Para el problema 5.85



Para el problema 5.86

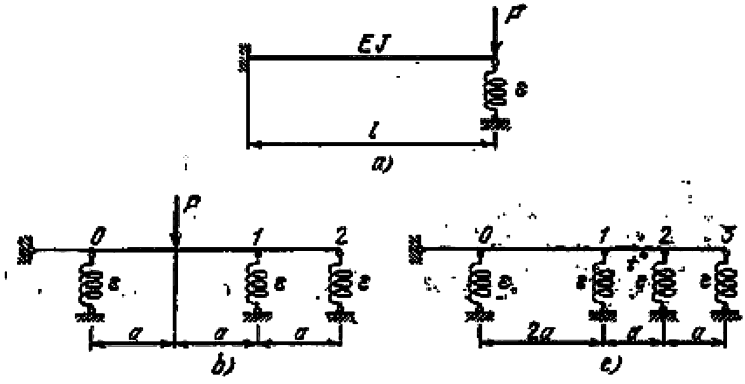
de duraluminio de sección 18 × 17 mm ($E = 7{,}5 \cdot 10^4$ MPa) y de longitud $h = 60$ cm. La ménsula y la viga están hechas también de tubos de duraluminio de secciones iguales respectivamente a 55 × 50 mm y 65 × 59 mm; el vano de la viga es $l = 1$ m. El coeficiente de dilatación lineal del material durante el calentamiento es igual a $\alpha = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ 1/K.

Consideración del asiento y de la elasticidad de los apoyos

5.87*. *a*) Determinar la reacción en el apoyo elástico, si su capacidad de asiento [1]) es igual a ε; *b*) construir el diagrama M (las capaci

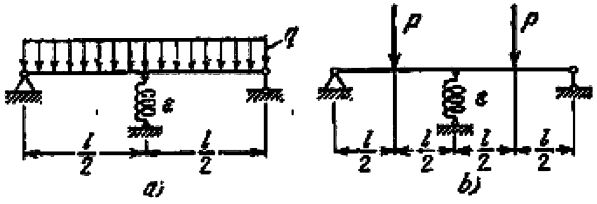
[1]) Llámase capacidad de asiento de un apoyo elástico al asiento de éste bajo la acción de una fuerza igual a 1 N; la capacidad de asiento se mide en m/N.

dades de asiento de los apoyos son iguales); *c*) hacer lo mismo en el caso de calentamiento por abajo del vano central cuando $\varepsilon = a^3:(10^4\ EJ)$.



Para el problema 5.87

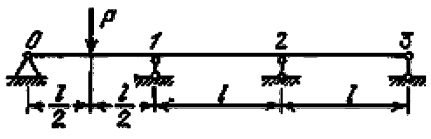
5.88*. Una viga continua de longitud $l = 2$ m, hecha de un tubo de duraluminio de sección 65 × 62 mm, tiene dos apoyos rígidos ne los extremos y un apoyo elástico en la parte media. ¿Cuál debe



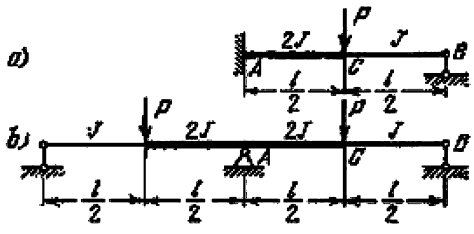
Para el problema 5.88

ser la capacidad de asiento ε del apoyo central para que el momento flector en el apoyo medio de la viga sea igual a cero? $E = 7{,}5 \times 10^4$ MPa.

5.89*. Construir el diagrama M teniendo en cuenta el asiento del apoyo *1* a $\Delta_1 = Pl^3/(96\ EJ)$.



Para el problema 5.89

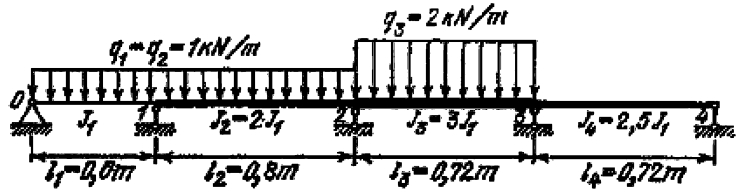


Para el problema 5.90

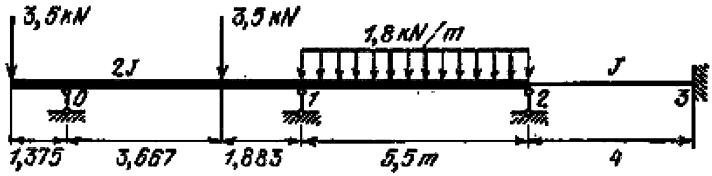
Vigas de sección variable

5.90*. Construir los diagramas de los momentos flectores de vigas con tramos de diferentes rigideces.

5.91*. Construir el diagrama de los momentos flectores de una viga de sección variable escalonada (cada vano es de sección constante) $J_1 : J_2 : J_3 : J_4 = 1 : 2 : 3 : 2{,}5$.



Para el problema 5.91

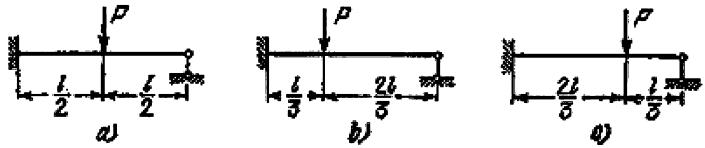


Para el problema 5.92

5.92. Construir el diagrama M. El momento de inercia de la sección de la viga en el vano *2—3* es dos veces menor que en las otras partes.

§ 4. Cálculo según el estado límite [1]

5.93*. Hallar el valor límite P_{11m} de la fuerza P correspondiente al momento flector límite M_{11m} en todas las charnelas plásticas [2] posibles.

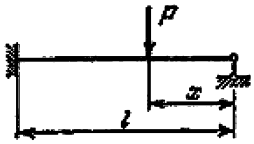


Para el problema 5.93

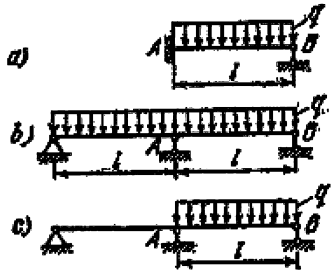
---

[1] Admitir el diagrama tracción—compresión de Prandtl (sin endurecimiento). La forma de la sección y la magnitud σ_{11} se consideran dadas.

5.94. Hallar la carga límite P_{lim} en función de la distancia x a partir del apoyo derecho. Determinar el valor de x correspondiente a la capacidad portante mínima de la viga; determinar P_{lim} mínimo.



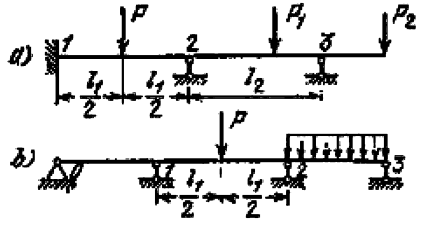
Para el problema 5.94



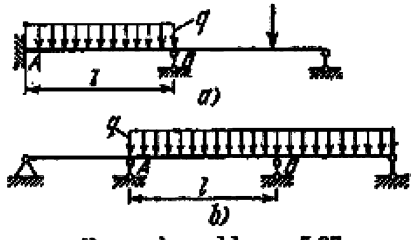
Para el problema 5.95

5.95. Hallar la carga límite q_{lim} y el lugar del momento flector máximo en el vano AB.

5.96*. Hallar la carga límite P_{lim} en el vano $1—2$ de una viga continua.



Para el problema 5.96

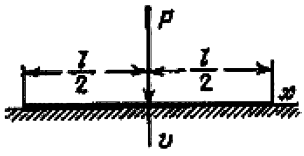


Para el problema 5.97

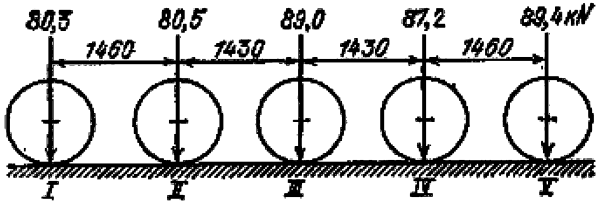
5.97. Hallar la carga límite q_{lim} en el vano $A — B$ de una viga continua.

§ 5. Vigas sobre base elástica

5.98*. Una viga (un riel tipo IIA, $J = 1223$ cm^4, $W = 180$ cm^3, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa) de longitud $l = 15$ m descansa sobre una base elástica continua y está cargada con una fuerza concentrada $P =$ $= 100$ kN en el centro. La rigidez de la base es $k = 30$ MPa. Construir los diagramas de las flechas y los momentos flectores.



Para el problema 5.98

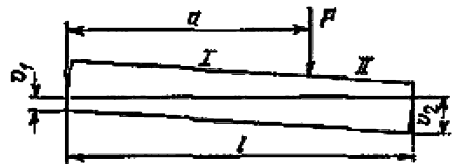


Para el problema 5.99

5.99*. El riel (véase el problema anterior) soporta cinco fuerzas concentradas de la presión de las ruedas de una locomotora. Determinar la tensión en el riel debajo de la rueda media.

5.100*. En el problema anterior se pide determinar la tensión en la sección del riel debajo de la quinta rueda.

5.101*. Un pontón de acero que tiene forma de un paralelepípedo rectangular y de longitud $l = 10$ m y de ancho $B = 3$ m está cargado



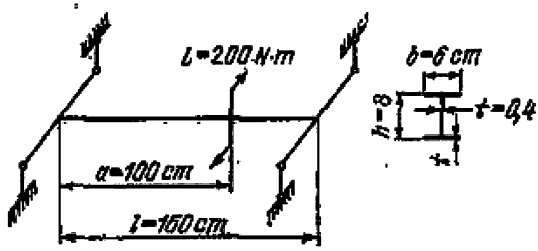
Para el problema 5.101

con una fuerza concentrada $P = 200$ kN sobre su eje a una distancia $a = 6$ m de la proa. Determinar los calados v_1 y v_2 del pontón y construir el diagrama de los momentos flectores. El momento de inercia de la sección es $J = 10^6$ cm^4. El peso específico del agua es $\gamma = 10$ kN/m^3.

5.102*. Resolver el problema 5.98, si el riel es de longitud $l = 2$ m.

§ 6. Torsión restringida de barras de paredes delgadas de perfil abierto

5.103*. Construir los diagramas de los ángulos de torsión φ, de los bimomentos B, de los momentos torsores $\overline{M}$ y $\overline{\overline{M}}$ de las torsiones restringida y libre de una barra de acero de sección doble T y longitud $l = 150$ cm que soporta la carga de un momento torsor concentrado. Las secciones extremas de la barra no pueden girar en sus planos, pero poseen la posibilidad de deplanación. Los módulos de elasticidad son $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.



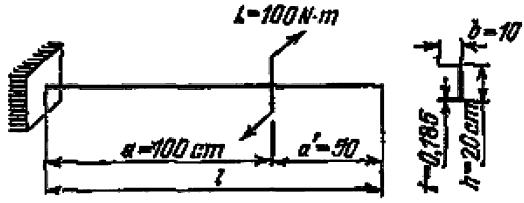
Para el problema 5.103

5.104*. Basándose en los resultados del problema anterior, se pide determinar las tensiones normales σ y las tangenciales $\overline{\tau}$ y $\overline{\overline{\tau}}$ máxi-

mas, de la torsión libre y la restringida en la sección transversal de una barra. Construir el diagrama de las tensiones tangenciales de la torsión restringida.

5.105*. Resolver el problema 5.103 para el caso cuando los extremos están completamente empotrados.

5.106*. Construir el diagrama de los bimomentos y determinar la tensión normal máxima en la sección del empotramiento de una ménsula de duraluminio de perfil en U de longitud $l = 150$ cm que soporta un momento torsor, $E = 7{,}6 \cdot 10^4$ MPa, $G = 2{,}9 \cdot 10^4$ MPa.



Para el problema 5.106

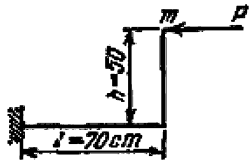
5.107*. Empleando los datos del problema anterior, se pide determinar las tensiones tangenciales máximas $\bar{\tau}$ y $\bar{\bar{\tau}}$ de las torsiones libre y restringida.

5.108*. Resolver aproximadamente el problema 5.106, considerando que $\alpha = 0$, es decir, despreciando la rigidez de la torsión libre y comparar el resultado obtenido con la solución exacta.

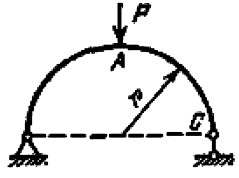
§ 7. Estructuras planas

Determinación de los desplazamientos en casos estáticamente determinados

5.109. Una ménsula horizontal hecha de un tubo de duraluminio de sección 65 × 59 mm ($J_l = 28{,}1$ cm^4) es de longitud $l = 70$ cm. En el extremo la ménsula tiene fijado rígidamente un soporte vertical hecho de un tubo de duraluminio de sección 55 × 50 mm ($J_h = 14{,}2$ cm^4). El extremo m del soporte está sometido a la acción de una fuerza horizontal $P = 1$ kN. Determinar las componentes horizontal δ_H y vertical δ_V del desplazamiento del extremo m del soporte. El modulo de elasticidad es $E = 7{,}5 \cdot 10^4$ MPa.



Para el problema 5.109

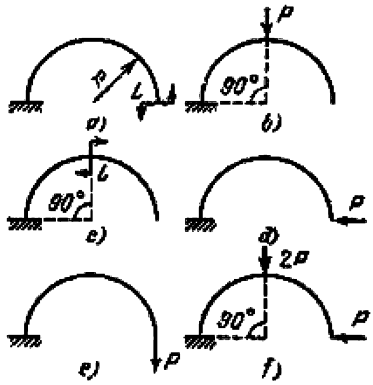


Para el problema 5.112

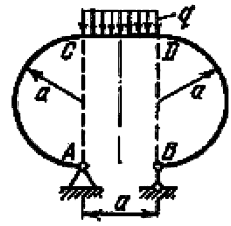
5.110*. Determinar la proyección vertical y_C del desplazamiento de la charnela C de la estructura representada en la figura 12 del problema 4.24.

5.111*. Determinar: a) el acercamiento δ_{CG} de los puntos C y G de la estructura representada en la fig. 1 del problema 4.25, b) el ángulo θ_{GH} de giro de la sección G respecto al nudo D de dicha estructura.

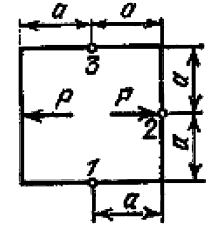
5.112. Determinar el desplazamiento δ_C del apoyo C, la flecha v_A en la clave de una estructura curvilínea en forma de semicircunferencia y el desplazamiento total δ_A del punto A.



Para el problema 5.113



Para el problema 5.114



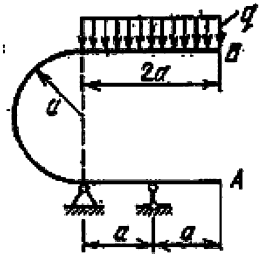
Para el problema 5.115

5.113. Determinar el valor y la dirección del desplazamiento δ del extremo de una ménsula curvilínea en forma de semicircunferencia.

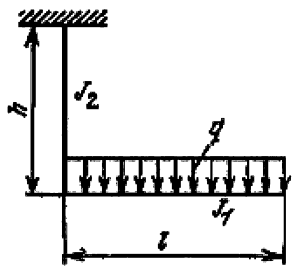
5.114. Determinar el ángulo de giro θ_B de una estructura en el apoyo B. Los tramos AC y BD están trazados por una circunferencia de radio a.

Indicación. Es más fácil hallar el ángulo θ_{AB} igual a $2\theta_B$.

5.115. En una estructura de tres articulaciones se pide hallar el desplazamiento mutuo δ_{1-3} de las articulaciones *1* y *3* y el ángulo θ_2 de giro mutuo de los extremos de las barras concurrentes en la articulación *2*.



Para el problema 5.116



Para el problema 5.117

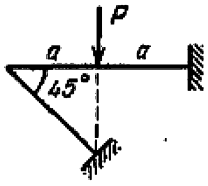
5.116. Hallar el acercamiento δ_{AB} de los extremos A y B de la estructura, así como el ángulo de giro θ_{AB} mutuo.

5.117. Hallar los desplazamientos vertical y horizontal, así como el ángulo de giro del extremo libre de la ménsula expuesta en la figura que soporta sobre su parte horizontal una carga uniformemente distribuida.

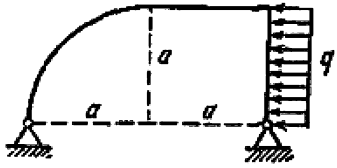
Problemas estáticamente indeterminados. Diagramas M, Q, N

5.118*. Construir los diagramas de los momentos flectores M, de los esfuerzos cortantes Q y de las fuerzas longitudinales N de una estructura plana que soporta una carga en su plano.

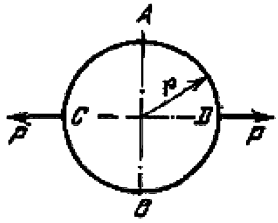
5.119*. Parte de una estructura representa un cuarto de circunferencia. Construir el diagrama M.



Para el problema 5.118



Para el problema 5.119

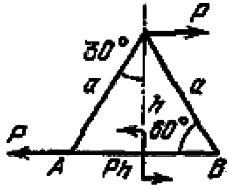


Para el problema 5.120

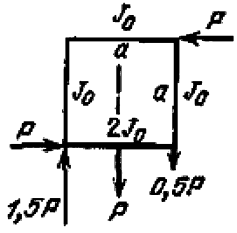
5.120*. Construir el diagrama M de un anillo circular cargado simétricamente con dos fuerzas.

5.121*. Construir el diagrama M de una estructura triangular cerrada que soporta una carga antisimétrica.

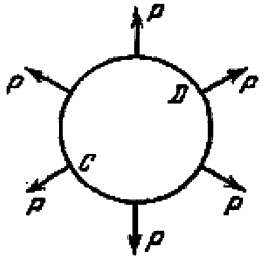
5.122*. El momento de inercia de la sección de la barra inferior de una estructura de forma cuadrada es dos veces mayor que la de las otras barras. Construir el diagrama M.



Para el problema 5.121



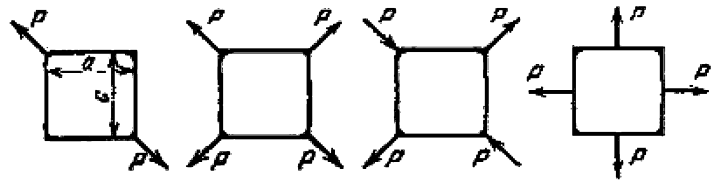
Para el problema 5.122



Para el problema 5.123

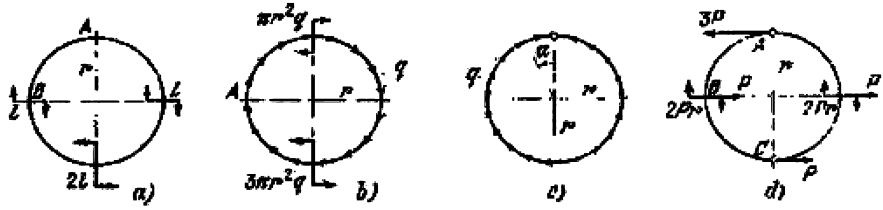
5.123*. Un anillo de radio R está cargado con seis fuerzas radiales P dispuestas regularmente. Construir el diagrama M. Resolver también el problema teniendo en cuenta la influencia que ejercen las fuerzas longitudinales sobre la deformación del anillo.

5.124. Construir los diagramas definitivos M para las cuatro variantes de carga sobre una estructura de forma cuadrada.



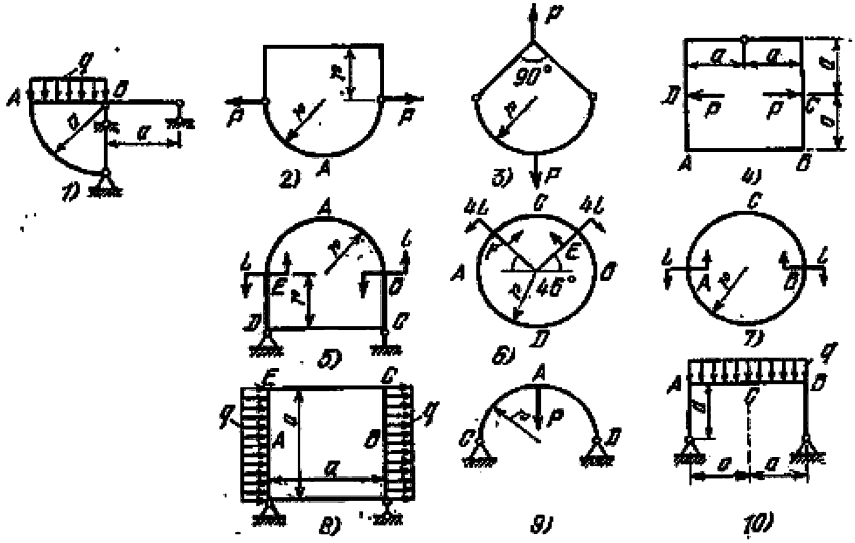
Para el problema 5.124

5.125. Construir los diagramas M de un anillo, cuando éste soporta cargas concentradas o distribuidas.



Para el problema 5.125

5.126*. Construir los diagramas M, Q y N de estructuras curvilíneas y rectangulares.

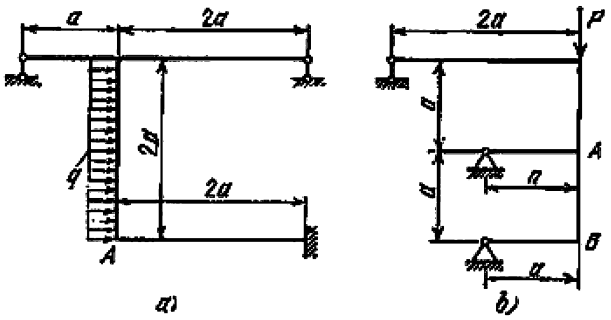


Para el problema 5.126

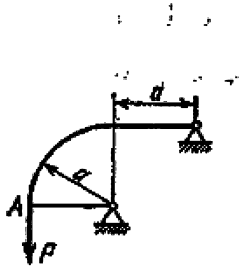
Desplazamientos en estructuras estáticamente indeterminadas

5.127*. Definir el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza P sobre la estructura representada en la figura del problema 5.118.

5.128. Construir el diagrama de los momentos flectores y determinar el desplazamiento lineal del nudo A de una estructura apoyada en tres puntos.



Para el problema 5.128

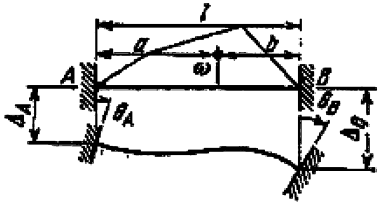


Para el problema 5.129

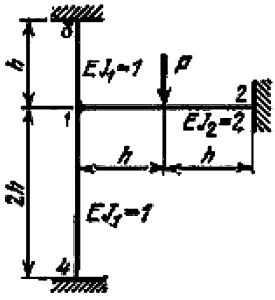
5.129. Construir el diagrama M y determinar el ángulo de giro del nudo A de una estructura sobre dos apoyos con un tramo curvilíneo en forma de la cuarta parte de una circunferencia.

5.130. Determinar el alejamiento de los puntos C y D del anillo representado en las figuras: 1) del problema 5.120; 2) del problema 5.123.

5.131*. La viga AB de sección constante, empotrada en ambos extremos, soporta una carga arbitraria y experimenta un giro de los



Para el problema 5.131



Para el problema 5.132

apoyos a los ángulos θ_A y θ_B. Los asientos de los apoyos son de magnitudes Δ_A y Δ_B. Determinar los momentos flectores y los esfuerzos cortantes en las secciones transversales de los apoyos de la viga. La fuerza longitudinal no se toma en cuenta; a y b son las dis-

tancias entre los apoyos y el centro de gravedad del área ω del diagrama M_P construido a partir de la carga dada en el caso de una viga con apoyos articulados (el diagrama M_P está representado convencionalmente).

5.132*. Construir el diagrama de los momentos flectores de una estructura con tres apoyos empotrados. Considerar que la rigidez del pilar en flexión es igual a 1 y la del dintel igual a 2. Tomar como incógnita el ángulo θ_1 de giro del nudo *1*. Utilizar los resultados de la solución del problema 5.131.

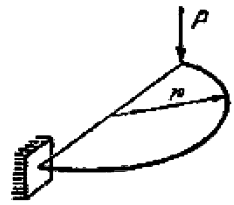
§ 8. Estructuras plano-espaciales

Desplazamientos en casos estáticamente determinados

5.133*. Determinar la flecha en el extremo de una ménsula curvilínea trazada por un arco de círculo dispuesto en el plano horizontal y que soporta una fuerza vertical P.

5.134. Determinar el ángulo de giro del extremo de una ménsula curvilínea en el plano de la sección extrema.

Para el problema 5.133



Para el problema 5.134

Para el problema 5.136

5.135. Hallar la flecha δ en el extremo de la estructura representada en la figura del problema 4.79, considerando que la sección transversal es un círculo de diámetro $d = 1$ cm; $b = a = 0{,}5$ m, $E = 2{,}2 \cdot 10^5$ MPa, $G = 0{,}4\,E$, $P = 10$ N.

5.136*. Determinar el ángulo θ de giro transversal de un anillo sometido a la acción de una torsión uniformemente distribuida (los momentos flectores en un anillo igual fueron determinados en el problema 4.81).

5.137*. Determinar la flecha máxima de la estructura representada en la figura *8* del problema 4.87.

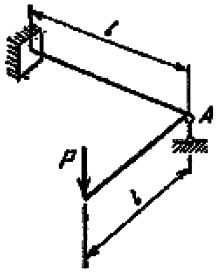
5.138. Determinar la flecha máxima de la estructura representada en la figura *a* del problema 4.80.

Estructuras estáticamente indeterminadas

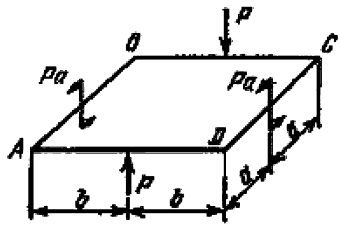
5.139*. Una barra doblada está empotrada en un extremo y apoyada articuladamente en el nudo *A*. El plano del eje de la barra es horizontal. Determinar la flecha f del extremo libre de la barra que soporta una carga $P = 60$ N. Viene dado: $l = 50$ cm, los módu-

los de elasticidad $E = 2{,}2 \cdot 10^5$ MPa, $G = 0{,}4\ E$. La sección transversal de la barra es un cuadrado con el lado $a = 1$ cm.

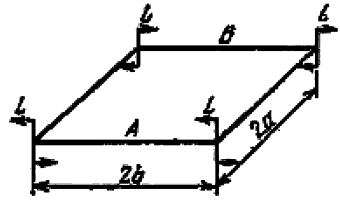
5.140*. Construir los diagramas de los momentos flectores M y torsores M_{tor} de un marco rectangular cargado simétricamente.



Para el problema 5.139



Para el problema 5.140

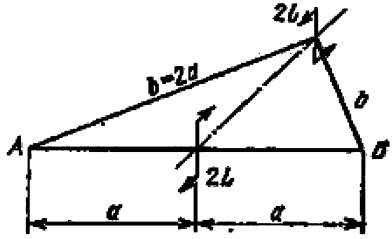


Para el problema 5.141

5.141*. Lo mismo para una carga doblemente antisimétrica.

5.142*. Lo mismo para un marco triangular cargado simétricamente.

5.143* Un semiaro empotrado soporta una carga simétrica. Construir los diagramas M y M_{tor}.

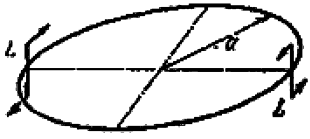


Para el problema 5.142

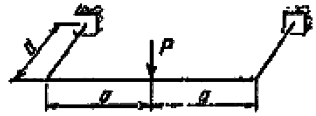
Para el problema 5.143

5.144*. Un aro circular es sometido a torsión por los momentos L. Construir los diagramas M y M_{tor}.

5.145. Una estructura en forma de П de sección circular está empotrada en ambos extremos y cargada con una fuerza concentrada P en dirección perpendicular al plano de la estructura. Determinar el momento flector y la flecha en la sección central de la estructura. Viene dado: $G = 0{,}4\ E$.

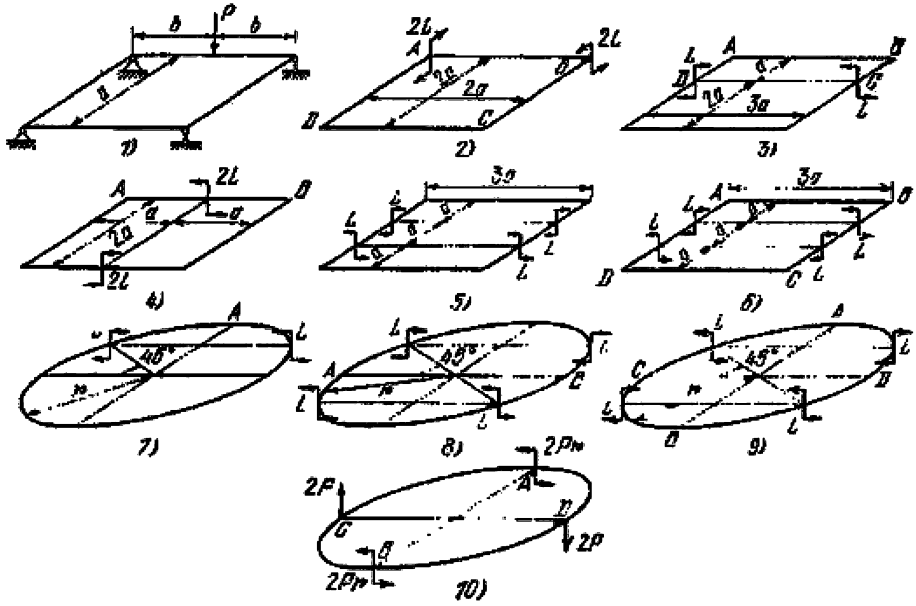


Para el problema 5.144



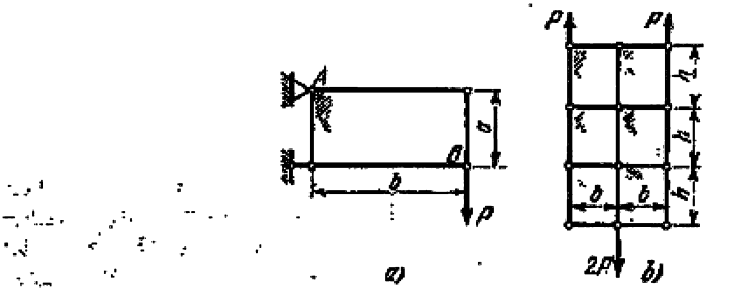
Para el problema 5.145

5.146*. Construir los diagramas M y M_{tor} de los marcos rectangulares y de los aros de sección circular.



Para el problema 5.146

5.147*. Construir los diagramas de las fuerzas longitudinales N en las barras y determinar los esfuerzos tangenciales lineales q en una armadura de paredes delgadas [1]) (se considera que las fuerzas



Para el problema 5.147

de interacción q entre paredes y barras son solamente tangenciales y están uniformemente distribuidas a lo largo de la barra).

[1]) Armaduras de paredes delgadas se llama convencionalmente a las armaduras en las cuales los ternapuntas se sustituyen por paredes.

§ 9. Métodos de elementos finitos. Empleo de ordenadores para la obtención de diagramas

5.148*. Para una viga de longitud l y rigidez EJ empotrada en sus extremos y cargada con una fuerza P en el centro del vano, determinar la flecha $v_{l/2}$. Utilizar el método de los elementos finitos basado en el principio variacional de Ritz. Dividir la viga en dos elementos finitos de longitud $a = l/2$. Introducir en calidad de parámetros variables la flecha y el ángulo de giro de la tangente a la línea elástica en los puntos *1*, *2*, *3* dispuestos en los extremos de los elementos. Comparar el resultado de los cálculos con el valor «exacto» (dentro de los límites admitidos por la teoría de la flexión de vigas).

Para el problema 5.148

5.149*. Examinar el problema 5.148 considerando la viga con apoyos articulados en sus extremos.

5.150*. Está dada una viga análoga a las examinadas en los problemas 5.148 y 5.149, pero con apoyos distintos: articulado el izquierdo y empotrado el derecho. La fuerza P está, como antes, aplicada en el centro del vano. Determinar la flecha $v|_{l/2}$ y el ángulo de giro $\theta|_{l/2}$ bajo la fuerza.

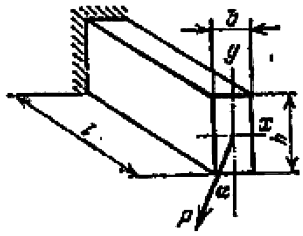
5.151*. Examinar una viga con el extremo izquierdo empotrado y el derecho libre. En el extremo libre está aplicado un par de fuerzas de momento M_0. Con ayuda del ordenador obtener los diagramas de los momentos, ángulos de giro θ y flechas v, considerando para el ejemplo que $EJ = 10$, $l = 10$, $M_0 = 1$.

CAPÍTULO 6

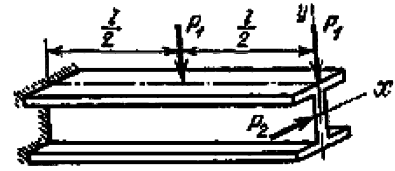
RESISTENCIA COMPUESTA

§ 1. Flexión esviada

6.1*. El extremo libre de un voladizo soporta una carga concentrada $P = 3$ kN. Viene dado: $b = 4$ cm, $h = 12$ cm, $l = 120$ cm, $\alpha = \pi/6$ rad. Calcular las tensiones normales en los puntos angulares de la sección más peligrosa y determinar la flecha en el extremo de la estructura. El voladizo es de acero, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa



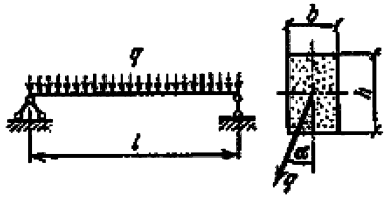
Para el problema 6.1



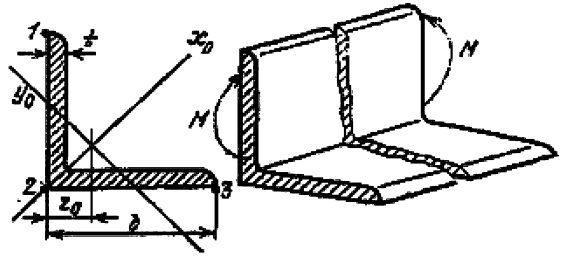
Para el problema 6.2

6.2. Una ménsula ($l = 0{,}8$ m) de sección doble T N° 12 se encuentra en flexión bajo la acción de las fuerzas $P_1 = 2{,}5$ kN y $P_2 = 1$ kN. Determinar la tensión normal máxima en la sección más peligrosa de la estructura.

6.3. Comprobar la resistencia y rigidez de una viga fabricada de material unidireccional de composición ($E = 1 \cdot 10^4$ MPa). Viene dado: $l = 40$ cm, $b = 1{,}2$ cm, $h = 1{,}6$ cm. Una carga de intensidad $q = 20$ N/m distribuida uniformemente actúa en el plano que pasa por el eje de la viga y forma con el plano vertical de la viga un ángulo $\alpha = \pi/6$ rad. La tensión admisible en flexión es $[\sigma] = 14$ MPa; la flecha admisible es $[f] = l/800$.



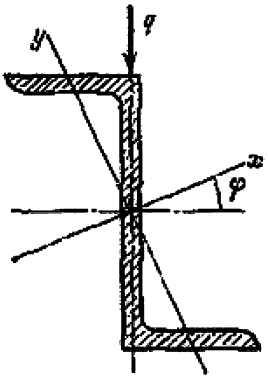
Para el problema 6.3



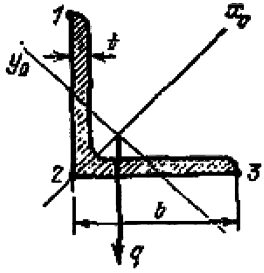
Para el problema 6.4

6.4. Un angular laminado de acero N° 8 ($t = 8$ mm) soporta un momento flector $M = 0{,}8$ kN·m en el plano medio del ala vertical. Determinar las tensiones normales en los puntos *1*, *2* y *3* de la sección.

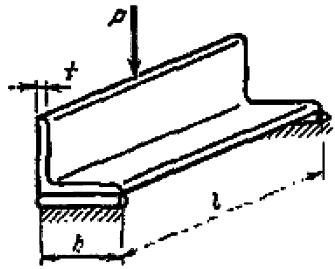
6.5*. Una viga de sección Z N° 14, cuyo vano es igual a $l = 2$ m, está articuladamente apoyada en sus extremos y soporta una carga de intensidad $q = 10$ kN/m distribuida uniformemente. Los momentos de inercia principales de la sección son: $J_x = 847$ cm^4, $J_y = 61{,}4$ cm^4. El ángulo formado por el plano de rigidez máxima y la



Para el problema 6.5



Para el problema 6.6



Para el problema 6.7

pared de la viga es $\varphi = 0{,}3816$ rad ($\operatorname{tg}\varphi = 0{,}4$). El grosor de la pared es igual a $t = 8$ mm. Determinar las tensiones máximas y la flecha máxima.

6.6. Determinar las tensiones normales en los puntos *1* y *2* de la sección más peligrosa de una ménsula, así como la flecha total máxima provocada por la acción del peso propio. La ménsula representa un angular N° 6,3 ($t = 0{,}6$ cm), $q = 5{,}72 \cdot 10^{-3}$ kN/m. La longitud de la estructura es $l = 2$ m, $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa.

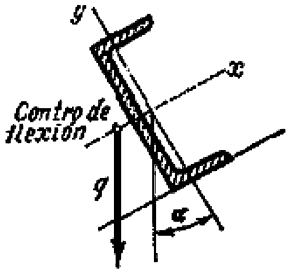
6.7. Determinar la carga concentrada admisible P que puede ser aplicada en el punto medio del vano de una viga, si la tensión admisible es igual a $[\sigma] = 160$ MPa. Viene dado: $l = 2$ m, la viga está formada por un angular N° 9 ($t = 0{,}8$ cm).

6.8*. Una viga de sección U apoyada articuladamente en sus extremos soporta una carga uniformemente distribuida de intensidad $q = 500$ kN/m. El perfil en U está situado de tal manera que su pared forma con la vertical un ángulo $\alpha = \pi/6$ rad. El vano de la viga es igual a $l = 4$ m. La línea de acción de la carga pasa por el centro de flexión. Calcular el número del perfil en U a partir de la condición de que la tensión admisible es igual a $[\sigma] = 160$ MPa.

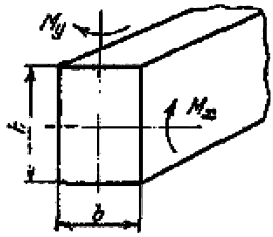
6.9*. Una barra de sección rectangular $b \times h$ experimenta flexión esviada causada por los momentos M_x y M_y. A partir de la condición de resistencia se pide determinar la relación de los lados de la sección $k = h/b$ correspondientes al peso mínimo de la barra.

6.10*. Una ménsula de sección rectangular $b \times h$ está sometida a flexión esviada causada por la acción de una carga concentrada P en su extremo libre (véase la fig. del problema 6.1). Determinar la relación de los lados de la sección $k = h/b$ para la cual, a partir de la flecha admisible $[f]$, el peso de la barra sea el mínimo.

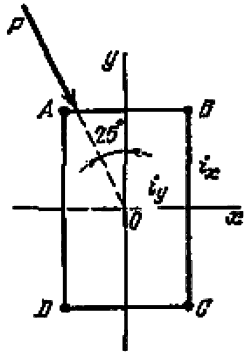
6.11. El extremo libre de una viga en voladizo soporta una fuerza P. La sección de la viga tiene dos ejes de simetría; los momentos de inercia con respecto a estos ejes son iguales a 250 cm^4 y 3400 cm^4. La dirección de la fuerza P forma con los ejes de simetría de la sección un ángulo igual a $\pi/4$ rad. Calcular el ángulo de inclinación α de la línea neutra respecto al eje de rigidez máxima de la sección.



Para el problema 6.8



Para el problema 6.9



Para el problema 6.13

6.12. La dirección de la flexión forma con los ejes principales de la sección de una barra sometida a flexión esviada, un ángulo $\alpha = \pi/4$ rad. La sección de la barra es rectangular, cuyas dimensiones son $b = 2h$. Determinar el sentido del vector del momento flector en la sección de la barra.

6.13*. Mediante el método gráfico, con ayuda del rectángulo de inercia, se pide determinar la dirección de la flexión de una barra que experimenta flexión esviada. Los radios de giro de la sección de la barra son $i_x = 5$ cm y $i_y = 3$ cm. La línea de acción de la fuerza P forma con el eje y un ángulo $\alpha = 0{,}436$ rad.

6.14. Demostrar que durante la flexión esviada cuando la línea de carga (línea de acción de la fuerza P) coincida con una de las diagonales del rectángulo de inercia, la línea neutral coincidirá con su otra diagonal.

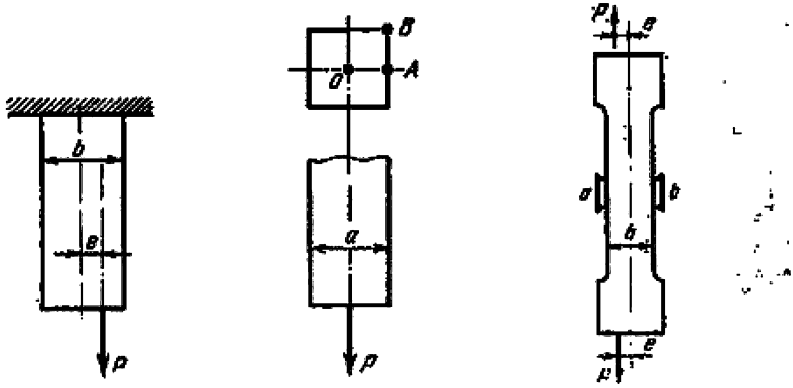
§ 2. Tracción o compresión con flexión

6.15*. Una tira de grosor $t = 10$ mm es estirada por la fuerza $P = 50$ kN con una excentricidad $e = b/4$. Determinar el ancho b de la tira si la tensión admisible es igual a $[\sigma] = 160$ MPa.

6.16. ¿Cómo variará la tensión máxima en una barra de sección cuadrada, si la fuerza que actúa a lo largo de su eje se desplaza para-

lelamente: 1) al punto A; 2) al punto B del contorno de la sección transversal?

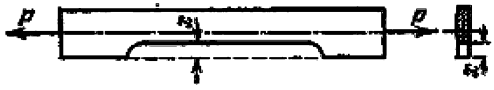
6.17. Determinar la excentricidad de la fuerza longitudinal que suscita tensiones normales en las fibras extremas de una muestra de sección circular de diámetro d que se distinguen del valor medio de las tensiones en menos de un 5%.



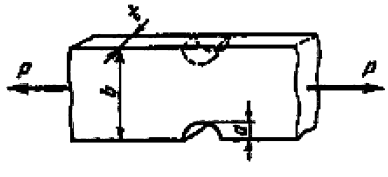
Para el problema 6.15 Para el problema 6.16 Para el problema 6.18

6.18. Durante el ensayo de una muestra de acero a tracción compuesta en las fibras extremas se establecieron las tensiones normales $\sigma_a = 160$ MPa y $\sigma_b = 100$ MPa. Determinar la fuerza de tracción P y su excentricidad e. La sección de la muestra es rectangular: $b = 6$ cm, $t = 5$ mm.

6.19*. Determinar la profundidad admisible x de la entalladura en una pletina de sección 60 × 10 mm estirada a lo largo de su eje por una fuerza $P = 15$ kN. Considerar que la tensión admisible es igual a $[\sigma] = 120$ MPa. La concentración de tensiones se desprecia.



Para el problema 6.19

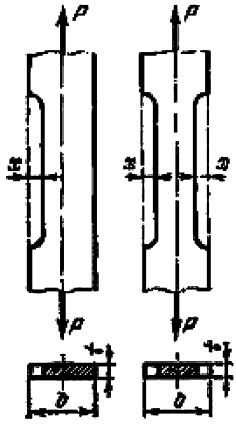


Para el problema 6.20

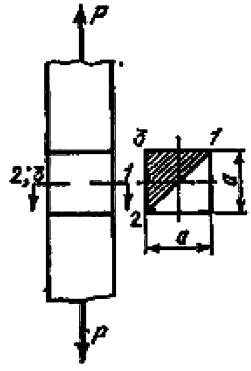
6.20*. En el borde de una banda de acero sometida a tracción apareció una grieta. Para que ésta no se extienda fresaron en el lugar de ésta una arista hueca. Hallar en cuánto aumentó la tensión en la banda como resultado de esta operación. Las dimensiones de la sección de la banda son: $b = 100$ mm, $t = 8$ mm, la profundidad de la arista hueca es $a = 10$ mm, la fuerza de tracción es $P = 60$ kN. La concentración de tensiones se desprecia.

6.21. Para disminuir la tensión máxima en la banda de acero con una arista hueca como la examinada en el problema anterior se proponen fresar en el borde opuesto una arista hueca igual. ¿Cómo variará la tensión máxima en la banda en este caso?

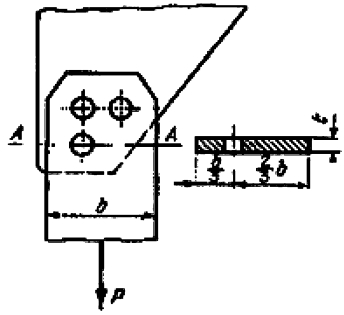
6.22. Dos bandas de sección $b \times t$ se estiran cada una con una fuerza P. Una banda está debilitada por una escotadura lateral de profundidad x, la otra, por dos escotaduras laterales de la misma profundidad. ¿Con qué valor de x la tensión máxima σ en la primera banda será mayor y con qué valor de x será menor que la tensión máxima en la segunda?



Para el problema 6.22



Para el problema 6.23

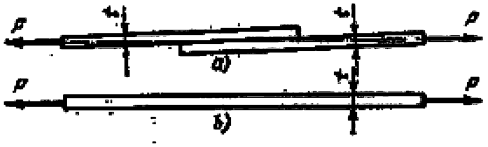


Para el problema 6.24

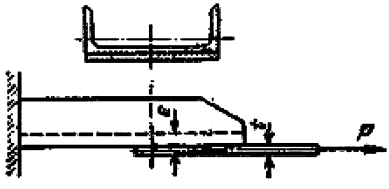
6.23. Determinar las tensiones en la sección más peligrosa de la barra estirada, con un debilitamiento local, representada en la figura. La sección de la barra es cuadrada, $a = 40$ mm; la fuerza de tracción es $P = 10$ kN.

6.24. Una banda fijada con ayuda de tres remaches a un cartabón (como está representado en la figura) está cargada con una fuerza $P = 25$ kN. Calcular las tensiones en los puntos extremos de la sección que pasa por el remache inferior. Las dimensiones de la sección son: $b = 60$ mm, $t = 5$ mm, el diámetro del remache es $d = 10$ mm. La concentración de tensiones se desprecia.

6.25. ¿Cuántas veces la tensión máxima en las bandas unidas a solape, por un cordón de soldadura, es mayor que en la banda entera? (véase la figura *b*).



Para el problema 6.25

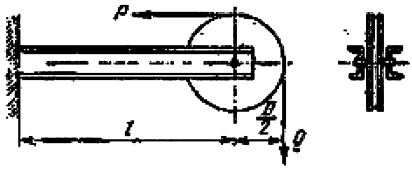


Para el problema 6.26

6.26*. A la cara exterior del alma de un perfil en U está soldada a solape una banda cuyo ancho es igual a la altura del perfil en U. La banda está sometida a una fuerza $P = 250$ kN. Determinar el grosor t de la banda, así como el número del perfil en U, teniendo en cuenta que las tensiones máximas no deben ser mayores de $[\sigma] = 160$ MPa.

6.27. Una fuerza de tracción $P = 5$ kN se transmite a un angular laminado equilátero $50 \times 50 \times 3$ por medio de dos bandas de grosor $t = 0{,}3$ cm fijadas al ala del angular. Hallar la magnitud de la tensión máxima en la sección del angular.

Para el problema 6.27



Para el problema 6.29

6.28. Un tubo circular se estira por una fuerza P, cuya línea de acción pasa por el borde exterior de la sección. Comparar la tensión normal máxima σ_{max} en la sección transversal del tubo con la tensión σ_0 que resulta de la tracción axial. La relación del diámetro interior del tubo al exterior es igual a 0,8.

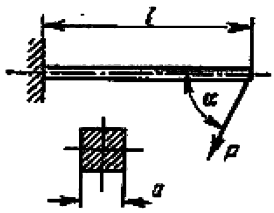
6.29. Una polea destinada para levantar una carga $Q = 50$ kN está instalada sobre el extremo libre de un voladizo compuesto de dos perfiles en U. La tensión del cable horizontal es $P = Q$. El eje de la polea está situado a la distancia $l = 120$ cm del empotramiento. El diámetro de la polea es $D = 20$ cm. Elegir del surtido de laminados el número del perfil en U partiendo de la condición de que las tensiones máximas en la sección más peligrosa no superen $[\sigma] = 100$ MPa.

6.30*. Una ménsula de sección cuadrada ($a \times a$) está cargada en el extremo libre con una fuerza P que actúa bajo un ángulo α respecto al eje de la barra. Determinar la tensión máxima en el empotramiento, así como el ángulo α_0 correspondiente al valor máximo de la tensión.

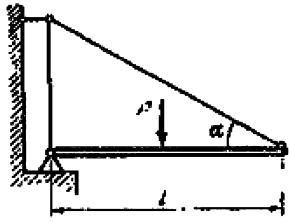
6.31. Comprobar la resistencia de la viga horizontal de una grúa cantilever en el caso cuando la carga concentrada $P = 30$ kN se encuentre en el punto medio de su pluma. La viga es de perfil doble T N° 18. El vano de la viga es igual a $l = 2{,}6$ m. El tirante forma con la viga un ángulo $\alpha = \pi/6$ rad. La tensión admisible es $[\sigma] = 160$ MPa.

6.32. Una fuerza de tracción $N = 18$ kN actúa sobre una de las barras tubulares de una armadura. El diámetro exterior de esta barra es $d = 40$ mm y el interior, $d_1 = 30$ mm. Además una carga uniformemente repartida de intensidad $q = 200$ kN/m provoca flexión

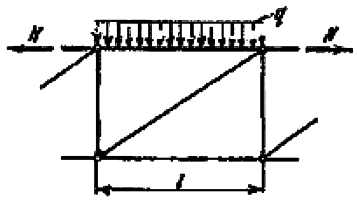
en dicha barra. Comprobar la resistencia de la barra, considerando articulados los nudos de la armadura si la tensión admisible es $[\sigma] = 160$ MPa. La disminución de la flecha bajo la acción de la fuerza N se desprecia. La longitud de la barra es $l = 150$ cm.



Para el problema 6.30

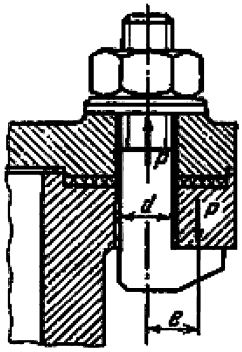


Para el problema 6.31

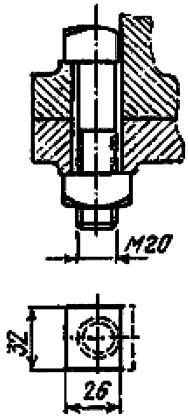


Para el problema 6.32

6.33. Un perno de diámetro $d = 25$ mm tiene la cabeza en forma de L y al enroscarlo la tuerca se somete a una carga excéntrica, como está representado en la figura. Determinar la tensión en el perno, si la fuerza de apriete del perno es igual a $P = 5$ kN y la excentricidad es $e = 2{,}5$ cm.



Para el problema 6.33



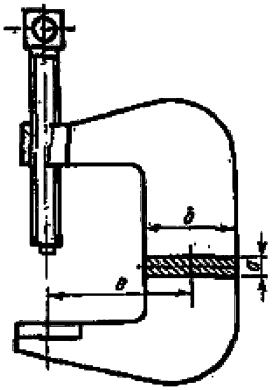
Para el problema 6.34

6.34. Parte de la cabeza de un perno está cortada (como está representado en la figura). ¿De qué modo crecerán las tensiones normales en la sección transversal del perno como resultado de la variación de la forma de su cabeza? El diámetro de cálculo es igual a $d_1 = 18$ mm. Considerar que la línea de acción de la fuerza de tracción pasa por el centro de gravedad de la superficie de apoyo de la cabeza del perno.

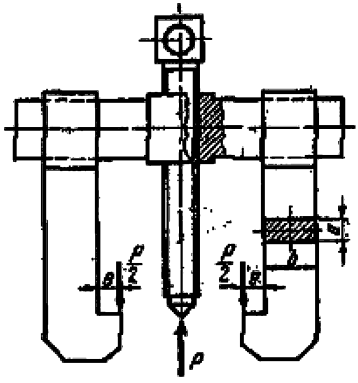
6.35. Determinar la dimensión b de la sección del cuerpo de una mordaza de rosca para sujetar piezas con una fuerza $P = 16$ kN, si $[\sigma] = 100$ MPa, $a = 2$ cm, $e = 14$ cm.

6.36. Determinar la fuerza máxima P que puede ser admitida sobre un desmontador destinado a quitar piezas de árboles siempre

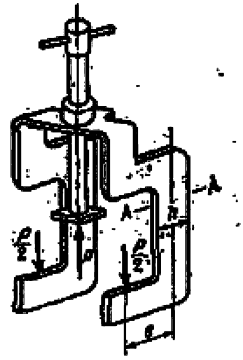
que las tensiones máximas en los agarradores del desmontador no sobrepasen $[\sigma] = 160$ MPa. La sección de los agarradores tiene las dimensiones siguientes: $a = 2$ cm, $b = 5$ cm, el ancho de los salientes es $e = 2$ cm.



Para el problema 6.35



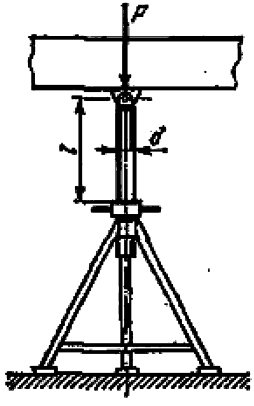
Para el problema 6.36



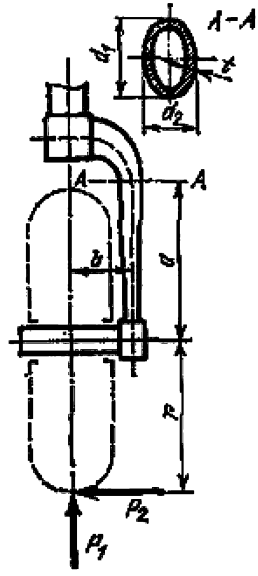
Para el problema 6.37

6.37. Determinar el área F de la sección rectangular AA de una grapa destinada a enderezar las zapatas curvadas del larguero del ala de avión. La tensión admisible es $[\sigma] = 160$ MPa. La fuerza máxima creada por la grapa es igual a $P = 36$ kN. La excentricidad es $e = 2h$.

6.38. Un gato está instalado de tal modo que el eje del tornillo se desvía de la vertical a un ángulo $\beta = 0{,}0174$ rad. Calcular cuántas



Para el problema 6.38

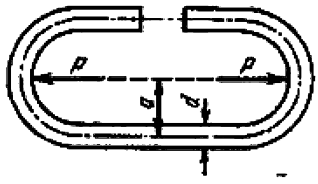


Para el problema 6.39

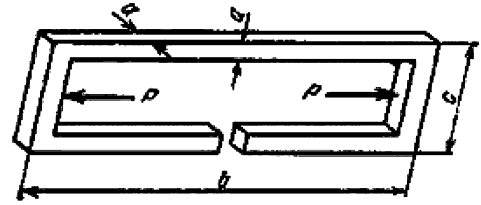
veces la tensión normal máxima en la sección más peligrosa del tornillo será mayor que su tensión cuando $\beta = 0$. La longitud del tornillo es $l = 8d_1$, donde d_1 es el diámetro de la sección de cálculo del tornillo.

6.39*. Determinar la tensión máxima en la sección AA de una semihorquilla de fijación de la rueda al soporte elástico del tren durante el aterrizaje del avión con deriva lateral. La carga de cálculo en el plano de la semihorquilla viene dada por una fuerza vertical $P_1 = 125$ kN y una fuerza lateral $P_2 = 25$ kN. La sección de la semihorquilla es hueca elíptica. Las dimensiones son: $a = 40$ cm, $b = 15$ cm, $r = 35$ cm, $d_1 = 10$ cm, $d_2 = 6$ cm, $t = 0{,}5$ cm.

6.40. Una brida está hecha de una barra de acero circular, $d = 60$ mm, $a = 70$ mm. Determinar la fuerza de tracción máxima P. La tensión admisible es $[\sigma] = 140$ MPa.



Para el problema 6.40

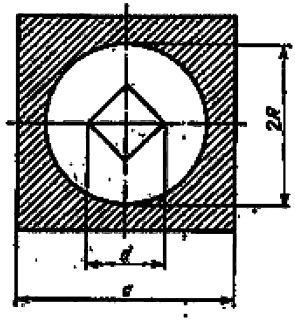


Para el problema 6.41

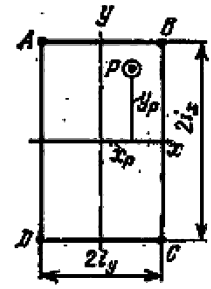
6.41. Una brida de forma rectangular se estira por una fuerza P. La sección de la brida representa un cuadrado de lado $a = 0{,}5$ cm. Las dimensiones son: $b = 3$ cm, $c = 9{,}5$ cm. Determinar el valor admisible de la fuerza P, si $[\sigma] = 160$ MPa.

6.42. Determinar el núcleo de la sección de un círculo de radio $R = 50$ cm; de un rectángulo de dimensiones $b = 20$ cm, $h = 38$ cm; de una viga doble T N° 27.

6.43. Calcular la diagonal d del cuadrado que representa el núcleo de la sección de una barra hueca cuyo contorno exterior de la



Para el problema 6.43



Para el problema 6.44

sección es un cuadrado de lado $a = 68$ cm y el interior es un círculo de radio $R = 25$ cm.

6.44*. Determinar la posición del eje neutro de una barra sometida a tracción excéntrica. Los radios de giro de la sección de la barra son: $i_x = 5$ cm, $i_y = 3$ cm. Las coordenadas del punto de aplicación de la fuerza longitudinal en el plano de la sección de la barra son: $x_p = 1{,}6$ cm, $y_p = 3{,}7$ cm.

6.45*. Construir el núcleo de la sección para un rectángulo de $b = 6$ cm, $h = 10$ cm.

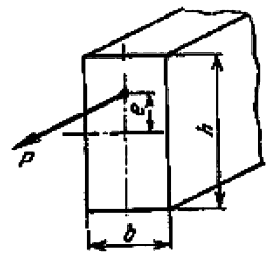
§ 3. Estado límite de una barra sometida simultáneamente a flexión y tracción

6.46*. Definir la dependencia entre el momento flector M y la fuerza longitudinal N que soporta una barra de sección rectangular en estado límite. Son conocidos los valores del momento de fluencia M_{fl} (momento flector límite que puede aguantar la barra en ausencia de la fuerza axial) y la fuerza longitudinal de fluencia N_{fl} (fuerza de tracción límite en ausencia del momento flector).

6.47*. Establecer la dependencia entre el momento flector M y la fuerza longitudinal N que resiste una barra de sección circular si son conocidos el momento de fluencia M_{fl} y la fuerza longitudinal de fluencia N_{fl} (véase el problema 6.46).

6.48. Hallar el valor límite del momento flector M en una barra de sección cuadrada en presencia de la fuerza de tracción longitudinal $N = 0{,}5\ N_{fl}$ (véase el problema 6.46). El lado de la sección es $a = 5$ cm. El límite de fluencia $\sigma_{fl} = 360$ MPa.

6.49. Calcular el valor límite de la fuerza de tracción N que es capaz de soportar una barra de sección circular en presencia del momento flector $M = 0{,}75\ M_{fl}$ (véase el problema 6.46). El diámetro de la sección es $d = 2$ cm. El límite de fluencia, $\sigma_{fl} = 400$ MPa. Aprovechar la solución del problema 6.47.



Para el problema 6.51

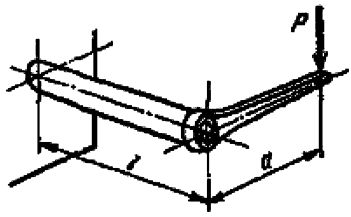
6.50. Determinar la excentricidad e de una barra de sección cuadrada en estado plástico límite sometida a tracción excéntrica por una fuerza $P = 10$ kN. Viene dado: $M_{fl} = 0{,}7$ kN·m, $N_{fl} = 20$ kN (véase el problema 6.46).

6.51. Hallar el valor límite de la fuerza P que estira una barra de sección rectangular de dimensiones: $b = 2$ cm, $h = 3$ cm con la excentricidad $e = 1$ cm. El límite de fluencia es $\sigma_{fl} = 400$ MPa.

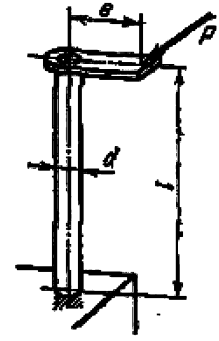
§ 4. Flexión con torsión

6.52*. Un árbol con manivela está sometido a la acción de una fuerza $P = 3{,}5$ kN. Determinar el diámetro d del árbol a partir de la tercera teoría de resistencia, si $[\sigma] = 160$ MPa, $l = 50$ cm, $a = 10$ cm.

6.53. Una barra de diámetro $d = 4$ cm y longitud $l = 80$ cm está sometida a la acción de una fuerza $P = 1$ kN aplicada a la distancia $e = 30$ cm de su eje. Comprobar por la III teoría la resistencia en la sección más peligrosa de la barra. $[\sigma] = 160$ MPa.



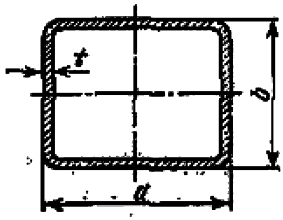
Para el problema 6.52



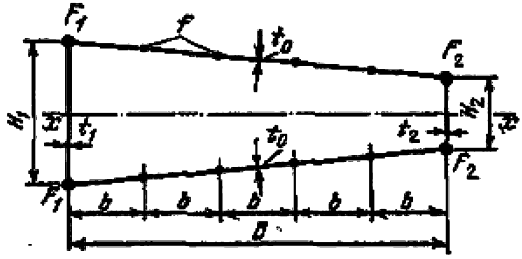
Para el problema 6.53

6.54*. Un árbol de sección circular está sometido a torsión por el momento $M_{tor} = 1{,}2$ kN·m y a flexión por el momento $M_f = 0{,}9$ kN·m. Determinar el diámetro d del árbol de conformidad con las teorías de resistencia I, II, III, IV; $[\sigma] = 100$ MPa.

6.55. Una barra de sección en forma de tubo rectangular de paredes delgadas está simultáneamente sometida a la acción de un momento flector $M_f = 8$ kN·m (en el plano vertical) y un momento torsor $M_{tor} = 12$ kN·m. Las dimensiones de la sección de la barra son: $a = 20$ cm, $b = 16$ cm, $t = 1$ cm. Comprobar la resistencia de la barra mediante la tercera teoría de resistencia, siendo $[\sigma] = 50$ MPa. Los redondeos en los ángulos de la sección se desprecian.



Para el problema 6.55

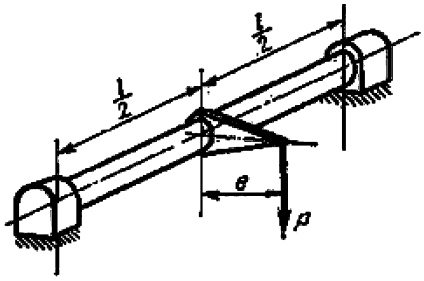


Para el problema 6.56

6.56*. En la sección de un ala de dos largueros de un avión (la punta y la cola de la sección se desprecian y no se muestran en la figura) de perfil simétrico actúan un momento flector $M_f = 35$ kN·m (en el plano vertical) y un momento torsor $M_{tor} = 18$ kN·m. La altura del larguero delantero es $H_1 = 40$ cm; la del trasero, $H_2 = 20$ cm. La distancia entre los largueros es $B = 5b = 100$ cm. Las áreas de las secciones de los cordones del larguero delantero son

iguales a $F_1 = 6$ cm^2; los del trasero, $F_2 = 3$ cm^2, los de los larguerillos, $f = 0{,}5$ cm^2. El grosor de la pared del larguero delantero es $t_1 = 3$ mm; la del trasero, $t_2 = 2$ mm, la del revestimiento es $t_0 = 5$ mm. Considerando que los centros de gravedad de las áreas F_1, F_2 y f se encuentran sobre el contorno de la sección del ala, se pide comprobar la resistencia del revestimiento por la tercera teoría de resistencia, siendo $[\sigma] = 85$ MPa.

6.57. Un árbol de sección circular, cuyos extremos están rígidamente empotrados, está sometido a la acción de una fuerza concentrada $P = 10$ kN, con una excentricidad $e = 10$ cm, en el centro del vano. Calcular el diámetro d del árbol por la tercera teoría de resistencia; $[\sigma] = 200$ MPa.



Para el problema 6.57

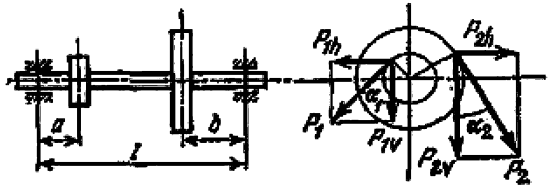
Para el problema 6.58

6.58*. Con ayuda de la tercera teoría de resistencia, comparar el peso de dos barras, una de sección circular y otra de sección cuadrada, sometidas a la acción de dos momentos flector M_f y torsor $M_{tor} = \frac{1}{3} M_f$, a partir de la condición de que son equirresistentes.

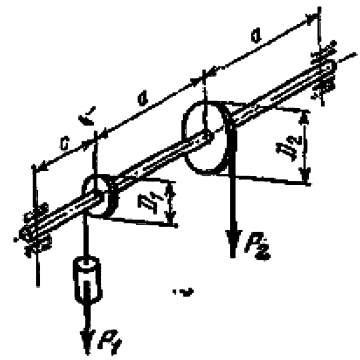
6.59*. ¿Qué relaciones deben existir entre el momento flector M_f y el momento torsor M_{tor} para que 1) una barra de sección circular y 2) una de sección cuadrada sean más resistentes? Se supone que las barras son de un mismo material y de pesos y longitudes iguales. La comparación debe ser efectuada a partir de la tercera teoría de resistencia.

6.60*. Un árbol tiene dos poleas cuyos radios son: $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 12$ cm. Los esfuerzos de los accionamientos P_1 y P_2 forman con la vertical los ángulos $\alpha_1 = \pi/4$ rad y $\alpha_2 = \pi/6$ rad. La frecuencia de rotación del árbol es igual a $n = 105$ rad/s. La potencia transmitida es $N = 36{,}9$ kW. Determinar el diámetro del árbol mediante la cuarta teoría de resistencia; $a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $l = 50$ cm, $[\sigma] = 120$ MPa.

6.61. En un árbol están montadas dos ruedas de diámetros $D_1 = 20$ cm y $D_2 = 50$ cm sometidas a la acción de dos fuerzas verticales $P_1 = 5$ kN y $P_2 = 2$ kN (como está representado en la figura). Determinar el diámetro del árbol por medio de la tercera teoría de resistencia; $[\sigma] = 100$ MPa, $a = 120$ cm.

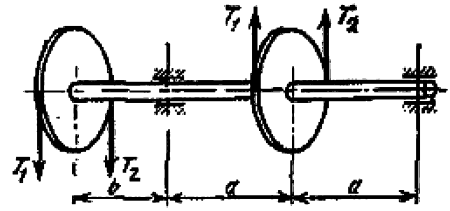


Para el problema 6.60

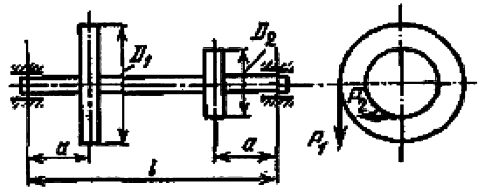


Para el problema 6.61

6.62. Dos poleas de un mismo diámetro $D = 60$ cm montadas en un árbol transmiten una potencia $N = 8{,}84$ kW a una frecuencia de rotación $n = 42$ rad/s. La tensión de la correa motriz es dos veces mayor que la de la correa conducida: $T_1 = 2T_2$. Viene dado: $a = 40$ cm, $b = 30$ cm, $[\sigma] = 100$ MPa. A partir de la segunda teoría de resistencia se pide determinar el diámetro d del árbol. El peso de las poleas y del árbol se desprecia.



Para el problema 6.62

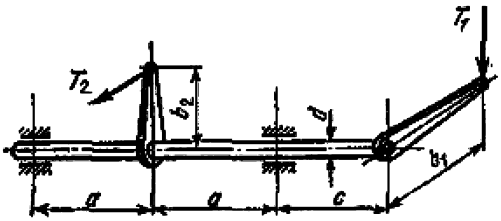


Para el problema 6.63

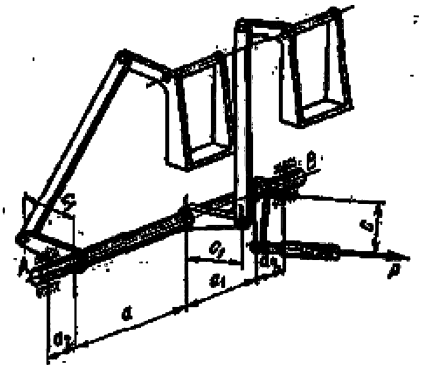
6.63. Dos poleas de diámetros $D_1 = 30$ cm y $D_2 = 15$ cm están montadas en un árbol de diámetro $d = 2{,}5$ cm. Los esfuerzos de mando P_1 y P_2 están dirigidos respectivamente vertical y horizontalmente. Por la cuarta teoría de resistencia determinar el momento torsor máximo admisible en el árbol si $[\sigma] = 100$ MPa; $l = 60$ cm, $a = 15$ cm.

6.64. Por la tercera teoría de resistencia definir el diámetro exterior del eje de sección tubular de la palanca de mando de un avión, si $[\sigma] = 100$ MPa. Las dimensiones de la palanca son: $a = 20$ cm, $c = 15$ cm, $b_1 = 40$ cm, $b_2 = 15$ cm. El esfuerzo aplicado a la palanca es $T_1 = 2$ kN. La relación entre el diámetro interior del tubo y el exterior es igual a 0,8. El rozamiento en los cojinetes se desprecia. La fuerza T_2 se halla de la condición de equilibrio del sistema.

6.65. Aplicando la tercera teoría de resistencia, determinar la fuerza admisible P en la barra que va hacia el timón de dirección



Para el problema 6.64



Para el problema 6.65

del avión, a partir de la resistencia del eje AB. El eje representa un tubo con diámetros exterior $d = 4$ cm e interior $d_1 = 3{,}6$ cm. Viene dado: $a = 40$ cm, $a_1 = 16$ cm, $a_2 = 6$ cm, $c = 12$ cm, $c_1 = 8$ cm, $[\sigma] = 80$ MPa.

§ 5. Otros casos de resistencia compleja

6.66*. Mediante la tercera teoría de resistencia se pide determinar el diámetro necesario de un árbol, si en la sección más peligrosa actúan los momentos: flector $M_f = 0{,}6$ kN·m y torsor $M_{tor} = 0{,}2$ kN·m, así como la fuerza de tracción longitudinal $N = 19$ kN. La tensión admisible es $[\sigma] = 60$ MPa.

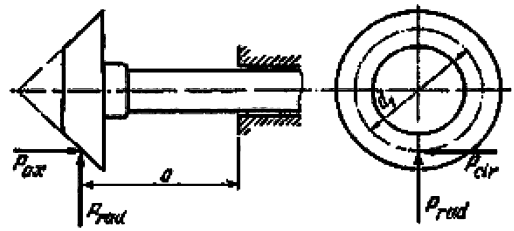
6.67. Un árbol hueco está sometido a la acción de una fuerza de compresión $N = 80$ kN, de un momento torsor $M_{tor} = 30$ kN·m y de un momento flector $M_f = 20$ kN·m. La relación entre el diámetro interior y el exterior es igual a 0,8. El diámetro exterior es $d = 16$ cm. Haciendo uso de la cuarta teoría de resistencia se pide comprobar la resistencia del árbol, si $[\sigma] = 160$ MPa.

6.68. El árbol hueco de un motor de avión transmite una potencia $N = 885$ kW a la hélice a una frecuencia de rotación $n = 115{,}5$ rad/s. El esfuerzo de tracción de la hélice es $T = 300$ kN. Comprobar la resistencia del árbol a partir de la tercera y cuarta teorías de resistencia, si $[\sigma] = 130$ MPa. Los diámetros del árbol son: el exterior $D = 12$ cm, el interior $d = 10$ cm.

6.69. El árbol tubular de un motor transmite una potencia $N = 221$ kW a una frecuencia de rotación $n = 105$ rad/s. El esfuerzo de tracción es $T = 100$ kN. Determinar el diámetro d del árbol por la tercera teoría de resistencia, si $[\sigma] = 160$ MPa. La relación entre el diámetro interior y el exterior es igual a 0,6.

6.70. Una rueda dentada cónica está montada sobre la parte en voladizo del árbol tubular de un reductor. Esta rueda dentada está sometida a la acción de tres fuerzas $P_{ctr} = 1{,}8$ kN, $P_{rad} = 0{,}6$ kN y $P_{axial} = 0{,}3$ kN (como está representado en la figura). Desprecian-

do las tensiones de compresión, que son resultado de la acción de las fuerzas longitudinales P_{axial} sobre la sección del árbol, se pide determinar el diámetro exterior de éste a partir de la tercera teoría de

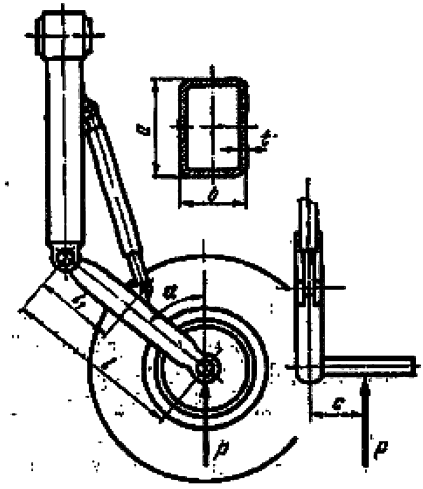


Para el problema 6.70

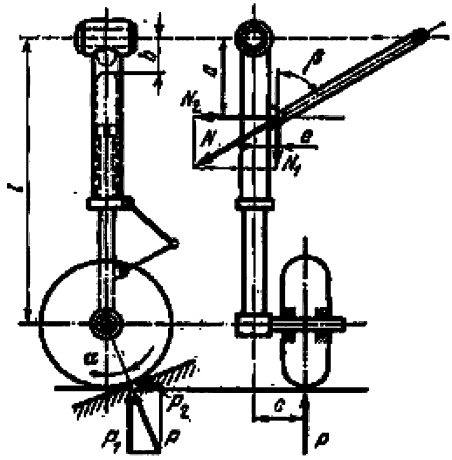
resistencia, si $[\sigma] = 100$ MPa. La relación entre el diámetro interior del árbol y el exterior es igual a 0,8. Viene dado: $d_1 = 7$ cm, $a = 5$ cm.

6.71*. Mediante la tercera teoría de resistencia, determinar la dimensión del lado de la sección cuadrada de una barra sometida a la acción de una fuerza de tracción axial $P = 20$ kN y de un momento torsor $M_{tor} = 0{,}1$ kN·m. La tensión admisible es $[\sigma] = 100$ MPa.

6.72*. Sobre la rueda de un avión parado actúa una fuerza vertical $P = 80$ kN. Haciendo uso de la tercera teoría de resistencia, de-



Para el problema 6.72



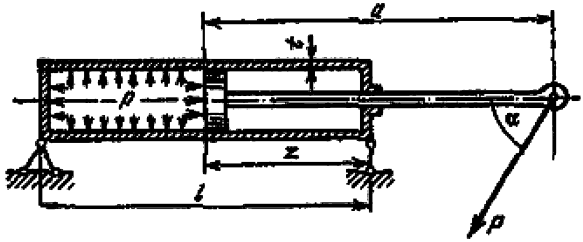
Para el problema 6.73

terminar cuántas veces debe ser aumentada la fuerza P para que la palanca de fijación de la rueda a la pata del tren de aterrizaje, fabricada de acero con un límite de resistencia a la rotura igual a $\sigma_r = 120$ MPa, se rompa por la sección más peligrosa. Las dimensiones de la palanca son: $l = 66$ cm, $l_1 = 30$ cm, $c = 20$ cm. El eje de la palanca forma con la vertical un ángulo $\alpha = 0{,}698$ rad. La sección de

la palanca es un rectángulo de paredes delgadas cuyos lados son: $a = 12$ cm, $b = 8$ cm, $t = 6$ mm.

6.73*. Mediante la tercera teoría de resistencia, se pide comprobar la resistencia del cilindro del amortiguador de la pata de un avión cuando ésta está sometida a la acción de una carga $P = 70$ kN dirigida hacia el eje de la rueda. El diámtero exterior del cilindro es $d = 75$ mm; el interior, $d_1 = 65$ mm. La tensión admisible es $[\sigma] = 1200$ MPa. Las dimensiones son: $a = 25$ cm, $b = 10$ cm, $c = 15$ cm, $e = 7$ cm, $l = 90$ cm, $\alpha = 20°$, $\beta = 60°$.

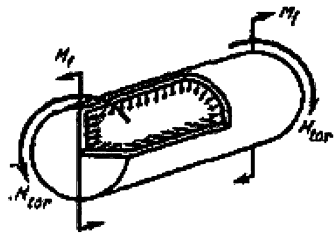
6.74*. El gas comprimido en un cilindro a una presión $p = 2{,}5$ MPa es mantenido por la fuerza P que actúa sobre el extremo



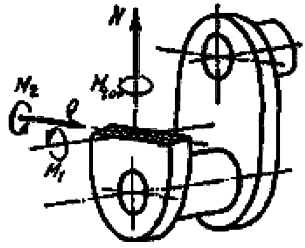
Para el problema 6.74

libre de la varilla del émbolo a un ángulo $\alpha = \pi/3$ rad respecto a su eje. El diámetro exterior del cilindro es $D = 6$ cm; el interior, $d = 5$ cm. El grosor de la pared del cilindro es $t = 0{,}5$ cm. Las longitudes del cilindro y de la varilla son: $l = 50$ cm, $a = 60$ cm. El émbolo está introducido en el cilindro a una longitud $z = 25$ cm. Por la tercera teoría de resistencia, calcular la tensión máxima en el cilindro y compararla con la admisible $[\sigma] = 160$ MPa.

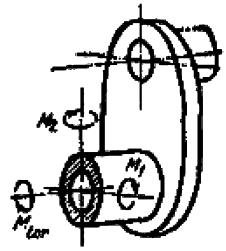
6.75. Un recipiente cilíndrico está simultáneamente sometido a la acción de una presión interior $p = 6$ MPa, de un momento flector $M_f = 2$ kN·m y de un momento torsor $M_{tor} = 5$ kN·m. Comprobar la resistencia del recipiente en el punto más peligroso de la sección transversal. Su diámetro exterior es $D = 10$ cm. El grosor de la pared, $t = 5$ mm. La tensión admisible, $[\sigma] = 160$ MPa.



Para el problema 6.75



Para el problema 6.76



Para el problema 6.77

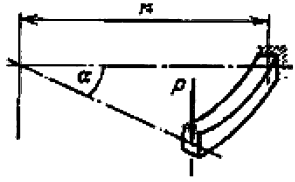
6.76*. Sobre la sección del codo del cigüeñal de un motor actúan: en los planos de la mayor y menor rigidez, momentos flectores respec-

tivamente iguales a $M_1 = 0{,}7$ kN·m y $M_2 = 1{,}5$ kN·m, un momento torsor $M_{tor} = 0{,}45$ kN·m, una fuerza cortante en el plano de mayor rigidez $Q = 25$ kN y una fuerza de tracción $N = 37$ kN. La sección del codo representa un rectángulo cuyos lados son: $a = 10$ cm, $b = 2{,}5$ cm. Mediante la cuarta teoría de resistencia, se pide comprobar la resistencia del codo, considerando $[\sigma] = 140$ MPa.

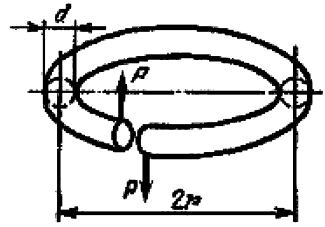
6.77. En la sección transversal del muñón de biela del cigüeñal actúan: un momento torsor $M_{tor} = 2{,}9$ kN·m y dos momentos flectores $M_1 = 0{,}7$ kN·m y $M_2 = 1{,}1$ kN·m en planos mutuamente perpendiculares. El diámetro exterior del muñón es $D = 6{,}6$ cm y el interior, $d = 4{,}2$ cm. Mediante la cuarta teoría de resistencia, comprobar la resistencia del muñón, considerando $[\sigma] = 140$ MPa.

§ 6. Barras de ejes curvilíneos

6.78*. En el extremo de una viga curvilínea plana en voladizo, cuyo eje representa el arco de una circunferencia de radio $r = 50$ cm con un ángulo central $\alpha = \pi/3$ rad, está aplicada una carga $P = 10$ kN. Mediante la tercera teoría de resistencia se pide determinar la dimensión a de la sección cuadrada, si $[\sigma] = 160$ MPa.



Para el problema 6.78

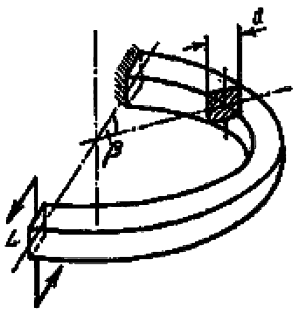


Para el problema 6.79

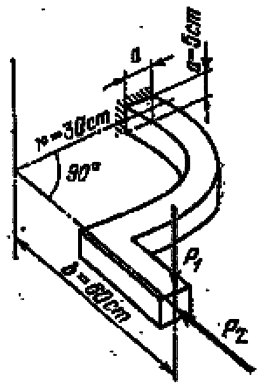
6.79. Un aro circular cortado de sección redonda está sometido a la acción de dos fuerzas $P = 0{,}6$ kN. Se pide, por medio de la tercera teoría, comprobar la resistencia del aro. Viene dado: $r = 10$ cm, $d = 20$ mm, $[\sigma] = 160$ MPa. Considerar el ancho del corte muy pequeño.

6.80. El extremo de una barra curvilínea, cuyo eje representa una semicircunferencia, se encuentra empotrado. En su otro extremo actúa un momento $L = 3{,}5$ kN·m. Indicar la coordenada β de la sección más peligrosa de la barra. Determinar la dimensión a de la sección cuadrada de la barra a partir de la tercera teoría de resistencia. $[\sigma] = 160$ MPa.

6.81. Sobre la viga en voladizo que muestra la figura actúan las fuerzas $P_1 = 2$ kN y $P_2 = 3$ kN. El trazado de su parte curva representa un cuarto de circunferencia. Calcular las tensiones máximas de compresión en la sección más peligrosa.

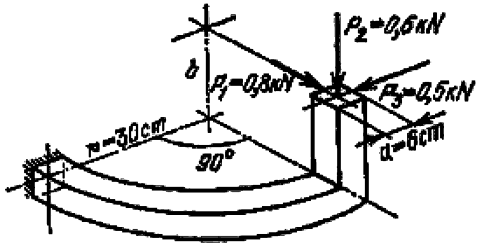


Para el problema 6.80

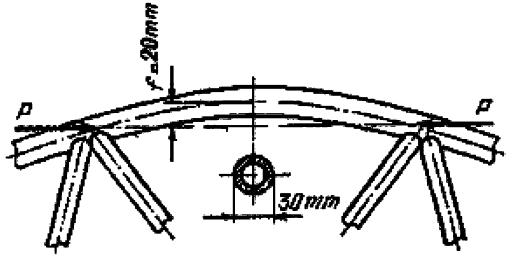


Para el problema 6.81

6.82. Calcular las tensiones normales máximas en la sección más peligrosa de una barra. El eje de la parte curvilínea describe el arco de una circunferencia. La sección de la barra es cuadrada.



Para el problema 6.82

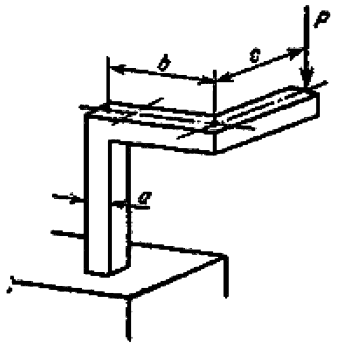


Para el problema 6.83

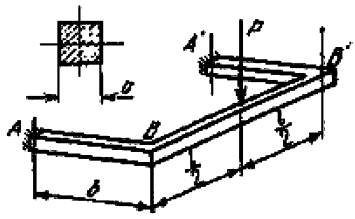
6.83. El cordón superior de una armadura plana hecho de un tubo curvo, cuya pared es de espesor $t = 2$ mm, está sometido a la acción de una fuerza $P = 8$ kN. Determinar la tensión máxima en el cordón.

§ 7. Barras de eje quebrado

6.84. Una barra quebrada de sección cuadrada tiene empotrado uno de sus extremos y una carga P en el extremo libre. Mediante la tercera teoría de resistencia, se pide determinar el valor admisible de la fuerza P. Viene dado: $a = 20$ mm, $b = 20$ cm, $c = 12$ cm, $[\sigma] = 160$ MPa.

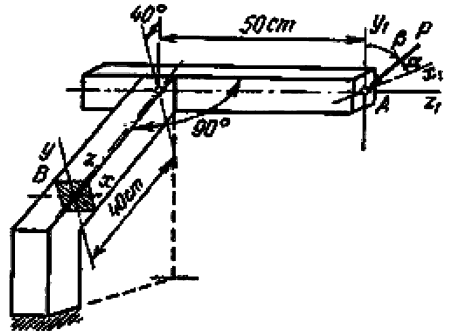


Para el problema 6.84



Para el problema 6.85

6.85*. Haciendo uso de la tercera teoría de resistencia se pide determinar la fuerza admisible P que actúa sobre una brida rectangular. La brida es de sección cuadrada. Viene dado: $a = 20$ mm, $b = 12$ cm, $l = 20$ cm, $[\sigma] = 160$ MPa, $G = 0{,}4\,E$.



Para el problema 6.86

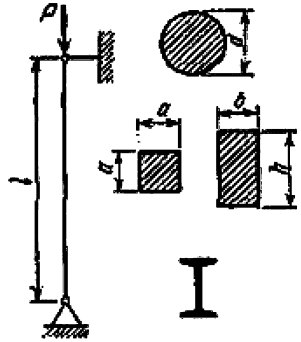
6.86*. El extremo libre A de una barra quebrada en voladizo está cargado con una fuerza $P = 10$ kN. En la sección B se pide determinar la fuerza longitudinal N, los momentos flectores M_x y M_y, el momento torsor M_{tor} y las fuerzas cortantes Q_x y Q_y. Los ángulos de inclinación de la fuerza P respecto a los ejes x_1, y_1 son $\alpha = \pi/3$ rad, $\beta = 0{,}8726$ rad.

CAPÍTULO 7

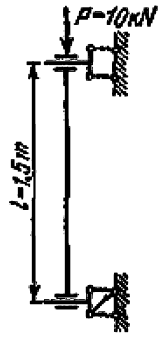
ESTABILIDAD DE BARRAS Y DE SISTEMAS DE BARRAS

§ 1. Estabilidad de las barras dentro de los límites de elasticidad

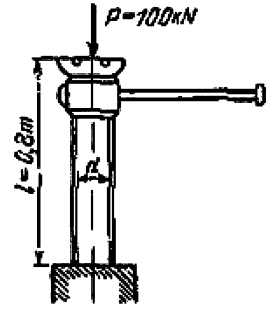
7.1. Una barra de acero con apoyos articulados en los extremos está sometida a compresión axial por una fuerza P. Determinar las dimensiones de la sección de esta barra, de longitud l, hasta las cuales el cálculo se puede efectuar por la fórmula de Euler y hallar la carga admisible en los casos siguientes: a) la sección es circular, $l = 1{,}2$ m, $d = 30$ mm; b) la sección es cuadrada, $l = 1{,}2$ m, $a = 30$ mm; c) la sección es rectangular, $l = 1{,}2$ m, $h/b = 2$, $b = 25$ mm, d) la sección es de doble T, $l = 1{,}9$ m, el perfil es el N° 16. Considerar que el módulo de elasticidad del material es $E = 2{,}1 \times 10^5$ MPa; el límite de proporcionalidad, $\sigma_{prop} = 190$ MPa; el factor de reserva de estabilidad, $n = 2$.



Para el problema 7.1



Para el problema 7.2



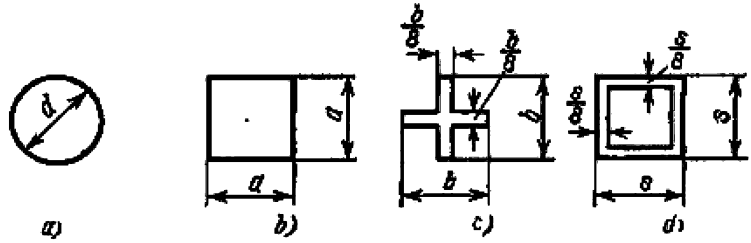
Para el problema 7.3

7.2. Los extremos de una barra comprimida están apoyados en charnelas cilíndricas: en un plano (plano del dibujo) la barra está rígidamente empotrada y en el otro (perpendicular al plano del dibujo), tiene apoyos articulados. Determinar las dimensiones de la sección rectangular de la barra, si ésta es igual de estable en ambos planos, y la reserva de estabilidad es igual a $n = 2$, $\sigma_{prop} = 200$ MPa, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

7.3. Determinar el diámetro interior d del tornillo de un gato a partir del cálculo de estabilidad si el factor de reserva es igual a $n = 3{,}5$. Se supone que $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{prop} = 240$ MPa. Se

considera que el extremo superior del tornillo se desplaza libremente. La influencia del roscado se desprecia.

7.4. Comparar el peso de cuatro columnas de igual estabilidad, si éstas están sometidas a la acción de fuerzas longitudinales, con las siguientes secciones: a) circular, b) cuadrada, c) en cruz, d) cuadrada tubular. Las condiciones de fijación de los extremos, las longitudes y el material de las columnas son iguales. Las tensiones críticas permanecen dentro de los límites de proporcionalidad.



Para el problema 7.4

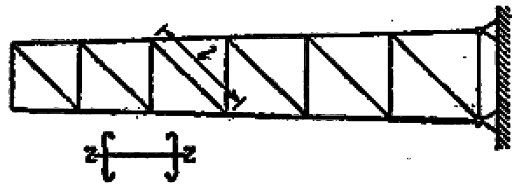
7.5. La biela de un motor de barco que trabaja con inflamación del combustible por compresión debe ser calculada a la estabilidad. El esfuerzo de compresión de cálculo a la presión máxima de los gases es igual a 160 kN. La longitud de la biela es 0,9 m. Determinar las dimensiones de la sección de la biela en dos casos: a) la sección es maciza, circular, de diámetro d, b) la sección es tubular, con una relación entre el diámetro interior de ésta y el exterior $d_{int}/d_{ext} = 0{,}65$. Hallar la relación entre el peso de la parte cilíndrica de la barra maciza y el de la barra tubular.

El material es acero aleado; $E = 2{,}15 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{prop} = 540$ MPa. El factor de reserva de estabilidad se considera igual a 3,5. Se supone que los extremos de la biela están articulados en el plano de su movimiento.

7.6. Una barra de sección transversal circular con apoyos articulados se encuentra comprimida por una fuerza $P = 50$ kN. La longitud de la barra es $l = 1$ m. La reserva de estabilidad es igual a $n = 2$. El material es duraluminio. La densidad es $\rho_{dur} = 2700$ kg/m^3, $E_{dur} = 0{,}72 \cdot 10^5$ MPa. 1). Hallar la masa de la barra. 2). ¿Cuántas veces aumentará la masa, si la barra de duraluminio se sustituye por una de acero de igual longitud con la misma reserva de estabilidad? $\rho_{ac} = 7850$ kg/m^3, $E_{ac} = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa.

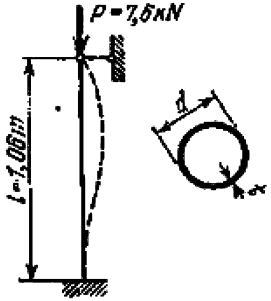
7.7. La diagonal comprimida de una armadura de duraluminio tiene un perfil doble T bulboso. La longitud de la barra es $l = 0{,}8$ m. Suponer que los extremos de la diagonal están semiempotrados, considerando que el coeficiente de reducción de la longitud en la fórmula de Euler es igual a $1/\sqrt{2}$. El momento de inercia mínimo de la sección es $J_z = 7{,}46$ cm^4, el área de la sección es $F = 7{,}04$ cm^2,

$E = 0{,}74 \cdot 10^5$ MPa, el límite de proporcionalidad es $\sigma_{prop} = 270$ MPa. Determinar la fuerza crítica.

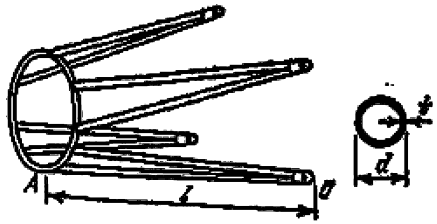


Para el problema 7.7

7.8. Un tubo de duraluminio ($E = 0{,}7 \cdot 10^5$ MPa) está sometido a la acción de una carga de compresión P. Determinar el diámetro d del tubo, si la relación entre el diámetro y el grosor t de la pared es $d/t = 25$. El límite de proporcionalidad es $\sigma_{prop} = 270$ MPa, la reserva de estabilidad es igual a $n = 2$.



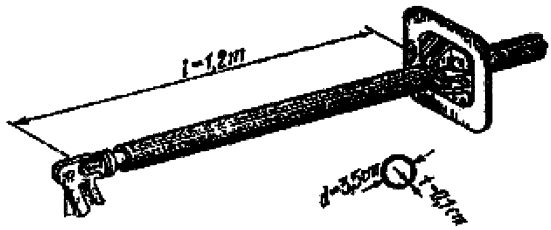
Para el problema 7.8



Para el problema 7.9

7.9. La barra comprimida AB del bastidor de la suspensión del motor en un avión representa un tubo de longitud $l = 1{,}4$ m con una relación entre el diámetro y el grosor de la pared $d/t = 32$ y debe ser calculada a los efectos de la fuerza crítica $P_{cr} = 32$ kN. Suponer que los extremos están articulados; $E = 2{,}2 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{prop} = 500$ MPa. Determinar las dimensiones de la sección.

7.10. Un eslabón de la varilla de mando del timón de altura en el avión transmite un esfuerzo de compresión. Este eslabón es tubular



Para el problema 7.10

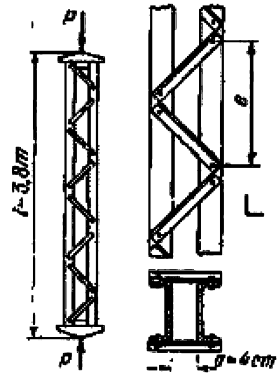
de duraluminio; la longitud y las dimensiones de su sección están indicadas en la figura. Determinar la fuerza crítica, si $E = 0{,}7 \times$ $\times 10^5$ MPa y $\sigma_{prop} = 200$ MPa.

7.11*. Un pilar comprimido está compuesto de dos perfiles en U N° 10. Los perfiles están unidos por riostras diagonales; $E =$ $= 2 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{prop} = 220$ MPa. Determinar la fuerza crítica P_{cr}, despreciando la influencia de la fuerza cortante.

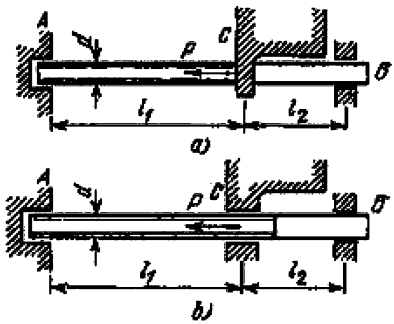
Hallar la longitud máxima admisible del panel e a partir de la igualdad de la reserva de estabilidad del pilar entero y de una rama del panel. Valorar la influencia de la fuerza cortante en la magnitud de la carga crítica, si las riostras están hechas de angulares $20 \times$ $\times 30 \times 3$ inclinados respecto al eje del pilar a un ángulo $\alpha = 45°$. Los extremos del pilar están articulados.

7.12. Una barra de sección doble T N° 12 con apoyos articulados se comprime por una fuerza $P = 500$ kN. La longitud de la barra es igual a $l = 1$ m, $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_r = 1100$ MPa, $\sigma_{prop} =$ $= 750$ MPa.

Calcular y comparar el factor de seguridad n_{seg} y e coeficiente de reserva de estabilidad n_{est}.



Para el problema 7.11



Para el problema 7.13

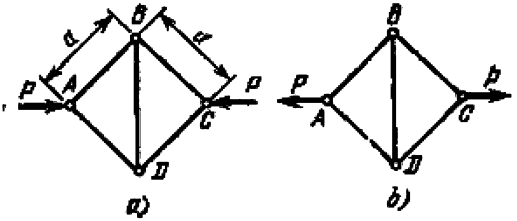
7.13*. El husillo de guía AB de una fresadora de roscas recibe un esfuerzo de avance transmitido a éste por una herramienta cortante a través de la tuerca C que se desplaza a lo largo de aquél. Debe ser calculada la estabilidad del husillo, suponiendo que la tuerca se encuentre en la posición extrema derecha, a la distancia l_2 del apoyo B y transmita una fuerza de compresión P al tramo l_1 del husillo AC. Determinar el diámetro interior d del husillo en dos casos:

1) la tuerca es de longitud pequeña y debe considerarse como apoyo articulado intermedio (fig. a).;

2) la tuerca es de longitud grande por lo que el husillo debe ser considerado empotrado en ella (fig. b). Los extremos A, B del husillo

en ambos casos han de considerarse articulados. Viene dado: $P = 9$ kN, el factor de reserva de estabilidad es igual a $n = 3{,}5$, $l_1 = 1{,}5$ m, $l_2 = 0{,}5$ m. El material es acero, $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{prop} = 280$ MPa. Durante el cálculo del momento de inercia de la sección la influencia del roscado se desprecia.

7.14. Cuatro barras elásticas de igual longitud a forman el mecanismo articulado $ABCD$ fijado por la barra diagonal BD. La construcción está sometida a la acción de fuerzas P dirigidas por la diagonal AC hacia dentro del contorno, en un caso (a), y hacia fuera de éste,



Para el problema 7.14

en otro caso (b). Todas las barras son de igual rigidez EJ. ¿Cuál debe ser el valor mínimo de la fuerza P para que algunos elementos de la construcción pierdan su estabilidad?

7.15. Durante la determinación experimental del valor de la flecha adicional f_{ad} en el centro de una barra articulada comprimida fueron obtenidos los resultados siguientes: a la carga $P_1 = 1$ kN le correspondió la flecha $f_{ad_1} = 1$ mm, a $P_2 = 3$ kN le correspondió $f_{ad_2} = 3{,}94$ mm, a $P_3 = 5$ kN le correspondió $f_{ad_3} = 9{,}6$ mm.

Determinar las dimensiones de la sección transversal rectangular de la barra, si su longitud es $l = 0{,}6$ m, la relación entre el grosor y el ancho es $h/b = 0{,}2$. El material es acero, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{prop} = 200$ MPa.

Indicación. Para determinar la carga crítica hace falta aprovechar la fórmula

$$f_{ad} = P_{cr} f_{ad}/P - f_0,$$

donde f_0 es la flecha inicial en el centro de la barra.

7.16. Los extremos de una barra de acero se articulan, a la temperatura de 316 K, a unos apoyos fijos. Luego la barra se calienta a toda su longitud. Determinar la temperatura que provoca en la barra el comienzo de la flexión longitudinal.

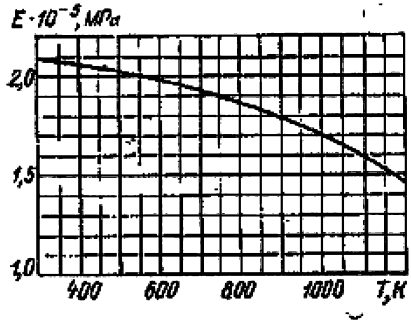
Comprobar si la deformación ε, correspondiente al momento de la pérdida de estabilidad, permanece dentro de los límites de elasticidad.

La sección de la barra es rectangular: 20×4 mm, su longitud es igual a 0,2 m, el coeficiente de dilatación lineal es $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa; la deformación elástica límite es $\varepsilon_{lim} = 1 \cdot 10^{-3}$.

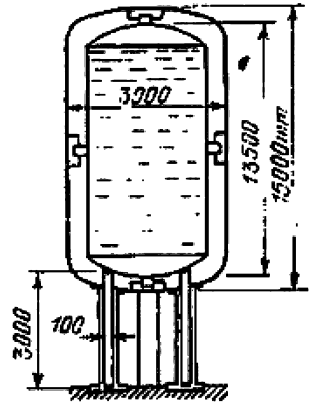
7.17. Una barra de apoyos articulados con sección circular, longitud $l = 0{,}5$ m y diámetro $d = 10$ mm está fabricada de una aleación resistente al calor. La fuerza de compresión que actúa sobre la barra es igual a $P = 3$ kN. El límite de proporcionalidad del material a $T = 1200$ K es $\sigma_{prop} = 300$ MPa. Los valores del módulo de elasticidad E se dan en el gráfico.

1) ¿En qué por ciento disminuirá la reserva de estabilidad, si la temperatura aumenta de 300 K a 600 K?

2) Hallar la temperatura límite que provoca en la barra la pérdida de su estabilidad.



Para el problema 7.17



Para el problema 7.18

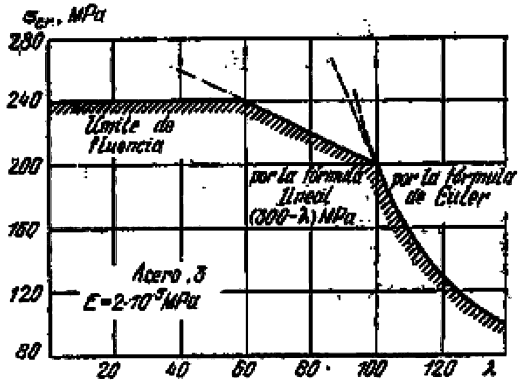
7.18*. La cubierta y el recipiente de un tanque cilíndrico vertical están apoyados sobre cuatro columnas. Los apoyos del tanque le impiden todo desplazamiento salvo los axiales. La masa del recipiente lleno de un producto criógeno es igual a $M = 100$ toneladas. Para compensar las deformaciones térmicas, las columnas de apoyo del recipiente poseen articulaciones esféricas en las partes superior e inferior. Las columnas están hechas de un tubo de 10 cm de diámetro.

Determinar el grosor h de éstas a partir de su estabilidad. Considerar que el coeficiente de irregularidad de la distribución de las cargas gravitacionales sobre las columnas es igual a $k = 2$. Se supone que el factor de reserva de estabilidad es igual a $n_{est} = 1.5$. El material de las columnas es acero, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{prop} = 240$ MPa.

§ 2. Estabilidad fras los límites de elasticidad

7.19. Una barra de longitud $l = 1{,}2$ m con los extremos articulados se comprime por la fuerza P. Hallar la carga admisible si la reserva de estabilidad es igual a $n = 2$ en los casos siguientes (véase la fig. del problema 7.1): 1) la sección es circular, $d = 60$ mm, 2) la

sección es cuadrada, $a = 45$ mm, 3) la sección es rectangular, $h/b = 2$, $b = 50$ mm, 4) la sección es de doble T, perfil N° 22a. El material es acero; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{prop} = 200$ MPa, $\sigma_{fl} = 240$ MPa.



Para el problema 7.19

Indicación. Cuando la flexión longitudinal se produce fuera de los límites de proporcionalidad ($\sigma_{cr} > \sigma_{prop}$), la tensión crítica σ_{cr} se calcula por la fórmula lineal

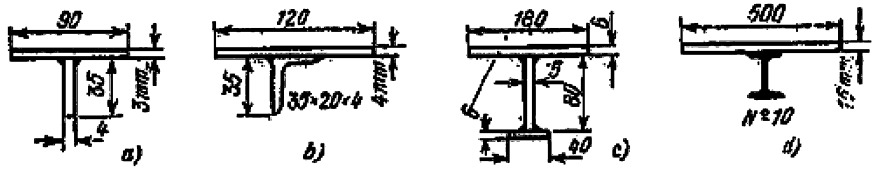
$$\sigma_{cr} = (300 - \lambda) \text{ MPa},$$

donde λ es la flexibilidad de la barra.

Si σ_{cr}, calculada por esta fórmula supera el límite de fluencia σ_{fl}, la tensión crítica se toma igual a σ_{fl}:

$$\sigma_{cr} = \sigma_{fl}.$$

7.20. Al calcular la resistencia del casco de un barco es necesario comprobar la estabilidad de su cubierta; en determinadas posiciones del barco con respecto a las crestas de las olas la cubierta resulta comprimida. Determinar la tensión crítica de los paneles compuestos por nervios de refuerzo dispuestos a lo largo del barco y franjas del revestimiento unidas a ellos.



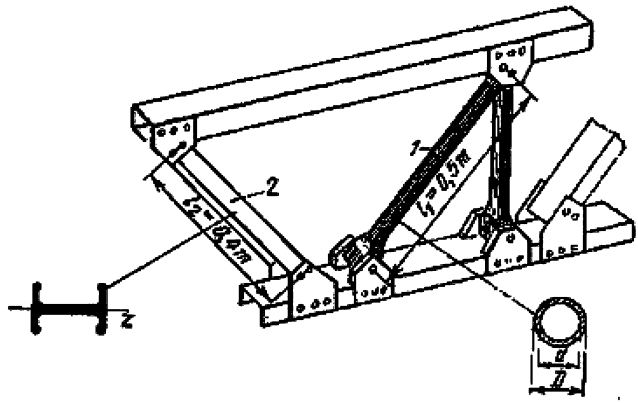
Para el problema 7.20

Los elementos son de acero, $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{fl} = 260$ MPa, $\sigma_{prop} = 220$ MPa. Si $\sigma_{cr} \leqslant \sigma_{fl}$ y $\sigma_{cr} > \sigma_{prop}$ debe utilizarse la fórmula $\sigma_{cr} = (320 - \lambda)$ MPa.

Las secciones de los paneles están representadas en las figs. a — — d; las longitudes de los paneles (espacios entre las cuadernas) son

iguales respectivamente a 0,7 m, 0,8 m, 1 m, 1,2 m. Considerar que los extremos de los paneles están articulados.

7.21. Las barras *1* y *2* de una armadura plana trabajan alternativamente a tracción y a compresión en función de la dirección de la carga exterior. La barra *1* (desmontable) está fabricada de acero aleado (acero al cromo-manganeso-silicio), cuya sección transversal es



Para el problema 7.21

un tubo 38/35. La barra *2* es de duraluminio y está hecha de un perfil prensado de sección doble T. El momento de inercia de la sección respecto al eje es $J_z = 5{,}10$ cm^4, el área de la sección es $F = 2{,}54$ cm^2. Considerar los extremos de las barras articulados. Determinar la fuerza crítica en flexión longitudinal.

Indicación. Calcular las tensiones críticas mediante las fórmulas lineales (en MPa):

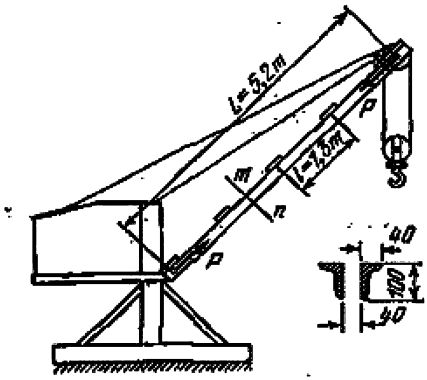
para el acero al cromo-manganeso—silicio $\sigma_{cr} = 1000 - 5{,}2\lambda$,
para el duraluminio $\sigma_{cr} = 400 - 3{,}33\lambda$.

7.22. El brazo de una grúa móvil de edificación consta de dos angulares 100 × 40 × 5. Los angulares están unidos por listones. Determinar la carga de compresión admisible sobre el brazo, examinando la estabilidad del brazo y la de un angular de longitud l entre dos listones. El factor de reserva de estabilidad es igual a $n = 5$.

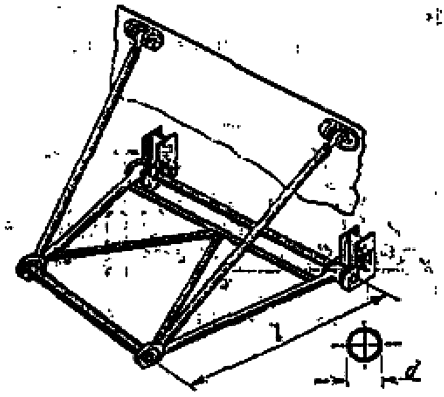
Considerar que los extremos del brazo están empotrados en el caso de flexión en el plano del reticulado y articulados cuando la flexión es perpendicular a este plano. Considerar que el angular dentro de los límites del panel tiene apoyos articulados. El material es acero. Al determinar la tensión crítica hacer uso de las indicaciones del problema 7.19. La influencia que ejerce la fuerza cortante sobre la carga crítica se desprecia.

7.23. La barra tubular de la bancada — soporte del motor de un avión está fabricada de acero al cromo-molibdeno. Las dimensiones de la sección transversal son: el diámetro exterior $d = 45$ mm, el diá-

metro interior $d_1 = 42$ mm. La longitud de la barra es $l = 0{,}8$ m. Determinar la fuerza crítica utilizando la fórmula $\sigma_{cr} = 1000 - 0{,}116\ \lambda^2$.



Para el problema 7.22



Para el problema 7.23

7.24. Determinar la carga crítica de una barra de sección rectangular con los extremos rígidamente empotrados. La longitud de la barra es $l = 0{,}8$ m; el grosor, $t = 2$ cm, el ancho, $b = 5$ cm. El material de la barra es acero pobre en carbono; $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{fl} = 280$ MPa, $\sigma_{prop} = 220$ MPa.

Indicación. Las tensiones críticas se determinan mediante la fórmula

$$\sigma_{cr} = \sigma_{fl} \frac{1 + \nu}{1 + \nu + \nu^2},$$

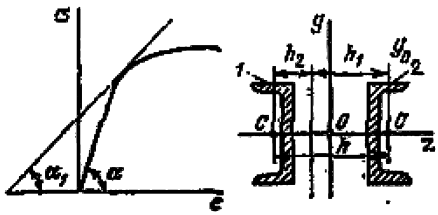
donde $\nu = \sigma_{fl}/\sigma_E$, $\sigma_E = \pi^2 E/\lambda^2$.

7.25. Una barra comprimida con apoyos articulados en sus extremos está compuesta de perfiles en U iguales, unidos entre sí con listones. Determinar el módulo resultante T y la posición del eje neutro cuando la flexión de la barra se produce alrededor del eje Oy (distancias h_1 y h_2), si el módulo de elasticidad en la zona de tracción es igual a E y el módulo «tangencial» en la zona de compresión es $E_{tang} = d\sigma/d\varepsilon$ o $E = tg\,\alpha$; $E_{tang} = tg\,\alpha_1$ (véase la figura). La distancia entre los centros de gravedad de los perfiles en U es igual a h.

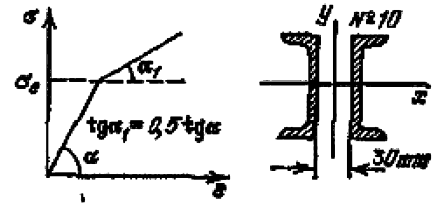
Al calcular el momento de inercia de toda la sección, el momento de inercia de la sección del perfil en U respecto a su eje central y_0 se desprecia. La influencia de la fuerza cortante igualmente se desprecia.

7.26. Un puntal comprimido de longitud $l = 2{,}6$ m compuesto de dos perfiles en U tiene los extremos articulados. Determinar la fuerza crítica, utilizando la fórmula obtenida en el problema 7.24, que contiene el módulo resultante T. La influencia de la fuerza cortante se desprecia.

El diagrama de compresión del material del puntal está representado en la figura por una línea quebrada, el módulo «tangencial» es al mismo tiempo igual a $E_{tang} = 0{,}5\ E$; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. Comparar el resultado con el valor de la fuerza crítica que se obtene por medio de la fórmula de Yasinski $\sigma_{cr} = (338{,}7 - 1{,}48\ \lambda)$ MPa, así como la que se obtiene (convencionalmente) por la fórmula de Euler.



Para el problema 7.25



Para el problema 7.26

7.27. Una armadura está compuesta de tubos de acero al cromo-manganeso-silicio con límite de resistencia a la rotura igual a 700 MPa. Una de las diagonales comprimidas es de longitud $l = 0{,}6$ m; el diámetro exterior es $d = 30$ mm, el grosor de la pared, $t = 1$ mm. Determinar la fuerza crítica, considerando que los extremos de la diagonal están articulados. Utilizar (convencionalmente) la fórmula del módulo resultante deducido en el problema 7.25. El módulo de elasticidad es $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa hasta el límite de elasticidad $\sigma_{elas} = 450$ MPa, y el módulo «tangencial» es $E_{tang} = 0{,}7\ E$ cuando la tensión es más alta. ¿Cuál será la fuerza crítica, si en la fórmula de cálculo el módulo T se sustituye por el módulo «tangencial» E_{tang}?

7.28. La carga crítica sobre una barra con extremos articulados es igual a $P_{cr} = 200$ kN. La longitud de la barra es $l = 0{,}4$ m. El material de la barra es acero; $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_r = 1\,100$ MPa, $\sigma_{prop} = 750$ MPa.

¿Cuántas veces aumentará la carga crítica, al aumentar el área de la sección transversal dos veces, si la sección de la barra es: a) cuadrada, b) circular, c) tubular, con una relación de diámetros $d/D = 0{,}8$?

Indicación. Si $\sigma_{cr} > \sigma_{prop}$ utilizar la fórmula

$$\sigma_{cr} = (1\,100 - 6{,}65\ \lambda)\ \text{MPa}.$$

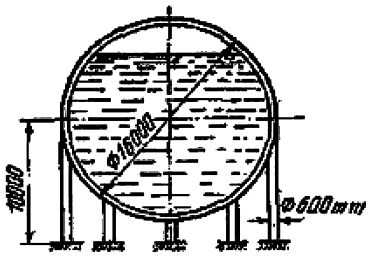
7.29. Es necesario fabricar una barra del duralumínio o acero al cromo-manganeso-silicio que soporte una carga de compresión $P = 400$ kN y sea de peso mínimo. La barra debe tener la sección transversal cuadrada y ser de longitud $l = 0{,}5$ m. Los extremos de la barra están rígidamente empotrados. Para el acero: $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_r = 1400$ MPa, $\sigma_{prop} = 750$ MPa, $\rho = 7850$ kg/m³, para el duraluminio: $E = 0{,}72 \times 10^5$ MPa, $\sigma_r = 400$ MPa, $\sigma_{prop} = 200$ MPa, $\rho = 2700$ kg/m³.

Seleccionar el material y hallar las dimensiones de la sección transversal de la barra.

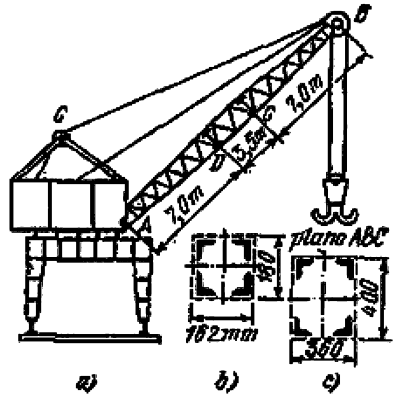
Indicación. Es preciso calcular las tensiones críticas mediante las fórmulas (en MPa):
para el acero $\sigma_{cr} = 1100 - 6{,}65\lambda$,
para el duraluminio $\sigma_{cr} = 400 - 3{,}33\lambda$.

§ 3. Cálculo de la estabilidad (flexión longitudinal) por las normas del diseño estructural

7.30*. Un tanque para guardar derivados del petróleo está apoyado en ocho columnas de sección tubular. La masa del tanque lleno del producto es igual a $M = 3500$ t. La longitud de una columna de apoyo es $l = 10$ m, su diámetro, $d = 0{,}6$ m. El recipiente y las columnas son de acero con una resistencia de cálculo igual al límite de fluencia $\sigma_{f.t} = 200$ MPa. El coeficiente de irregularidad en la distribución de los esfuerzos sobre las columnas es $k_{dis} = 2$. De acuerdo con los cálculos preliminares se eligió el grosor de la pared igual a 35 mm. Comprobar el coeficiente de seguridad de la contsrucción de apoyo a partir de los cálculos de la estabilidad (flexión longitudinal), utilizando la tabla de coeficientes φ de disminución de las tensiones admisibles. Al determinar la tensión admisible nominal, el coeficiente de seguridad según el límite de fluencia se debe considerar igual a $n_{f.l} = 1{,}5$. Comprobar la estabilidad de la construcción de apoyo, suponiendo que el coeficiente de seguridad mínimo es igual a 2.



Para el problema 7.30



Para el problema 7.31

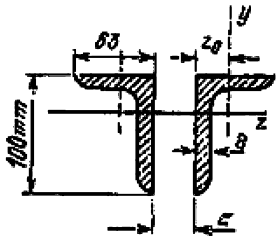
7.31*. El brazo AB de una grúa está compuesto por cuatro angulares equiláteros iguales unidos por una celosía. Las dimensiones exteriores de la sección del brazo en la parte media DG son constantes, pero hacia uno de los extremos las mismas disminuyen linealmente. Las dimensiones de la sección de la parte media están indicadas en la figura *c*, y las de los apoyos, en la fig. *b*. El brazo es de

acero, cuyo límite de fluencia es $\sigma_{f1} = 240$ MPa. Determinar el perfil del angular por medio del cálculo de la estabilidad, teniendo solamente en cuenta la acción de la fuerza axial de compresión $P = 225$ kN.

Al examinar la flexión del brazo en en plano ABC, considerar que sus extremos están articulados; si lo que se estudia es su flexión en el plano perpendicular al primero suponer que sus extremos están empotrados. La influencia de la fuerza cortante se desprecia.

Indicación. Al determinar la longitud reducida del brazo, teniendo en cuenta la variación del momento de inercia de la sección, hacer uso de la tabla 5 del anexo.

7.32. Una diagonal comprimida de la armadura de un puente se compone de dos angulares desiguales 100 × 63 × 8. Los angulares están unidos por listones. La longitud de la diagonal es igual a $l = 4{,}2$ m. Determinar la distancia (libre) a entre los angulares, si la reserva de estabilidad en el sentido de los ejes centrales principales permanece invariable. Hallar la carga admisible.



Para el problema 7.32

Los extremos de la diagonal se consideran semiempotrados (el coeficiente de reducción de la longitud es igual a $1/\sqrt{2}$). La influencia de la fuerza cortante se desprecia. El material de la armadura es acero con una tensión de cálculo igual al límite de fluencia $\sigma_{f1} = 280$ MPa. Considerar el factor de reserva de estabilidad igual a $n_{est} = 2$.

§ 4. Uso de métodos aproximados de cálculo de la estabilidad de barras y sistemas de barras

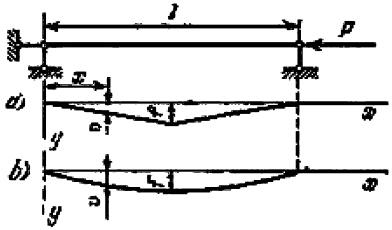
7.33*. Haciendo uso del método de aproximaciones sucesivas y comparando las flechas en el centro, determinar el valor aproximado de la fuerza crítica de una barra de sección constante con apoyos articulados en sus extremos.

Como línea básica del eje curvado de la barra pueden ser tomadas: a) la línea quebrada compuesta de dos segmentos rectos, como la representada en la figura *a*; b) la curva de flexión de la viga como resultado de la acción de una carga uniformemente distribuida (fig. *b*). Observar la variación de la forma de la línea elástica; comparar los datos con la solución exacta.

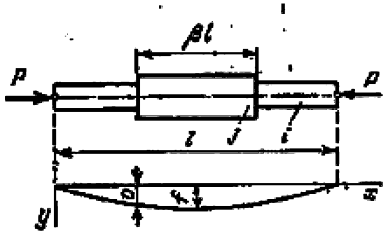
7.34*. Por el método energético, determinar el valor aproximado de la fuerza crítica de una barra con apoyos articulados en sus extremos, considerando que la línea elástica tiene la forma de: a) una parábola $v = c(lx - x^2)$; b) la curva de pandeo de una viga, por acción de una carga uniformemente distribuida $v = c(l^3x - 2lx^3 + x^4)$.

Resolver el mismo problema mediante el método de Bubnov — — Galerkin. Comparar los resultados con la solución exacta, así como con la solución mediante el método de aproximaciones sucesivas, si las curvas básicas se definen por las mismas ecuaciones.

7.35*. Determinar el valor aproximado de la fuerza crítica de una barra de rigidez EJ y longitud l, con apoyos articulados en sus extremos, usando el método de «catenaria articulada elástica», es decir, sustituyendo la barra elástica por unos cuantos elementos articulados elásticamente. El ángulo de giro recíproco de dos elementos contiguos a la articulación es proporcional al momento flector M, $\varphi = CM$. Al dividir la barra en n partes iguales, considerar el coeficiente C igual a $l/(nEJ)$.



Para el problema 7.33



Para el problema 7.36

Examinar los casos cuando $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.

7.36*. Una barra comprimida por fuerzas P está compuesta de varias partes cilíndricas de secciones transversales diferentes. Los momentos de inercia de las secciones de las partes extremas son iguales a l, el de la parte media es igual a J. Hallar la fuerza crítica, expresándola por la fórmula

$$P_{cr} = k^2 EJ/l^2,$$

donde k^2 es un coeficiente que depende de los parámetros de $\alpha = l/J$ y β. Resolver el problema por el método de aproximaciones sucesivas en dos suposiciones:

a) la curva inicial es una parábola

$$v = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2);$$

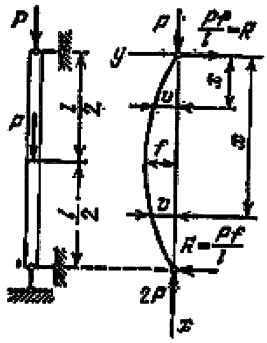
b) la curva inicial es una sinusoide

$$v = f \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}.$$

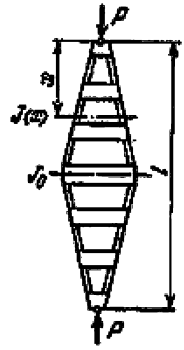
Determinar la fuerza crítica para los casos: 1) $\alpha = 0{,}2$; $\beta = 0{,}2$; 2) $\alpha = 0{,}4$; $\beta = 0{,}2$; 3) $\alpha = 0{,}6$, $\beta = 0{,}6$ y comparar el resultado con la solución exacta.

7.37*. Una barra de sección constante y longitud l, con apoyos articulados en los extremos, está comprimida por dos fuerzas igua-

les P, una de las cuales está aplicada a igual distancia de los apoyos. Hallar el valor aproximado de la fuerza crítica utilizando el método de aproximaciones sucesivas, considerando que la sinusoide $y = f \operatorname{sen}(\pi x/l)$ es la curva inicial. Comparar las flechas en el punto medio de la barra.

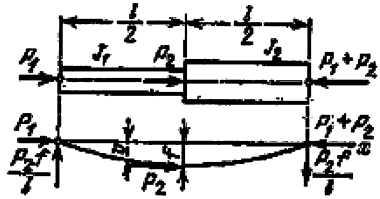


Para el problema 7.37



Para el problema 7.38

7.38. El momento de inercia de la sección transversal de una barra comprimida varía según la ley $J(x) = J_0 4x(l-x)/l^2$, donde J_0 es el momento de inercia de la sección en el punto medio de la luz. Los extremos de la barra están articulados.



Para el problema 7.39

Determinar la fuerza crítica por el método de aproximaciones sucesivas y suponiendo que la línea elástica es una parábola $v = f 4x(l-x)/l^2$.

7.39. Una barra de sección variable soporta la compresión de las fuerzas concentradas P_1 y $P_1 + P_2$ en las articulaciones de apoyo y de la fuerza P_2 en el punto medio de la luz. La barra está compuesta de dos partes cilíndricas de igual longitud; los momentos de inercia de las secciones transversales son J_1 y J_2.

Haciendo uso de método de aproximaciones sucesivas (en forma analítica), se pide determinar el valor aproximado de la carga crítica $P_1 + P_2$ expresándolo por medio de la fórmula

$$(P_1 + P_2)_{cr} = k^2 E J_2 / l^2,$$

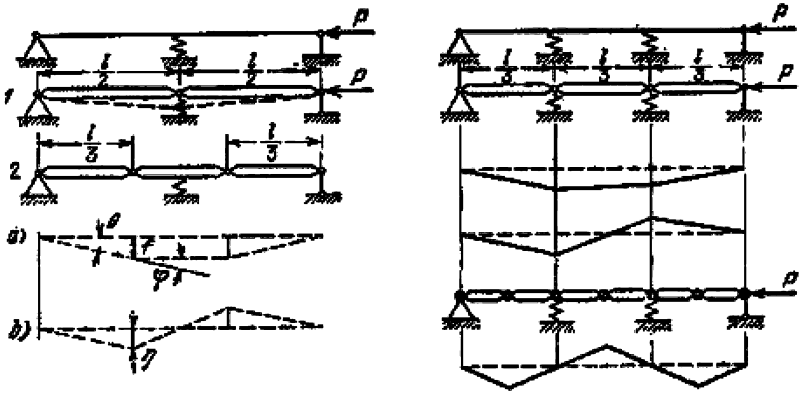
donde k^2 es un coeficiente que depende de los parámetros

$$\alpha = P_1/(P_1 + P_2) \text{ y } \beta = J_2/J_1.$$

Considerar que la curva inicial es una parábola $v = 4f(lx - x^2)/l^2$ y limitarse a una aproximación. Comparar las flechas en el punto medio de la luz.

Hallar el valor del coeficiente k^2 para los casos siguientes: a) $\alpha = 2/3$, $\beta = 3/2$; b) $\alpha = 1/2$, $\beta = 2$. Comparar los resultados con los valores exactos del coeficiente k^2.

7.40*. Una barra comprimida con apoyos articulados en sus extremos tiene un apoyo elástico situado en el punto medio de la luz o dos apoyos elásticos que dividen la luz en tres partes iguales. La rigidez del apoyo es igual a c. Determinar el valor aproximado de la fuerza crítica P_{cr} por el método de «catenaria de articulaciones elásticas» (véase el problema 7.35), es decir, sustituyendo la barra por un sistema de n elementos absolutamente rígidos unidos por articulaciones elásticas. El ángulo de giro φ de los elementos contiguos a la articulación es proporcional al momento flector M: $\varphi = \frac{M}{EJ}\frac{l}{n}$.



Para el problema 7.40

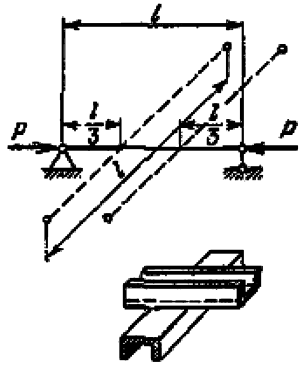
Considerar que cuando hay un solo apoyo elástico $n = 2$ y $n = 3$, cuando hay dos apoyos elásticos $n = 3$. Examinar separadamente los casos de las formas simétrica y antisimétrica de flexión, al producirse la pérdida de estabilidad (véase la figura). Construir gráficamente la dependencia entre las magnitudes P_{cr}/P_E y cl/P_E, donde P_E es la carga euleriana para una barra no apoyada adicionalmente: $P_E = \pi^2 EJ/l^2$.

7.41*. Una viga de acero de sección U N° 8, de 3 m de longitud, comprimida por fuerzas P está fijada a dos vigas cruzadas de las mismas dimensiones. ¿Cuántas semiondas deben formarse al perderse la estabilidad? Utilizando el gráfico dado en la solución del problema 7.40, se pide determinar la carga crítica P_{cr}.

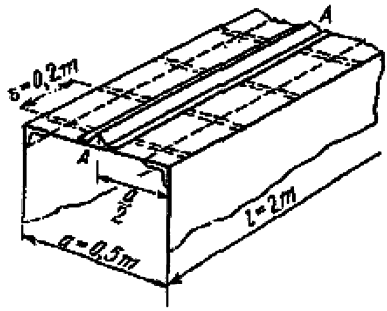
¿Qué perfil mínimo debe usarse para las vigas cruzadas de manera que éstas sean equivalentes a apoyos absolutamente rígidos? Los extremos de todas las vigas están articulados; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

7.42*. Calcúlese la estabilidad de la barra A situada en la zona comprimida del ala de cajón (larguerillo) de un avión. La longitud del larguerillo es $l = 2$ m; sus extremos se apoyan mediante articula-

ciones sobre apoyos rígidos; en la luz éste se sostiene por costillas transversales dispuestas a distancias iguales $s = 0{,}2$ m entre sí. Las costillas pueden considerarse como vigas sobre dos apoyos (con apoyos articulados en sus extremos); su longitud es $a = 0{,}5$ m. El momento



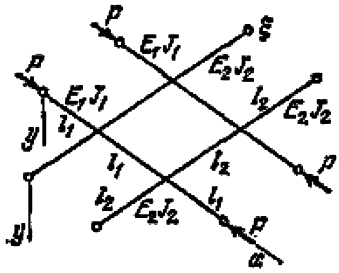
Para el problema 7.41



Para el problema 7.42

de inercia de la sección del larguerillo es $J_{1ar} = 1$ cm^4; el de la costilla, $J_{cos} = 0{,}1$ cm^4; el módulo $E = 0{,}7 \cdot 10^5$ MPa.

Determinar la fuerza crítica P_{cr} del larguerillo y la longitud de la semionda al perder la estabilidad l_{cr}, suponiendo que las fuerzas reactivas de las costillas tienen una distribución continua a lo largo del larguerillo.



Para el problema 7.43

7.43*. Un sistema de vigas cruzadas está compuesto por dos vigas de longitud $3l_1$, de rigidez en flexión E_1J_1 comprimidas por las fuerzas P y dos vigas transversales de apoyo de longitud $3l_2$ y rigidez E_2J_2. Los extremos de todas las vigas tienen apoyos articulados. Determinar la carga crítica de las vigas longitudinales representándola por medio del parámetro n en la forma $P_{cr} = n\pi^2 E_1 J_1 / l_1^2$. Hallar la rigidez «crítica» mínima $(E_2J_2)_{cr}$ a partir de la cual las vigas de apoyo serán equivalentes a apoyos absolutamente rígidos. Construir el gráfico que expresa la dependencia entre el parámetro n y la magnitud

$$\lambda = \frac{E_2 J_2}{E_1 J_1} \frac{l_1^3}{l_2^3}.$$

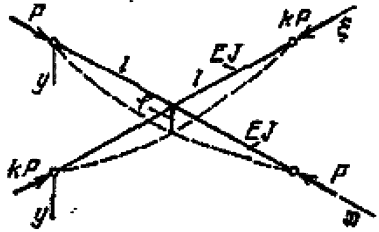
Resolver aproximadamente el problema por el método energético, representando sucesivamente la línea elástica de la viga longitudinal por las ecuaciones siguientes:

1) $v = f_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{3l_1}$ 2) $v = f_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{3l_1}$, 3) $v = f_3 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l_1}$,

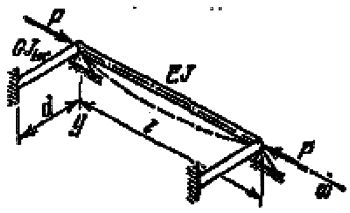
y la línea elástica de la viga transversal, en todos los casos, por la ecuación

$$v = f \operatorname{sen} \frac{\pi \xi_1}{3l_2}.$$

7.44*. Dos vigas cruzadas de longitudes iguales l y de igual rigidez EJ con apoyos articulados en sus extremos están unidas entre sí en sus puntos medios. Una de las vigas está comprimida por la fuerza P y la otra, por la fuerza kP (el valor de k se encuentra entre 0 y 1). Determinar la fuerza crítica, representándola en la forma $P_{cr} = n^2\pi^2 EJ/l^2$. Construir el gráfico que exprese la dependencia de n^2 respecto a k. Resolver el problema mediante el método energético, considerando que la línea elástica es una sinusoide $v = f \operatorname{sen} (\pi x/l)$.



Para el problema 7.44



Para el problema 7.45

Componer la ecuación exacta para determinar la fuerza crítica, comparando las reacciones y las flechas en el punto de contacto de las vigas. Comprobar la solución aproximada para el caso límite cuando $k = 0$.

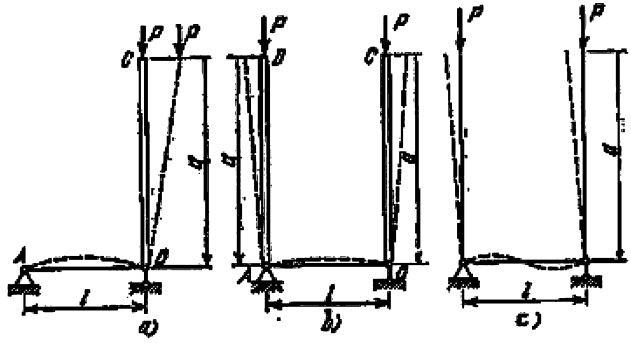
7.45*. Una viga de longitud l y rigidez en flexión EJ está comprimida por las fuerzas P. El giro de cada uno de los extremos provoca una torsión de la viga transversal de longitud d y rigidez en torsión GJ_{tor}. Determinar la fuerza de compresión crítica, representándola en la forma $P_{cr} = m\pi^2 EJ/l^2$ hallando la dependencia del coeficiente m respecto al parámetro $c = \frac{GJ_{tor}}{EJ} \frac{l}{d} \frac{1}{\pi^2}$. Examinar los casos límites cuando $c = 0$ y $c = \infty$. Resolver aproximadamente el problema utilizando el método energético. Representar la línea elástica en la forma

$$v = f_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} + f_2 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right),$$

donde f_1 y f_2 son magnitudes independientes

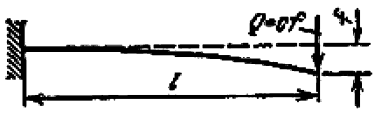
7.46. Un puntal absolutamente rígido BC está fijado sobre una viga de longitud l que se encuentra apoyada en los puntos A y B. La fuerza longitudinal P se transmite al puntal. La longitud de éste es a. Determinar la rigidez mínima $(EJ)_{min}$ de la viga con la cual la forma rectilínea de la viga permanecerá estable.

Resolver el mismo problema para el caso de dos puntales rígidos BC y AD que soportan fuerzas P. Examinar dos variantes de flexión posibles: la simétrica (fig. *b*) y la antisimétrica (fig. *c*).



Para el problema 7.46

7.47*. Una viga de sección constante está empotrada en un extremo; en el extremo libre, al producirse flexión, comienza a actuar una fuerza proporcional a la flecha: $Q = cf$. Determinar el valor mínimo del coeficiente c con el cual la forma rectilínea de la viga será inestable.



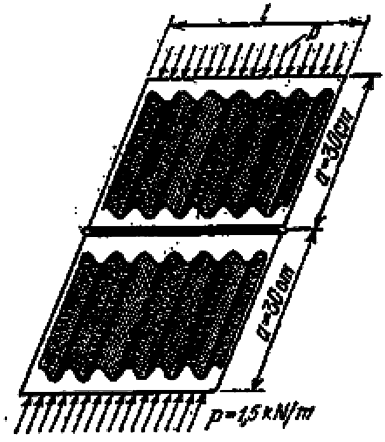
Para el problema 7.47

Para el problema 7.48

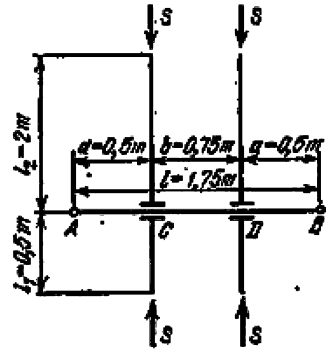
7.48. Una viga de rigidez constante EJ y longitud l tiene apoyos articulados en sus extremos. Al producirse la flecha, comienza a actuar una carga distribuida a lo largo de toda la viga y proporcional a la flecha: $q = kv$. Determinar el valor mínimo del coeficiente k con el cual la forma rectilínea de la viga será inestable.

7.49*. Una viga de duraluminio con apoyos articulados en sus extremos está unida a dos láminas onduladas; la unión puede considerarse articulada, puesto que en el lugar de contacto de éstas con la viga la rigidez en flexión de la lámina es muy pequeña. Las láminas transmiten una carga de compresión distribuida cuya intensidad lineal es $p = 1{,}5$ kN/m. Los bordes cargados de la lámina se encuentran dentro del plano de la construcción. Determinar el momento de inercia mínimo de la sección transversal de la viga con el cual su forma rectilínea será estable. La longitud de la viga es $l = 1{,}5$ m, la longitud de cada lámina es $a = 0{,}3$ m; $E = 0{,}7 \cdot 10^5$ MPa.

7.50*. Una barra de duraluminio AB está articulada en sus extremos. En los puntos C y D la barra está unida con barras comprimidas por las fuerzas $S = 80$ kN. La unión de la barra AB con las perpendiculares puede considerarse como articulada. Determinar el momento de inercia mínimo de la sección de la barra AB con el cual su forma rectilínea será estable; $E = 0{,}7 \cdot 10^5$ MPa.

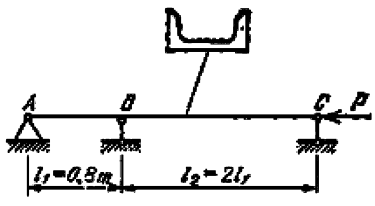


Para el problema 7.49

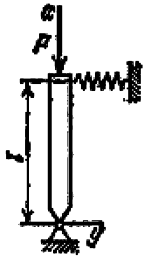


Para el problema 7.50

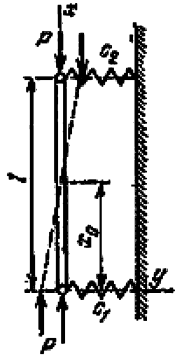
7.51*. Una viga de sección en U (perfil N° 8) que descansa sobre tres apoyos se comprime por la fuerza P. Viene dado: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{est} = 210$ MPa. Determinar la fuerza crítica P_{cr}.



Para el problema 7.51



Para el problema 7.52



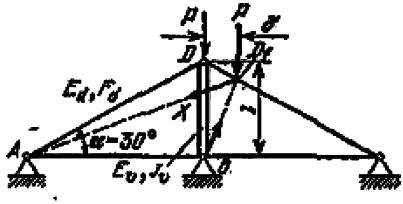
Para el problema 7.53

7.52*. Una barra elástica de diámetro 16 mm tiene en sus extremos apoyos articulados. Uno de los apoyos es fijo y el otro, elástico. La rigidez del apoyo elástico es igual a c N/m. Determinar la carga crítica P_{cr} cuando $E = 0{,}7 \cdot 10^5$ MPa. Hallar el valor mínimo de la rigidez c_0 del apoyo elástico («rigidez crítica») con la cual en el mo-

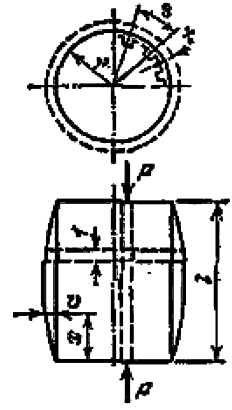
mento de perder la estabilidad el apoyo elástico no se desplaza y puede considerarse como absolutamente rígido.

7.53. Una barra de duraluminio fijada en sus extremos mediante articulaciones a dos apoyos elásticos se comprime por las fuerzas P. La rigidez de los apoyos es $c_1 = 4$ kN/m y $c_2 = 8$ kN/m. La sección transversal de la barra representa un círculo de diámetro $d = 16$ mm; la longitud de la barra es $l = 0{,}6$ m. Determinar la carga crítica P_{cr} y la forma de la pérdida de estabilidad; $E = 0{,}7 \cdot 10^5$ MPa.

7.54*. La barra vertical BD de acero comprimida por la fuerza P está apoyada en el punto B y articulada en D a dos tirantes de duraluminio. El área de la sección transversal de la barra BD es $F_v = 30$ cm^2; el momento de inercia de la sección respecto al eje perpendicular al plano de la figura, $J_v = 120$ cm^4; la longitud, $l = 1{,}2$ m, el módulo de elasticidad del acero, $E_v = 2{,}2 \cdot 10^5$ MPa. el límite de elasticidad, $\sigma_{el} = 700$ MPa. El área de la sección transversal del tirante es $F_d = 0{,}6$ cm^2, el módulo de elasticidad del duraluminio, $E_d = 0{,}7 \cdot 10^5$ MPa. La flexibilidad de los tirantes es tan grande que ellos trabajan solamente a tracción. Se considera que los tirantes quedan unidos a la barra después de aplicar a ésta la carga de compresión P. El desplazamiento de la barra fuera de su plano común con los tirantes se descarta. Determinar el valor crítico de la fuerza P con el cual la barra comprimida vuelca; comparar esta fuerza con la magnitud de la carga de Euler cuando la barra se encuentra en flexión longitudinal en la longitud BD.



Para el problema 7.54



Para el problema 7.55

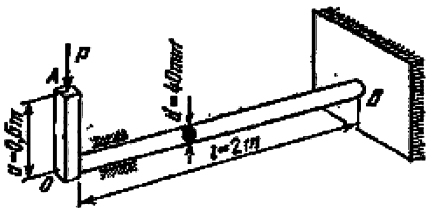
7.55*. En una construcción compuesta por un revestimiento cilíndrico circular y nervios dispuestos a corta distancia, cada nervio está sometido a la acción de la fuerza de compresión P. Determinar la fuerza crítica P_{cr} del nervio, considerando la influencia del revestimiento, si todos los nervios se curvan de igual modo en sentido radial. Para los nervios el revestimiento es una especie de base elástica; determinando la carga reactiva lineal hace falta tomar

en cuenta solamente la tracción del revestimiento en el sentido del arco, el cual es resultado de la flexión del nervio.

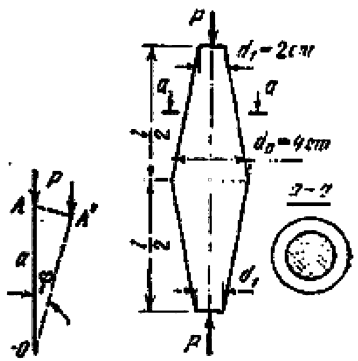
La distancia entre dos nervios contiguos, medida por el arco, es igual a s, el grosor del revestimiento es t. Los extremos de los nervios tienen apoyos articulados. La dependencia entre la tensión en el revestimiento, que actúa por el arco, y la deformación correspondiente se define por el módulo E.

7.56. Una palanca rígida de longitud $a = 0{,}5$ m está unida a un árbol de acero de sección circular ($G = 8 \cdot 10^4$ MPa) el cual está apoyado en el lugar de unión con la palanca y empotrado en el otro extremo. La palanca está sometida a la acción de una fuerza longitudinal P.

1) Determinar el valor crítico de la fuerza P con el cual la palanca estará en equilibrio en una posición desviada de la vertical y el árbol se someterá a torsión; en este caso el ángulo de giro φ de la palanca se considera muy pequeño y en la expresión del momento de la fuerza P respecto al eje de rotación se supone sen $\varphi = \varphi$.



Para el problema 7.56



Para el problema 7.57

2) Mostrar que si a sen φ le asignamos un valor más exacto sen $\varphi = \varphi - \varphi^3/3!$ obtendremos una concordancia rigurosa entre la magnitud de la fuerza P y el ángulo de torsión del árbol después de perder la estabilidad.

3) Hallar la magnitud de P para los siguientes ángulos de torsión (en radianes): 0,1; 0,15; 0,2. Construir el gráfico P (φ).

4) Determinar el valor de la fuerza P necesaria para que la tensión tangencial máxima alcance el límite de elasticidad $\tau_{elas} = 160$ MPa.

7.57. Una barra de duraluminio de sección transversal circular tiene apoyos articulados y su forma representa dos conos truncados iguales unidos por sus bases mayores. La longitud de la barra es $l = 1$ m; $E = 7 \cdot 10^4$ MPa.

1) Determinar el diámetro de una barra cilíndrica circular de la misma longitud y de igual estabilidad.

2) ¿En qué por ciento será más pesada la barra cilíndrica en comparación con la barra de sección variable?

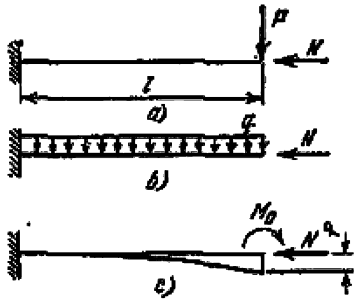
Indicación. La fuerza crítica de la barra de sección variable se define mediante la fórmula

$$P_{cr} = \xi P_E,$$

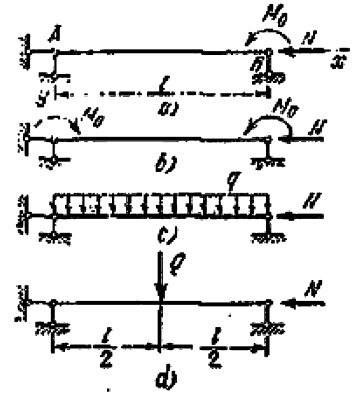
donde $P_E = \pi^2 EJ_0/l^2$, $\xi = f(J_1/J_0)$. En este ejemplo $\xi = 0{,}415$, J_0 es el momento de inercia del área de la sección transversal cuyo diámetro es igual a d_0, J_1 es el momento de inercia del área de la sección transversal cuyo diámetro es igual a d_1.

§ 5. Flexión transversal y longitudinal

7.58*. Un voladizo está sometido a la acción simultánea de una fuerza de compresión longitudinal N y de una carga transversal. Determinar la flecha máxima f y el momento flector máximo para tres variantes de la carga transversal. Introducir la designación $k^2 = N/(EJ)$. Considerando $N \to 0$, se pide comprobar el paso a las fórmulas conocidas de f y $M_{máx}$ en caso de una carga transversal.



Para el problema 7.58



Para el problema 7.60

7.59. Resolver el problema anterior, suponiendo que la fuerza es de tracción. Conservar la designación $k = \sqrt{N/(EJ)}$.

7.60. Una viga comprimida por la fuerza N está sometida a la acción de una carga transversal. Hallar la ecuación de la línea elástica y la ley de variación del momento flector para las variantes de carga transversal representadas en la figura. Para las variantes de carga *b*, *c*, *d* se pide determinar también la flecha y el momento flector máximo.

Introducir las designaciones

$$k = \sqrt{\frac{N}{EJ}} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{Nl^2}{\pi^2 EJ}} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{N}{N_E}}$$

y

$$u = \frac{kl}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{N}{N_E}},$$

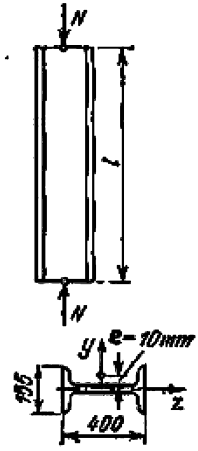
aquí N_E es la carga de Euler.

7.61*. Una viga de longitud l tiene apoyos articulados en sus extremos, se comprime por una fuerza N y soporta una carga transversal P. Determinar el valor aproximado de la flecha f aprovechando el método energético y considerando que la línea elástica es una sinusoide. La carga transversal P está: a) concentrada en el punto medio de la luz, b) uniformemente distribuida a lo largo de la viga. ¿Cómo variarán las fórmulas obtenidas, si la fuerza N es de tracción?

¿De qué modo se pueden unificar las fórmulas obtenidas, si designamos con f_{trans} la flecha debida a la carga transversal?

7.62. Una barra de longitud $l = 1$ m soporta una carga longitudinal de compresión $N = 5$ kN y una carga transversal uniformemente distribuida $q = 0{,}5$ kN/m. Los extremos de la barra están articulados. La rigidez de la barra es $EJ = 10$ kN·m^2.

Determinar el momento flector máximo: a) con ayuda de la fórmula exacta (como en el problema 7.60), b) por medio de la fórmula aproximada del problema 7.61.



Para el problema 7.63

7.63*. Una viga de acero de sección doble T con apoyos articulados en sus extremos está sometida a compresión excéntrica por fuerzas N. El punto de aplicación de la fuerza N se encuentra sobre el eje (como está indicado en la figura) a una distancia $e = 1$ cm a partir del centro de gravedad. La longitud de la viga es $l = 5$ m, $J_z = 727$ cm^4, $W_z = 99{,}6$ cm^3, $F = 102$ cm^2, $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa.

Determinar la flecha $v_{máx}$ y la tensión normal máxima $\sigma_{máx}$ en la sección media de la viga cuando la fuerza tiene los valores siguientes (en kilonewtons): 10, 25, 50, 75, 100, 200, 300, 400. El límite de elasticidad es $\sigma_{elas} = 200$ MPa.

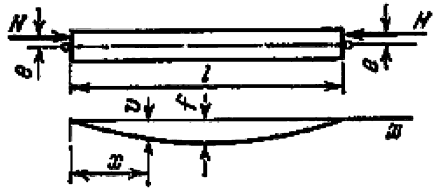
Construir el gráfico de dependencia de $v_{máx}$ y $\tau_{máx}$ respecto a la fuerza de compresión N. Indicar en el gráfico el valor de la fuerza de Euler N_E.

7.64*. Una barra de duraluminio de longitud $l = 0{,}5$ m con un extremo empotrado soporta la compresión de una fuerza $N = 2$ kN aplicada con una excentricidad $e = 3$ cm respecto al centro de gravedad de la sección. El momento de inercia de la sección es $J = 1$ cm^4. Determinar el momento flector máximo; $E = 7 \cdot 10^4$ MPa.

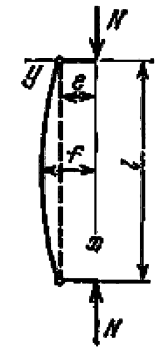
7.65*. Una barra de longitud l con apoyos articulados en sus extremos está sometida a compresión por fuerzas N aplicadas en el

eje principal de la sección con una excentricidad e respecto al centro de gravedad de la sección. El valor de Euler de la fuerza crítica es $N_E = \pi^2 EJ/l^2$.

Utilizando el método de aproximaciones sucesivas y eligiendo como línea elástica inicial la sinusoide $v_0 = f \operatorname{sen}(\pi x/l)$, se pide determinar la flecha máxima f correspondiente al valor dado de la fuerza $N < N_E$ para el caso de la deformación elástica, limitándose a una sola aproximación y comparando las flechas en el punto medio



Para el problema 7.65



Para el problema 7.66

de la luz. Hallar el valor aproximado de f por los datos del problema 7.64 y compararlo con la solución exacta obtenida en el problema 7.63.

7.66*. Una barra de longitud l de sección transversal rectangular $b \times h$ está sometida a compresión excéntrica por la fuerza N; el punto de aplicación de la fuerza se encuentra sobre el eje de simetría de la sección paralelo al lado h a una distancia e del centro de gravedad. Suponiendo que la sinusoide

$$v = (f - e) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} + e$$

es la línea elástica y comparando su curvatura en la sección media con el momento flector dividido por EJ, se pide determinar el valor aproximado de la flecha f, expresándola por medio de la excentricidad e y la tensión media $\sigma_{med} = N/(bh)$, si la tensión no es mayor que el límite de elasticidad. Hallar también los valores máximos absolutos de las tensiones normales en las zonas comprimida y estirada. ¿Bajo qué condición las tensiones en la sección serán solamente de compresión? ¿Con qué flecha las tensiones en la zona comprimida llegarán al límite de fluencia σ_f?

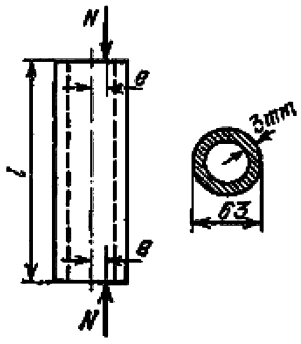
7.67*. Un tubo de acero ($E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa) de 1,5 m de longitud soporta una fuerza de compresión N que actúa con una excentricidad $e = 12$ mm. Determinar la carga de compresión admisible N_{ad} siendo el factor de seguridad $n = 6$ partiendo de la condición de que con la carga límite las tensiones máximas llegan al límite de fluencia

$\sigma_{f1} = 240$ MPa. Resolver el problema con ayuda de: a) la fórmula exacta hallada en el problema 7.63, b) la fórmula aproximada del problema 7.66.

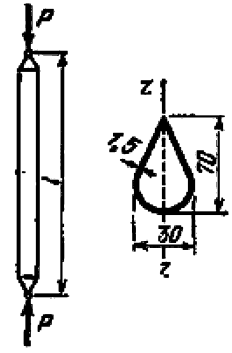
7.68*. El eje de una viga de acero de perfil U N° 8 de longitud $l = 2$ m con apoyos articulados en sus extremos tiene una curvatura inicial en el plano de la rigidez mínima de acuerdo con la ecuación

$$v_0 = f_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l},$$

donde $f_0 = 2$ cm. La viga está comprimida por una fuerza $N = 21{,}3$ kN. Determinar la flecha máxima f correspondiente a la acción de la fuerza N, así como las tensiones máximas en la sección media; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, el límite de elasticidad es $\sigma_{elas} = 220$ MPa.



Para el problema 7.67



Para el problema 7.69

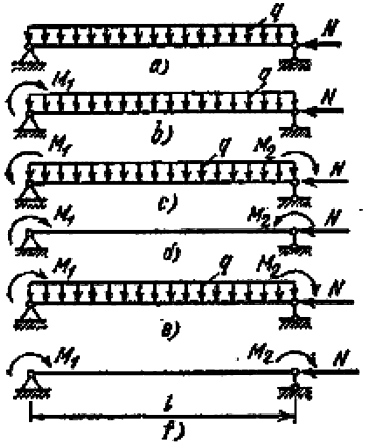
7.69*. Una barra de paredes delgadas comprimida tiene la sección transversal representada en la figura. El área de la sección es $F = 2{,}3$ cm^2; el radio de giro, $i_z = 0{,}96$ cm; el módulo resistente, $W_z = 1{,}43$ cm^3. La longitud de la barra es $l = 120$ cm. Determinar la capacidad portante de la barra, considerando que la excentricidad de la carga es $e = 1$ mm y la curvatura a lo largo del tubo tiene una flecha máxima $f_0 = 2$ mm. Se supone que la capacidad portante de la barra está agotada, si la tensión máxima en la zona comprimida llega al límite de fluencia σ_{f1}. El material es acero; $E = 2{,}2 \times 10^5$ MP, $\sigma_{f1} = 320$ MPa. Hacer uso de la fórmula aproximada para la flecha obtenida en la respuesta del problema 7.61.

¿Cuál será la capacidad portante de una barra de longitud l aumentada vez y media? Las deformaciones dentro de los límites $\sigma \leqslant \sigma_{f1}$ se consideran elásticas.

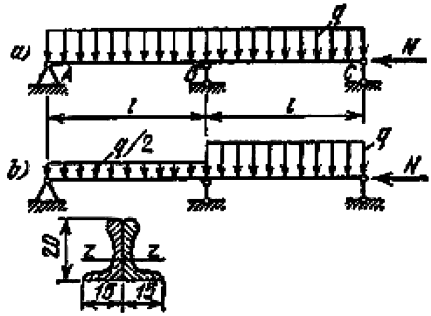
7.70. Una viga de 2 m de longitud está simultáneamente sometida a la acción de una fuerza de compresión $N = 100$ kN, una carga transversal de intensidad $q = 2$ kN/m y momentos en los extremos $M_1 = 0{,}8$ kN·m y $M_2 = 0{,}5$ kN·m. El momento de inercia de la sección es $J = 828$ cm^4. Construir los diagramas de los momentos

flectores. Determinar las magnitudes del momento flector máximo. La viga está fabricada de material de composición, $E = 1 \cdot 10^4$ MPa.

7.71*. La sección de una viga de duraluminio está compuesta de dos angulares bulbosos. Para cada angular $J_z = 0{,}333$ cm^4, $W_z = 0{,}278$ cm^3, $F = 0{,}64$ cm^2. El límite de elasticidad $\sigma_{elas} = 200$ MPa, $E = 7 \cdot 10^4$ MPa. Determinar el momento flector sobre



Para el problema 7.70



Para el problema 7.71

el apoyo medio M_B; construir el diagrama de los momentos flectores y hallar la tensión normal máxima.

7.72. La carga P situada sobre el punto medio de la luz de una viga de longitud l efectúa oscilaciones propias. La viga está comprimida por fuerzas N. Determinar el valor aproximado de la frecuencia ω de oscilaciones propias, sustituyendo la viga por una catenaria articulada compuesta de n elementos rígidos unidos mediante articulaciones elásticas. El ángulo de giro φ en cada articulación es proporcional al momento flector M: $\varphi = Ml/(nEJ)$, donde EJ es la rigidez de la viga. Examinar los casos cuando $n = 2$ y $n = 3$.

§ 6. Métodos numéricos. Empleo de ordenadores

7.73*. Determinar el coeficiente k^2 en la fórmula de la fuerza crítica $P_{cr} = k^2EJ/l^2$ en el caso de una barra de sección constante comprimida centralmente, utilizando el método de elementos finitos a base del principio variacional. Representar la flecha de una parte aislada del elemento finito en forma del polinomio $v = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3$, donde $s = x/a$ es una coordenada adimensional que se cuenta a partir de uno de los extremos del elemento; a es la longitud del elemento. Examinar el caso cuando los extremos de la barra están empotrados suponiendo en la primera aproximación que el número de elementos finitos es igual a $n = 2$.

Indicación. Este problema y los dos siguientes pueden ser resueltos sin emplear ordenador como está indicado en la solución.

7.74*. Resolver el problema 7.73 para el caso de una barra igual, pero con apoyos articulados en los extremos.

7.75*. Examinar un problema del tipo 7.73, considerando que un extremo de la barra tiene apoyo articulado y el otro se encuentra empotrado.

7.76*. Por medio de un ordenador se pide resolver el problema 7.73 en una aproximación más alta, considerando que el número de elementos finitos es $n = 6$.

7.77*. Examinar el problema 7.73 suponiendo que el número de elementos finitos es igual a: a) $n = 10$, b) $n = 16$, c) $n = 20$. Al comparar los resultados, se pide demostrar que, resolviendo el problema por medio del método de Ritz, obtendremos unos resultados más exactos si aumentamos el número de elementos finitos. En este caso la aproximación tiene lugar desde «arriba».

7.78*. Resolver el problema 7.74 para una barra que tiene apoyos articulados en sus extremos, suponiendo que el número de elementos finitos es igual a $n = 6$.

7.79*. Examinar el problema 7.74, considerando que el número de elementos finitos es igual a $n = 10$.

7.80*. Resolver el problema 7.73 para una barra empotrada por sus extremos por el método de diferencias finitas y suponiendo que el número de intervalos a lo largo de la barra es igual a $n = 7$, $n = 11$, $n = 17$, $n = 21$. Comparar los resultados obtenidos con la solución exacta.

7.81*. Examinar el problema 7.74 para una barra con apoyos articulados en sus extremos, empleando el método de diferencias finitas con el mismo número de intervalos que en el problema 7.80.

7.82*. Resolver el problema 7.75 referente a una barra con un extremo articulado y el otro empotrado, empleando el método de diferencias finitas con el mismo número de intervalos que en los problemas 7.80 y 7.81.

7.83*. Resolver el problema 7.39 acerca de la estabilidad de una barra de sección variable expuesta a la acción de una fuerza axial variable a lo largo de la misma, utilizando el método de elementos finitos. Dividir la barra en dos elementos finitos de longitudes iguales. Examinar dos variantes de relación entre los parámetros que determinan las distintas partes de la barra según los datos del problema 7.39.

7.84*. Una barra empotrada en sus extremos está sometida a la acción de una carga axial $P = Fct$ que crece rápidamente con el tiempo, donde $c = 10^4$ MPa/s es la velocidad de crecimiento de la tensión en la sección transversal; F, el área de la sección. Por el método de elementos finitos, determinar la carga dinámica P_{din} (respecto a la magnitud estática de Euler P_E) a causa de la cual tiene lugar un crecimiento catastrófico de las flechas. Considerar que en el momento inicial la barra tiene una flecha sumamente pequeña del orden de $1 \cdot 10^{-6}$ m distribuida a todo su largo en forma de pérdida estática de estabilidad. Es preciso tener en cuenta que la forma de la

flexión lateral con el crecimiento rápido de la carga puede distinguirse considerablemente del caso de la carga estática. Dividir la longitud de la barra en seis elementos finitos de dimensiones iguales. Componer el programa para resolver el problema con ayuda del ordenador. Suponer que la barra es de 1 m de longitud y su sección es circular de $1 \cdot 10^{-2}$ m de diámetro. La barra es de acero, su densidad es $\rho = 8$ t/m^3, el módulo de elasticidad es $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa.

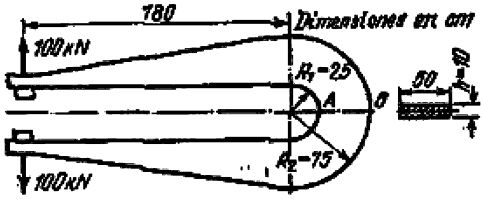
CAPITULO 8

BARRAS DE CURVATURA GRANDE. CILINDROS DE PAREDES GRUESAS

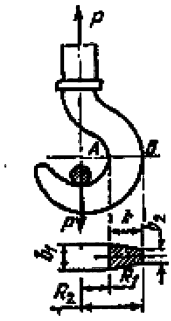
§ 1. Barras de curvatura grande

8.1*. Comprobar la resistencia por la sección AB de una bancada moldeada de acero de una remachadora. Las dimensiones se dan en la figura. La tensión admisible es $[\sigma] = 90$ MPa.

8.2*. Examinar qué error en la magnitud de la tensión normal máxima dará la fórmula aproximada utilizada para determinar la distancia e entre el centro de gravedad de la sección y el eje neutro en el caso de flexión pura de una barra de sección rectangular cuando $h/R = 1$ y $h/R = 0{,}5$. La fórmula aproximada tiene la expresión $e = J/(FR)$.



Para el problema 8.1



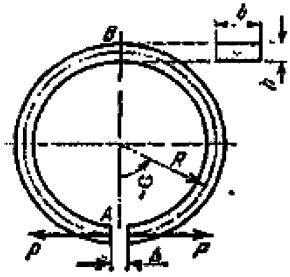
Para el problema 8.3

8.3*. Comprobar la resistencia de un gancho sometido a la acción de una carga $P = 23$ kN; $R_1 = 3$ cm, $R_2 = 12$ cm, $b_1 = 4$ cm, $b_2 = 2$ cm. La tensión admisible es $[\sigma] = 90$ MPa.

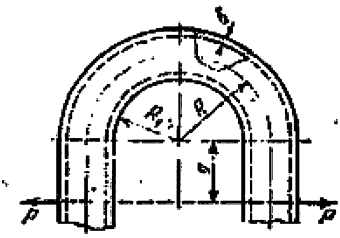
8.4*. Determinar la carga admisible que puede soportar un gancho fabricado de una barra de acero de diámetro $d = 20$ mm; $R = 30$ mm. El límite de fluencia es $\sigma_{f1} = 270$ MPa, el factor de seguridad es $n_{f1} = 1{,}5$.

8.5*. Determinar a qué magnitud Δ se pueden separar los extremos de un anillo cortado, de sección rectangular, para que la tensión normal máxima no supere el límite de fluencia $\sigma_{f1} = 300$ MPa; $R = 4$ cm, $h = 1$ cm; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. En estado no deformado el juego es igual a cero.

Para el problema 8.4



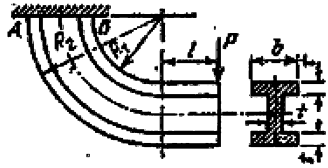
Para el problema 8.5



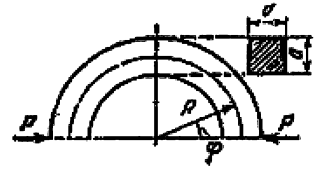
Para el problema 8.6

8.6*. Determinar la tensión normal máxima de una barra curva de sección tubular cuyo diámetro exterior es $d = 46$ mm y el grosor de la pared es $\delta = 6$ mm; $R = 80$ mm; $a = 50$ mm, $P = 4$ kN.

8.7. Determinar las tensiones en los puntos extremos de la sección AB de una barra curva, cuando ésta soporta una carga $P = 20$ kN; $R_1 = 20$ cm, $R_2 = 30$ cm, $l = 20$ cm, $b = 6$ cm, $t = 2$ cm.

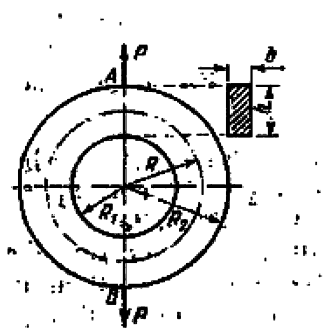


Para el problema 8.7

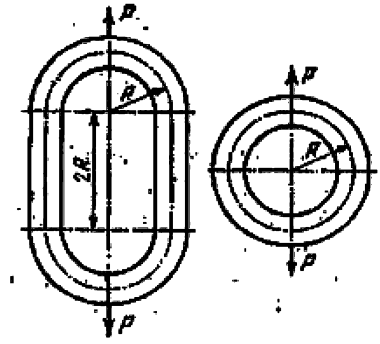


Para el problema 8.8

8.8*. Determinar el acercamiento de los extremos de una barra curva de sección cuadrada, cuyo lado es $a = R/2$. Comparar el resultado con la resolución aproximada obtenida mediante la fórmula para barras de curvatura pequeña.



Para el problema 8.9



Para el problema 8.11

8.9*. Determinar la tensión normal máxima en un aro de acero de sección rectangular cuando está estirado por las fuerzas $P = 30$ kN; $R = 12$ cm, $h = 6$ cm, $b = 2$ cm.

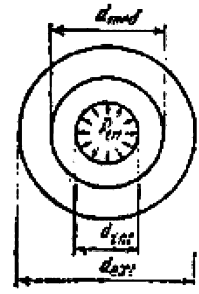
8.10*. Determinar el aumento del diámetro vertical AB del aro de acero examinado en el problema anterior; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. Es preciso tener en cuenta solamente la influencia de los momentos flectores.

8.11*. Comparar la resistencia de los tipos de eslabones de cadena, el anular y el estirado, si el radio de las partes curvilíneas es idéntico. Es necesario efectuar los cálculos por medio de las fórmulas para las barras de curvatura pequeña.

§ 2. Cilindros de paredes gruesas

8.12*. Un cilindro de paredes gruesas de diámetro interior $d_{int} = 100$ mm soporta una presión interior $p_{int} = 180$ MPa. Determinar su diámetro exterior por las III y IV teorías de resistencia. El límite de fluencia del material es $\sigma_{fl} = 750$ MPa, el factor de seguridad es $n_{fl} = 1{,}5$.

8.13. Investigar, aumenta o no el factor de seguridad a causa del menosprecio de la tensión axial σ_z durante el cálculo de un cilindro de paredes gruesas sometido a una presión interior. La investigación debe ser realizada de acuerdo con la IV teoría de resistencia comparando las tensiones equivalentes calculadas considerando y sin considerar la tensión σ_z.



Para el problema 8.14

8.14. Sobre un cilindro de diámetro interior $d_{int} = 20$ mm y diámetro exterior $d_{med} = 30$ mm fue encajado a presión un cilindro de diámetro exterior $d_{ext} = 40$ mm. El cilindro compuesto se somete a una presión interior $p_{int} = 250$ MPa. Determinar el huelgo negativo (la diferencia de diámetros) con el cual la tensión circunferencial en la superficie interior del cilindro compuesto será 30% menor que la tensión en un cilindro no compuesto de las mismas dimensiones.

8.15*. Hallar la presión óptima del huelgo negativo p de un cilindro compuesto a partir de la condición de equirresistencia de los cilindros interior y exterior, así como de la presión interior admisible p_{int}. El cálculo debe efectuarse mediante la IV teoría de resistencia. Viene dado: $d_{int} = 80$ mm, $d_{ext} = 146$ mm, $d_{med} = 114$ mm, $[\sigma] = 500$ MPa.

8.16*. Una polea de acero de diámetro $D = 80$ mm está montada a presión sobre un árbol también de acero de diámetro $d = 40$ mm. Hallar la magnitud del huelgo negativo mínimo capaz de transmitir por rozamiento el momento $M = 1{,}2$ kN·m. El coeficiente de rozamiento es $f = 0{,}15$; el ancho de la polea es igual a $b = 60$ mm; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

8.17*. Teniendo en cuenta los datos del problema anterior se pide determinar el huelgo negativo máximo admisible a condición

de que en el material no aparezcan deformaciones plásticas. El límite de fluencia es $\sigma_{fl} = 300$ MPa. Utilícese la III teoría de resistencia.

8.18*. Un casquillo de acero de diámetro exterior $D = 45$ mm y longitud $b = 40$ mm está montado a presión sobre un árbol fabricado del mismo material de diámetro $d = 30$ mm. Determinar el huelgo negativo máximo admisible Δ que asegure la resistencia del casquillo, así como la fuerza axial P que se transmite por rozamiento. El límite de fluencia es $\sigma_{fl} = 360$ MPa, el factor de seguridad es $n_{fl} = 1{,}2$, el coeficiente de rozamiento es $f = 0{,}15$. Utilizar la III teoría de resistencia; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

8.19*. En un orificio circular de una placa de acero de grosor $t = 50$ mm está insertada a presión una barra de acero de diámetro $d = 40$ mm, a la cual está aplicada una fuerza de tracción $P = 60$ kN. Hallar la magnitud del huelgo negativo mínimo necesario para mantener la barra por fricción, si el coeficiente de rozamiento es $f = 0{,}18$. Determinar el factor de seguridad a partir del límite de fluencia $\sigma_{fl} = 300$ MPa. Las dimensiones de la placa se consideran infinitamente grandes; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

8.20*. Un árbol de acero de diámetro $d = 60$ mm tiene montada una polea de hierro colado de diámetro $D = 140$ mm y de ancho $b = 60$ mm. Hallar la magnitud del huelgo negativo mínimo necesario para transmitir a cuenta de las fuerzas de rozamiento un momento $M = 2$ kN·m. El coeficiente de rozamiento es $f = 0{,}1$; $E_{ac} = 2 \cdot 10^5$ MPa, $E_{hc} = 1 \cdot 10^5$ MPa, $\mu_{ac} = 0{,}28$, $\mu_{hc} = 0{,}25$.

8.21*. ¿Cuántas veces se puede aumentar la presión interior en un tubo de aluminio de diámetro interior $d_{int} = 10$ mm y diámetro exterior $d_{ext} = 20$ mm sin peligro para su resistencia, si se encaja en éste, sin presión, un tubo de acero de paredes delgadas de grosor $\delta = 2$ mm? El coeficiente de Poisson del aluminio es $\mu = 0{,}34$; $E_{al} = 0{,}7 \cdot 10^5$ MPa, $E_{ac} = 2 \cdot 10^5$ MPa. Efectuar el cálculo mediante la III teoría de resistencia.

8.22*. Un tubo de acero de diámetro interior $d_{med} = 80$ mm y diámetro exterior $d_{ext} = 100$ mm está montado sin presión sobre un tubo de cobre de diámetro interior $d_{int} = 60$ mm y diámetro exterior $d_{med} = 80$ mm. Determinar la presión interior en el tubo compuesto al comenzar las deformaciones plásticas en el de cobre. El límite de fluencia del cobre es $\sigma_{fl} = 70$ MPa; el coeficiente de Poisson, $\mu_{cob} = 0{,}32$; el del acero $\mu_{ac} = 0{,}28$. Calcular por la III teoría de resistencia; $E_{cob} = 1 \cdot 10^5$ MPa, $E_{ac} = 2 \cdot 10^5$ MPa.

8.23*. Determinar las tensiones circunferenciales máximas en el cobre y el acero del tubo compuesto examinado en el problema anterior surgidas como consecuencia del calentamiento uniforme a $\Delta T = 80$ K.

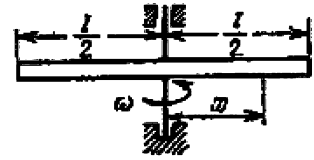
CAPÍTULO 9

PROBLEMAS DE LA DINÁMICA

§ 1. Tensiones y deformaciones en los elementos móviles de construcciones

9.1. Una carga de masa $m = 2000$ kg está suspendida de un cable de acero que contiene 500 alambres de diámetro $d = 0{,}5$ mm. El tambor gira en el sentido contrario al de las agujas del reloj con una aceleración angular $\varepsilon = 10\ s^{-2}$. Hallar la tensión normal en el cable. El diámetro del tambor es $D = 0{,}5$ m.

Para el problema 9.1



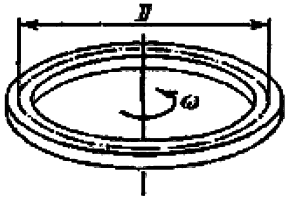
Para el problema 9.3

9.2. Una carga de masa $m = 1800$ kg suspendida de un cable desciende a una velocidad $V = 12$ m/s. Al final del descenso se conecta el freno que hace parar la carga después de hacer ésta un recorrido $h = 3$ m. Determinar la tensión normal en el cable, considerando que la fuerza del frenado es constante. El área de la sección del cable es $F = 5$ cm^2.

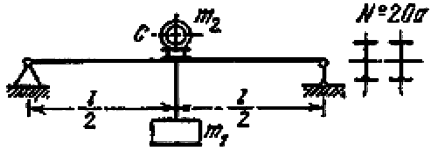
9.3*. Una barra de acero de sección constante gira alrededor de un eje vertical con una velocidad angular constante ω. Determinar la longitud máxima admisible de la barra l_{11m}, con la cual se asegura su resistencia, si ella gira con una frecuencia de rotación igual a $n = 1200$ r.p.m., así como la frecuencia de rotación $n_{máx}$ con la cual la barra romperá, si $l = l_{11m}$. Viene dado: $[\sigma] = 100$ MPa, $\sigma_r = 800$ MPa, $\rho = 7{,}83$ t/m^3.

9.4. Un aro fino de acero gira alrededor del eje central perpendicular a su plano. Comprobar la resistencia del aro y determinar la velocidad circunferencial máxima admisible. El diámetro medio del aro es $D = 70$ cm, la densidad del material es $\rho = 7{,}85$ t/m^3, la frecuencia de rotación es $n = 3000$ r.p.m., $[\sigma] = 100$ MPa.

9.5*. Con ayuda del cabrestante C instalado sobre dos vigas de sección doble T N° 20a se eleva, con una aceleración constante, una carga de masa $m_1 = 5$ t. Se sabe que durante los primeros tres segundos la carga pasa una distancia $h = 10$ m. Comprobar la resistencia de las vigas. La masa del cabrestante es $m_2 = 0{,}5$ t, $l = 4$ m, $[\sigma] = 160$ MPa.

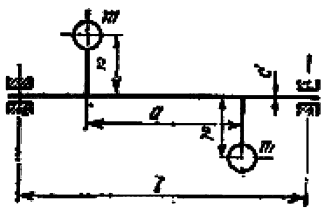


Para el problema 9.4

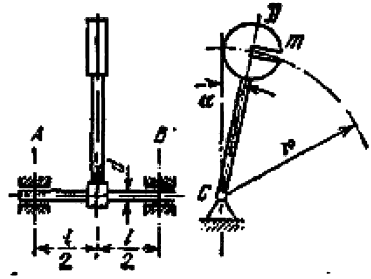


Para el problema 9.5

9.6. A un árbol que gira con una velocidad angular constante están fijadas dos barras, cada una de las cuales lleva en su extremo una masa $m = 10$ kg. Las barras se encuentran en un mismo plano a iguales distancias de los apoyos. Determinar las magnitudes de las tensiones normales máximas debidas a la flexión del árbol por las fuerzas de inercia. La masa propia del árbol y la de las barras se desprecian. Viene dado: $n = 600$ r.p.m., $l = 3$ m, $d = 6$ cm, $r = 0{,}25$ m, $a = 2$ m.



Para el problema 9.6

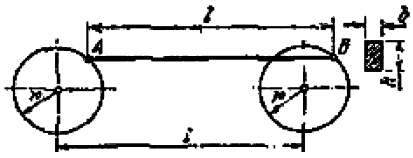


Para el problema 9.7

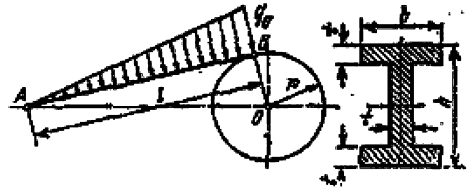
9.7*. El péndulo CD que puede girar alrededor del eje AB se pone en la posición superior y luego se deja caer libremente. Determinar la tensión normal máxima en el eje del péndulo debida a la flexión por las fuerzas de inercia. Viene dado: $m = 25$ kg, $r = 0{,}75$ m, $l = 0{,}25$ m, $d = 2$ cm. La masa propia de la barra CD y el rozamiento se desprecian. Considerar $\alpha = 0$.

9.8*. Determinar la tensión normal máxima debida a la flexión por las fuerzas de inercia en la barra AB de sección rectangular. Las ruedas giran con una velocidad angular constante.

Viene dado: $n = 300$ r.p.m., $l = 2$ m, $r = 0{,}25$ cm, $h = 5{,}6$ cm, $\rho = 7{,}85$ t/m³.



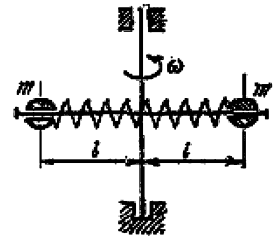
Para el problema 9.8



Para el problema 9.9

9.9*. Hallar la tensión normal máxima debida a la flexión de una biela por fuerzas de inercia. La sección de la biela es de perfil doble T. Viene dado: $r = 0{,}1$ m, $l = 0{,}4$ m, $b = 4$ cm, $h = 5$ cm, $t = 1$ cm, $n = 2000$ r.p.m., $\rho = 7{,}85$ t/m^3.

9.10*. Un resorte cilíndrico fijado a una barra vertical, en cada extremo del cual hay una masa $m = 1$ kg, gira alrededor de un eje vertical con una velocidad angular constante ω. Determinar la velocidad angular a la cual corresponde un alargamiento de cada una de las mitades del resorte igual a $f = 5$ cm. Calcular la tensión tangencial máxima en el resorte. La masa del resorte se desprecia. El diámetro medio del resorte es $D = 6$ cm, el del alambre del que está hecho, $d = 0{,}5$ cm, el número de espiras es $n = 30$, $l = 15$ cm; $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.



Para el problema 9.10

9.11*. Determinar la frecuencia de rotación crítica para el sistema examinado en el problema anterior.

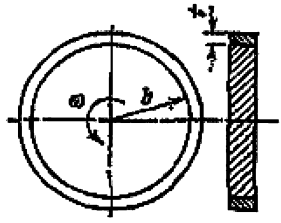
9.12*. Un volante de momento de inercia $J_{vol} = 40$ kg·m^2 está montado en un árbol de diámetro $d = 60$ mm. La frecuencia de rotación del árbol es igual a $n = 600$ r.p.m. Al conectar el freno, el volante para después de hacer 10 revoluciones. Determinar la tensión tangencial máxima en el árbol, considerando que la fuerza del frenado es constante. La masa del árbol se desprecia.

9.13*. El volante de un motor eléctrico de arranque por inercia representa un disco de grosor constante de diámetro $D = 16$ cm y masa $m = 8$ kg. En el intervalo de tiempo $t = 1$ s éste adquiere una frecuencia de rotación igual a $n = 8000$ r.p.m. Hallar la tensión tangencial máxima en el árbol de diámetro $d = 20$ mm sobre el cual está montado el volante, considerando que la aceleración es constante.

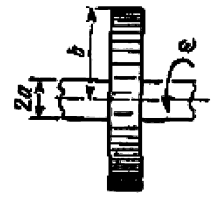
9.14. Determinar las tensiones normales máximas en un disco de acero macizo de grosor constante (el radio del disco es $R = 30$ cm, la frecuencia de rotación, $n = 10\,000$ r.p.m.) y compararlas con la tensión máxima en un disco igual, pero con un pequeño orificio en el centro. La densidad es $\rho = 7{,}85$ t/m^3, $\mu = 0{,}3$.

9.15*. Sobre un disco de duraluminio de grosor constante está montado a presión una llanta de acero; el huelgo negativo es igual

a $\Delta = 2\delta - 1$ mm. Determinar la frecuencia de rotación necesaria para que el huelgo negativo sea igualado a cero. El coeficiente de Poisson del duraluminio es $\mu = 0{,}32$, la densidad, $\rho_{dur} = 2{,}7$ t/m^3, $\rho_{ac} = 7{,}85$ t/m^3, $b = 50$ cm, $t = 1{,}5$ cm, $E_{dur} = 7 \cdot 10^4$ MPa, $E_{ac} = 2 \cdot 10^5$ MPa.



Para el problema 9.15



Para el problema 9.17

9.16*. Determinar las tensiones máximas en el disco del problema anterior si este hace $n = 2500$ rotaciones por minuto. Hallar también las tensiones en la llanta.

9.17*. Un disco de grosor constante está montado a presión sobre un eje de acero; el huelgo negativo es igual a $\Delta = 2\delta = 0{,}1$ mm. Determinar con qué frecuencia de rotación la presión del huelgo negativo será igual a cero. Viene dado: $a = 5$ cm, $b = 40$ cm, $\mu = 0{,}28$, $\rho = 7{,}85$ t/m^3, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

9.18*. Determinar las tensiones máximas en un disco de acero de grosor constante montado a presión sobre un árbol de acero. La frecuencia de rotación es $n = 3000$ r.p.m. Tomar los datos del problema anterior.

§ 2. Oscilaciones propias de sistemas elásticos reducidos a sistemas con un grado de libertad

9.19*. Una carga de masa $m = 2$ kg está suspendida de un resorte cilíndrico. La carga puede efectuar solamente desplazamientos verticales. Determinar la frecuencia de oscilaciones propias de la carga teniendo y sin tener en cuenta la masa del resorte. El diámetro medio del resorte es $D = 6$ cm, el del alambre, $d = 0{,}6$ cm, el número de espiras es $n = 15$, la densidad, $\rho = 7{,}85$ t/m^3; $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

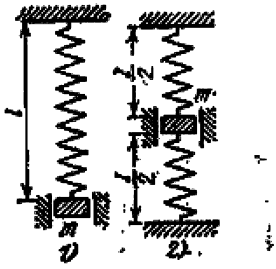
9.20*. Una carga de masa $m = 50$ kg está fijada a una barra de acero de longitud $l = 1$ m y diámetro $d = 2$ cm. Hallar la frecuencia y el período de oscilaciones verticales propias del sistema sin tener y teniendo en cuenta la masa de la barra. La densidad del material es $\rho = 7{,}85$ t/m^3, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

9.21*. Determinar la frecuencia y el período de oscilaciones longitudinales propias de un resorte cilíndrico. El diámetro medio del resorte es $D = 60$ mm, el del alambre del que está hecho, $d = 2$ mm, el número de espiras es $n = 10$, la densidad, $\rho = 7{,}85$ t/m^3, $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

9.22. ¿Cómo variará la frecuencia de oscilaciones propias de una carga, si se pasa del primer esquema de fijación de la carga al segundo cortando el resorte en dos partes iguales y fijando la carga entre estas partes?

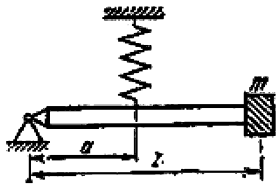
Para el problema 9.19

Para el problema 9.20

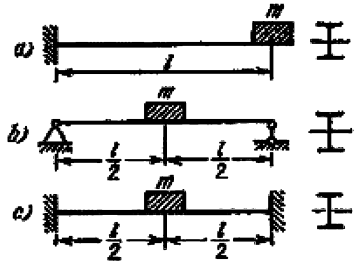


Para el problema 9.22

9.23*. Una carga de masa $m = 3$ kg está fijada a una palanca rígida sostenida por un resorte cilíndrico. Determinar la frecuencia de oscilaciones propias del sistema, despreciando la masa de la palanca y la del resorte. El diámetro medio del resorte es $D = 3$ cm, el del alambre del que está fabricado, $d = 0{,}3$ cm, el número de espiras es $n = 10$, $l = 25$ cm, $a = 10$ cm; $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.



Para el problema 9.23



Para el problema 9.24

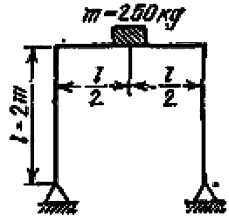
9.24*. Determinar la frecuencia y el período de oscilaciones de una carga de masa $m = 500$ kg situada sobre una viga de sección doble T N° 20a teniendo y sin tener en cuenta la masa de la viga. La longitud de la viga es $l = 4$ m, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

9.25. Determinar la frecuencia de oscilaciones verticales propias de una carga de masa $m = 250$ kg fijada en el punto medio del dintel de una estructura. Las barras de la estructura son de secciones tubulares 50×40 mm. La masa de la estructura se desprecia. $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

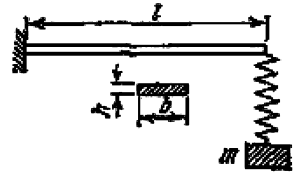
9.26*. Una carga de masa $m = 1$ kg está suspendida de un resorte fijado a un voladizo de longitud $l = 0{,}5$ m. Determinar la frecuencia de oscilaciones propias del sistema, despreciando la masa del resorte y la de la viga. Viene dado: $b = 5$ cm, $h = 1$ cm, el diámetro medio del resorte es $D = 10$ cm, el diámetro del alambre del resorte

es $d = 0{,}5$ cm, el número de espiras es $n = 10$; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

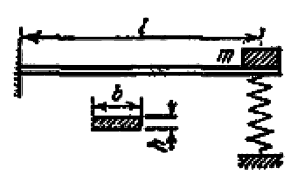
9.27. Una carga de masa $m = 0{,}5$ kg está fijada sobre un voladizo cuyo extremo se apoya en un resorte. Determinar la frecuencia de



Para el problema 9.25

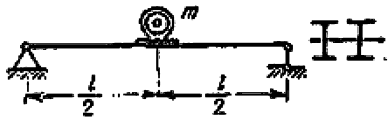


Para el problema 9.26



Para el problema 9.27

oscilaciones propias de la carga, sin tener en cuenta la masa del sistema elástico. Viene dado: $b = 20$ mm, $h = 1{,}5$ mm, $l = 40$ cm. El diámetro medio del resorte es $D = 20$ mm; el diámetro del alambre, $d = 1$ mm, el número de espiras, $n = 8$; $G = 8 \cdot 10^4$ MPa, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.



Para el problema 9.28

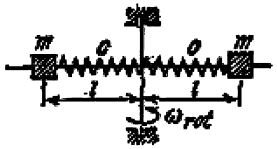
9.28*. Un motor eléctrico está instalado sobre dos vigas de sección doble T en el punto medio de la luz. La frecuencia de rotación del rotor del motor eléctrico es igual a $n = 1200$ r.p.m. Calcular la sección de las vigas a partir de la condición de que la frecuencia de oscilaciones transversales propias del sistema sea un 30% mayor que la frecuencia de la fuerza perturbadora que surge a causa del desequilibrio dinámico del rotor. Es necesario tener en cuenta la masa de las vigas. Viene dado: $m = 1000$ kg, $l = 5$ m, $[\sigma] = 160$ MPa, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

Indicación. Primeramente resolver el problema sin considerar la masa de las vigas y luego determinar la sección necesaria mediante el método de pruebas.

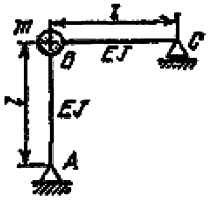
9.29*. Un sistema compuesto de dos masas m unidas entre sí por un resorte gira alrededor de un eje vertical. Determinar la dependencia entre la frecuencia de oscilaciones propias y la velocidad angular de la rotación del sistema ω_{rot}. La rigidez del semirresorte es igual a c.

9.30*. Una carga de masa m está fijada a una estructura plana. Determinar la frecuencia de oscilaciones propias de la carga en sentido horizontal sin tener en cuenta la masa de la estructura. Las barras son de igual rigidez EJ.

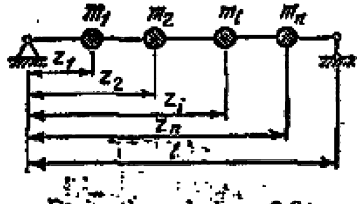
9.31*. Calcular la masa reducida de una viga que descansa sobre dos apoyos articulados y llevá n masas concentradas m_i dispuestas a distancias z_i del apoyo izquierdo, suponiendo que el eje curvo de la viga tiene la forma de la sinusoide $v = a \operatorname{sen}(\pi z/l)$. Reducir las masas a la sección media de la viga. La masa de la viga es igual a m.



Para el problema 9.29

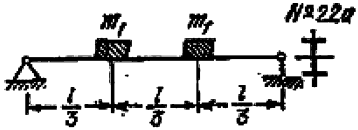


Para el problema 9.30



Para el problema 9.31

9.32*. Determinar la frecuencia principal de oscilaciones propias simétricas de una viga de sección doble T N° 22 con dos masas concentradas $m_1 = 200$ kg. Determinar la masa reducida del sistema, suponiendo que la viga se deforma según la sinusoide (véase el problema 9.31). La longitud de la viga es igual a $l = 6$ m, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.



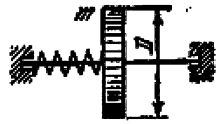
Para el problema 9.32

Para el problema 9.33

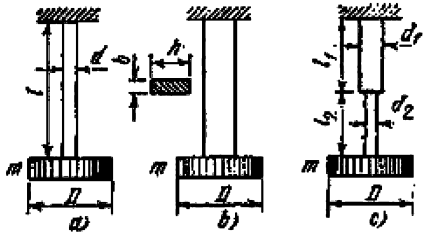
9.33*. Determinar por medio del método aproximado la primera frecuencia de oscilaciones propias de una viga de sección constante con apoyos articulados, sustituyendo la masa distribuida de la viga m por la reducida. Considerar que el coeficiente de reducción de la masa de la viga hacia el punto medio de la luz es igual a 0,5. Comparar con la resolución exacta: $\omega = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJl}{m}}$. Viene dado: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\rho = 7{,}85$ t/m³.

9.34*. Determinar el diámetro del árbol de un turbogenerador de potencia $N = 100$ kW que soporta en la sección media de la luz un disco de masa $m = 150$ kg montado con una excentricidad e, en dos casos: 1) cuando es un árbol cuya frecuencia de rotación crítica es mayor que la frecuencia de rotación de trabajo $n = 3000$ r.p.m. en un 35% (el llamado árbol rígido) y 2) cuando es un árbol cuya frecuencia de rotación crítica es tres veces menor que la frecuencia de rotación de trabajo (árbol flexible). La masa del árbol se desprecia. Viene dado: $l = 1$ m, $e = 0{,}01$ cm, $[\sigma] = 80$ MPa $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. Se supone que el árbol es de un solo vano con apoyos articulados en sus extremos.

9.35*. Determinar la frecuencia de oscilaciones angulares propias de un disco de masa $m = 0{,}2$ kg y de diámetro $D = 40$ mm fijado con ayuda de un resorte cilíndrico. El diámetro medio del resorte es $D_{med} = 12$ mm, el del alambre, $d = 1$ mm, el número de espiras, $n = 8$. Durante las oscilaciones angulares del disco el alambre trabaja a flexión, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.



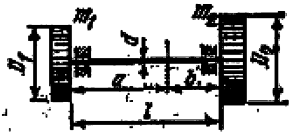
Para el problema 9.35



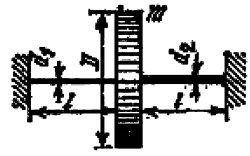
Para el problema 9.36

9.36. A los extremos inferiores de unas barras de acero están fijados discos de masa $m = 100$ kg y de diámetro $D = 20$ cm. Determinar la frecuencia y el período de oscilaciones angulares propias de los discos para las tres variantes de barras (fig. *a*—*c*). Viene dado: *a*) $d = 5$ cm, $l = 1$ m; *b*) $b = 3$ cm, $h = 6$ cm, $l = 1$ m; c) $d_1 = 6$ cm, $d_2 = 3$ cm, $l_1 = 0{,}6$ m, $l_2 = 0{,}4$ m, $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

9.37*. Dos discos de diámetros $D_1 = 20$ cm y $D_2 = 30$ cm están fijados en los extremos de un árbol de sección transversal circular de diámetro $d = 5$ cm y de longitud $l = 1{,}25$ m. Determinar la frecuencia de oscilaciones angulares propias del sistema, despreciando la masa del árbol. Las masas de los discos son iguales a $m_1 = 60$ kg, $m_2 = 100$ kg; $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.



Para el problema 9.37

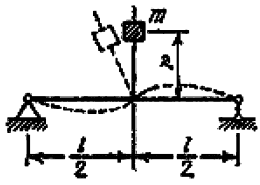


Para el problema 9.38

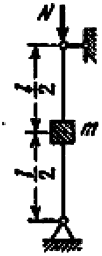
9.38. Determinar la frecuencia y el período de oscilaciones angulares de un disco de diámetro $D = 60$ cm y de masa $m = 80$ kg montado sobre un árbol de sección variable y cuyos extremos están empotrados. Las dimensiones del árbol son: $d_1 = 6$ cm, $d_2 = 8$ cm, $l = 1$ m. El material es acero; $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

9.39*. ¿A qué distancia r hace falta fijar la masa m para que las frecuencias de oscilaciones horizontales y verticales de la masa coincidan? Las secciones de las barras horizontal y vertical son iguales. La masa de las barras se desprecia.

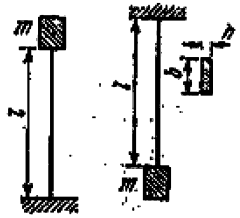
9.40*. En cuánto disminuirá la frecuencia de oscilaciones propias de la masa $m = 50$ kg fijada en la sección media de una barra de longitud $l = 2$ m y de diámetro $d = 4$ cm, si a la barra se aplica una fuerza de compresión N igual a la mitad de la fuerza crítica. La masa de la barra se desprecia; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.



Para el problema 9.39



Para el problema 9.40

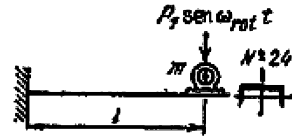


Para el problema 9.41

9.41*. Comparar las frecuencias de oscilaciones propias de una carga de masa $m = 2$ kg fijada en el extremo de una barra, para dos posiciones del sistema (véase la figura). Las frecuencias se deben determinar teniendo en cuenta la influencia de la fuerza longitudinal igual al peso de la carga mg. La masa de la barra se desprecia. Viene dado: $l = 0{,}5$ m, $b = 20$ mm, $h = 2$ mm, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

§ 3. Oscilaciones forzadas de sistemas elásticos reducidos a sistemas con un grado de libertad

9.42*. El rotor de un motor eléctrico instalado sobre un voladizo gira con una frecuencia $n = 900$ r.p.m. A causa del desequilibrio del rotor aparece una fuerza variable vertical $P_1 \operatorname{sen} \omega_{rot} t$. Determinar: 1) con qué valor de l surge la resonancia, 2) a qué distancia l hay que instalar el motor para que la frecuencia de oscilaciones, propias de la viga sea un 30% mayor que la frecuencia de la fuerza perturbadora. Para este caso es necesario calcular la amplitud de las oscilaciones forzadas y la tensión normal máxima. La masa de la viga se desprecia. La masa del motor es $m = 100$ kg, $P_1 = 0{,}2$ kN; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.



Para el problema 9.42

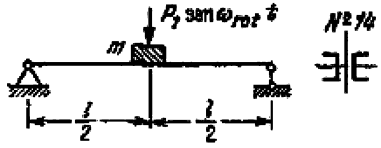
9.43*. El apoyo A de la viga horizontal AB de longitud l apoyada en su extremos, con una masa m en el punto medio de la luz, efectúa oscilaciones en sentido vertical de acuerdo con la ley $v_A = a \operatorname{sen} \omega_{rot} t$. Hallar la ley de movimiento de la masa, así como la flecha dinámica v_{din} de la viga por debajo de la carga.

9.44*. Determinar la tensión máxima en una viga con apoyos articulados que soporta una masa $m = 500$ kg situada en el centro de la luz, si uno de los apoyos oscila con una frecuencia $\omega_{rot} = 32$ 1/s. La amplitud de oscilaciones es $a = 4$ mm. La longitud de

la viga, $l = 4$ m, $J = 410$ cm^4; $W = 51{,}8$ cm^3; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. La masa de la viga se desprecia.

9.45*. El extremo superior de un resorte, del cual está suspendida la masa m, efectúa oscilaciones de acuerdo con la ley $x_A = r \operatorname{sen} \omega_{rot} t$. Hallar la ley de movimiento de la masa y la ley de variación del alargamiento del resorte. La desviación de la masa se cuenta a partir del estado de reposo en el momento de tiempo inicial $t = 0$.

Para el problema 9.45

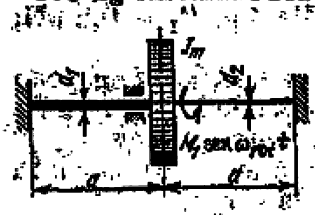


Para el problema 9.46

9.46*. Un motor de masa $m = 1500$ kg está instalado sobre dos vigas en el punto medio de la luz. Cuando el motor está en funcionamiento surge una fuerza variable $P_1 \operatorname{sen} \omega_{rot} t$. Determinar la amplitud de oscilaciones del motor y la tensión máxima en las vigas, teniendo en cuenta la masa de éstas; $P_1 = 10$ kN, el coeficiente de resistencia es $\alpha = 26 \cdot 10^3$ N·s·m^{-1}, $\omega_{rot} = 55$ 1/s, $l = 2{,}5$ m, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

9.47*. Un motor de masa $m = 500$ kg está instalado en el punto medio de la luz de dos vigas de sección doble T N° 20 con apoyos articulados en sus extremos. El rotor del motor de masa $m_1 = 200$ kg tiene una excentricidad $e = 2$ mm. Determinar con qué frecuencia de rotación se presenta la resonancia y qué magnitud tiene en este caso la tensión normal máxima. El coeficiente de resistencia es $\alpha = 2500$ N·s·m^{-1}. La longitud del vano es $l = 6$ m, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. Debe considerarse la masa de las vigas.

9.48*. Durante el funcionamiento de un motor de masa $m = 500$ kg instalado sobre dos vigas de sección doble T N° 22 se crea una fuerza periódica perturbadora $P_1 \operatorname{sen} \omega_{rot} t$. Investigar el carácter de las oscilaciones después de arrancar el motor, suponiendo que éste adquiere instantáneamente una frecuencia de rotación igual a $n = 600$ r.p.m. Hallar la tensión máxima en las vigas durante el régimen inestable en que las oscilaciones propias del sistema no se han amortiguado todavía. Comparar con la tensión máxima cuando el régimen es estable. Viene dado: $P_1 = 1{,}6$ kN, la longitud del vano es $l = 6$ m, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.



Para el problema 9.49

9.49*. Un volante sometido a la acción del momento variable M_1 sen $\omega_{rot}t$ está montado sobre un árbol de sección variable cuyos extremos están empotrados. Determinar las tensiones tangenciales máximas en las partes derecha e izquierda del árbol. Viene dado: $M_1 = 0{,}2$ kN·m, $\omega_{rot} = 20$ 1/s, $J_{vol} = 4$ kg·m², $d_1 = 1{,}19$ cm, $d_2 = 1$ cm. El coeficiente de resistencia es $\alpha = 6$ N·s·m, $G = 8 \cdot 10^4$ MPa. La masa del árbol se desprecia.

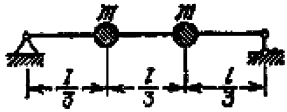
§ 4. Oscilaciones de sistemas con varios grados de libertad

9.50*. Un resorte porta dos masas m de 20 kg cada una. Una masa se encuentra en un extremo del resorte y la otra en el centro de éste. El diámetro medio del resorte es $D = 4$ cm, el del alambre del resorte, $d = 0{,}6$ cm, el número de espiras en cada mitad del resorte es $n = 10$. Hallar la frecuencia de oscilaciones propias del sistema e investigar las formas de las oscilaciones. $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

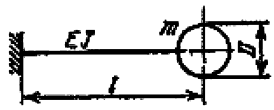
Para el problema 9.50

9.51*. Determinar las frecuencias de las oscilaciones transversales propias de una viga con apoyos articulados que lleva dos masas concentradas iguales $m = 500$ kg, los puntos de aplicación de las cuales dividen la luz de la viga l en tres partes iguales. La rigidez es $EJ = 2{,}26$ MN·m², $l = 3$ m. La masa de la viga se desprecia.

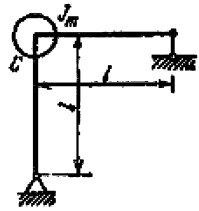
9.52*. Determinar las frecuencias de las oscilaciones angulares y lineales propias de un disco de diámetro $D = 0{,}36$ m y de masa $m = 15$ kg fijado en el extremo de un voladizo de longitud $l = 0{,}5$ m. La rigidez es $EJ = 0{,}5$ kN·m². La masa del voladizo se desprecia.



Para el problema 9.51



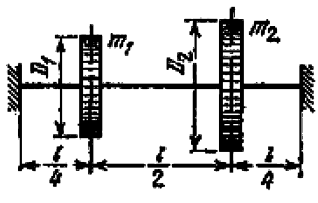
Para el problema 9.52



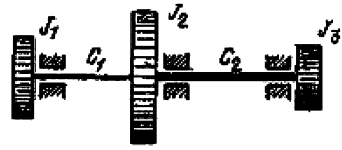
Para el problema 9.53

9.53*. Un disco de masa $m = 5$ kg y de momento de inercia $J_m = 0{,}1$ kg·m² está rígidamente fijado en el nudo C de una estructura. Determinar las frecuencias de oscilación angulares y lineales libres del disco. Las barras de la estructura son de sección circular de diámetro $d = 1$ cm, $l = 1$ m. Investigar las formas de las oscilaciones; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

9.54*. Determinar las frecuencias de las oscilaciones torsionales propias de un sistema compuesto de dos discos de masas $m_1 = 16$ kg y $m_2 = 20$ kg fijados sobre un árbol de acero de diámetro $d = 2{,}5$ cm. Los diámetros de los discos son: $D_1 = 0{,}24$ m, $D_2 = 0{,}32$ m. La longitud del árbol es $l = 1{,}2$ m, $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.



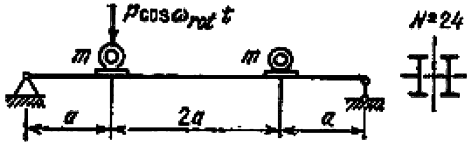
Para el problema 9.54



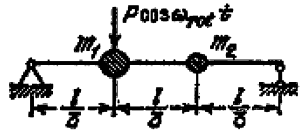
Para el problema 9.55

9.55*. Determinar las frecuencias y formas de las oscilaciones de un sistema compuesto de tres discos con momentos de inercia $J_1 = 0{,}2$ kg·m², $J_2 = 0{,}3$ kg·m² y $J_3 = 0{,}1$ kg·m² fijados sobre un árbol de acero de rigideces $c_1 = 0{,}1$ kN·m y $c_2 = 0{,}2$ kN·m.

9.56*. Dos motores de masa $m = 500$ kg cada uno están instalados sobre dos vigas de sección doble T N° 24. El motor izquierdo durante su funcionamiento crea una fuerza perturbadora $P \cos \omega_{rot} t$. Hallar las amplitudes de las oscilaciones de los motores, así como la tensión máxima en las vigas sin tener en cuenta sus masas. Viene dado: $a = 2$ m, $P = 1$ kN, $n = 480$ r.p.m., $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.



Para el problema 9.56



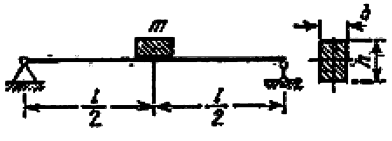
Para el problema 9.57

9.57*. Un equipo de masa $m_1 = 200$ kg situado sobre una viga con apoyos articulados crea, en funcionamiento, una fuerza perturbadora $P \cos \omega_{rot} t$. Determinar la masa m_2 del amortiguador de oscilaciones del equipo. La frecuencia de rotación del rotor del equipo es $n = 600$ r.p.m., la rigidez, $EJ = 4$ kN·m², la longitud del vano, $l = 2{,}5$ m.

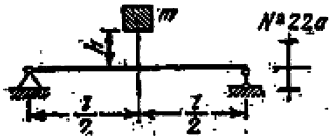
§ 5. Acción del choque sobre una construcción

9.58. Una carga de masa $m = 200$ kg fue aplicada súbitamente a una viga de madera de sección rectangular, cuya luz es igual a $l = 3$ m. Determinar la flecha de la viga bajo la carga y comprobar la resistencia de la viga. Viene dado: $b = 10$ cm, $h = 15$ cm, $E = 0{,}11 \cdot 10^5$ MPa, $[\sigma] = 11$ MPa. La masa de la viga se desprecia.

9.59*. Una carga de masa $m = 100$ kg cae desde una altura $h =$ $= 10$ cm sobre el punto medio de una viga de sección doble T N° 22a. Determinar la flecha bajo la carga y la tensión máxima en la viga. La longitud del vano es $l = 2$ m. La masa de la viga se desprecia; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.



Para el problema 9.58

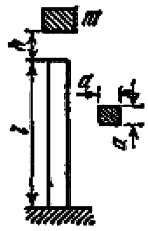


Para el problema 9.59

9.60*. Una carga de masa $m = 50$ kg cae desde una altura $h =$ $= 1$ m sobre un disco fijado en el extremo inferior de una barra de sección circular de diámetro $d = 2$ cm. Calcular el alargamiento de la barra y la tensión en ésta, despreciando la masa del disco y considerándolo indeformable. Resolver el problema teniendo y sin tener en cuenta la masa de la barra. La densidad es $\rho = 7{,}85$ t/m^3, $l = 2$ m, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

9.61. Una carga de masa $m = 10$ kg cae desde una altura $h =$ $= 10$ cm sobre una barra de acero de sección cuadrada cuyo lado es $a = 5$ cm. Suponiendo que la barra no pierde su estabilidad, determinar la tensión, así como la altura desde la cual debe caer la carga para que la tensión en la barra alcance el límite de proporcionalidad $\sigma_{prop} = 200$ MPa. Considérese la masa de la barra. La densidad es $\rho = 7{,}85$ t/m^3, $l = 1$ m, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

Para el problema 9.60



Para el problema 9.61

Para el problema 9.63

9.62. Comparar las tensiones máximas que surgen en una viga de sección rectangular a causa del golpe de una carga que cae desde una altura h en los casos cuando el golpe se produce en el plano de rigidez mínima y cuando tiene lugar en el plano de rigidez máxima. El coeficiente dinámico se determina por la fórmula aproximada $K_{din} = \sqrt{2h\Delta_{est}}$.

9.63*. Determinar las tensiones en un resorte cilíndrico debidas al golpe de un cuerpo de masa $m = 2$ kg que se mueve a una velocidad

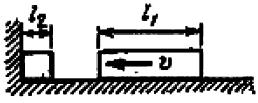
$v = 5$ m/s. El diámetro medio del resorte es $D = 4$ cm, el del alambre del resorte, $d = 0{,}6$ cm, el número de espiras es $n = 12$, $m_1 = 1{,}5$ kg, $G = 8 \cdot 10^4$ MPa. Considerar que el golpe es absolutamente inelástico. La masa del resorte se desprecia.

9.64*. Determinar el número mínimo de espiras de un resorte amortiguador cilíndrico capaz de resistir el golpe de un cuerpo con una masa $m = 5$ kg que se deplaza horizontalmente con una velocidad $v = 3$ m/s sin deformaciones plásticas. El diámetro medio del resorte es $D = 6$ cm, el del alambre, $d = 0{,}6$ cm. El límite de fluencia durante el cizallamiento $\tau_{f1} = 300$ MPa, $G = 8 \cdot 10^4$ MPa. La masa del resorte se desprecia.

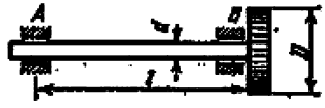
9.65. Una carga de masa $m = 1{,}5$ t suspendida de un cable de acero que baja a una velocidad $v = 2$ m/s para de súbito. Determinar las tensiones en el cable, si su longitud en el momento de la parada es igual a $l = 10$ m. El módulo de elasticidad del cable es $E = 1{,}7 \cdot 10^5$ MPa, el área de la sección, $F = 8$ cm^2. La masa del cable se desprecia.

9.66*. Determinar las tensiones surgidas en una barra corta de acero que se desplaza horizontalmente a una velocidad $v = 3$ m/s debidas a un golpe contra una pared indeformable. La densidad es $\rho = 7{,}85$ t/m^3. Considerar que las tensiones se distribuyen linealmente a lo largo de la barra; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

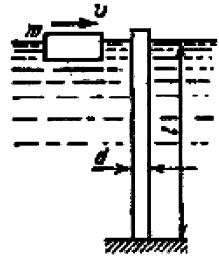
9.67*. Determinar las tensiones en una barra de longitud $l_1 = 8$ cm como la examinada en el problema anterior, si ésta choca contra un tope de longitud $l_2 = 2$ cm que representa una barra corta de acero de sección igual a la de la barra en movimiento. Considerar que las tensiones en el tope son constantes.



Para el problema 9.67



Para el problema 9.68



Para el problema 9.69

9.68*. Un disco de diámetro $D = 20$ cm y masa $m = 50$ kg montado sobre un árbol AB de longitud $l = 1$ m y diámetro $d = 6$ cm tiene una frecuencia de rotación $n = 300$ r.p.m. Determinar la tensión tangencial máxima en el árbol en el momento en que su extremo A para de súbito (golpe torsional). La masa del árbol se desprecia; $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

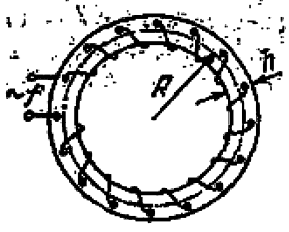
9.69. Un bloque de hielo de masa $m = 200$ kg, desplazándose a una velocidad $v = 1$ m/s, choca contra el extremo superior de un pilote de madera de longitud $l = 3$ m y diámetro $d = 20$ cm.

Determinar la tensión máxima en el pilote. $E = 0{,}11 \cdot 10^5$ MPa. La masa del pilote se desprecia.

9.70*. Una viga de longitud $2l$ cae horizontalmente desde una altura h y choca con su punto medio contra un obstáculo. Determinar el momento flector máximo en ella, si la masa por unidad de longitud de la viga es igual a m_0.

§ 6. Oscilaciones paramétricas y autooscilaciones

9.71*. Un vibrador magnetoestrictivo está compuesto de un anillo ferromagnético con orificios a través de los cuales pasa el arrollamiento de excitación. Al pasar la corriente eléctrica por el arrollamiento en la sección del anillo se crea un campo magnético. Además de esto se produce un efecto magnetoestrictivo directo que se manifiesta en la variación del radio del anillo. En presencia de premagnetización, la corriente eléctrica de frecuencia variable provoca oscilaciones radiales de la misma frecuencia. Para obtener la amplitud de oscilaciones máxima esta frecuencia se elige igual a la frecuencia propia de oscilaciones radiales del anillo.



Para el problema 9.71

Si la frecuencia de la corriente varía, ella puede coincidir con una de las frecuencias propias de las oscilaciones de flexión del anillo. ¿Con qué relación entre el coeficiente de magnetoestricción y el coeficiente de rozamiento en el anillo surgirán oscilaciones paramétricas, si suponemos que la carga magnetoestrictiva es paramétrica respecto a las formas de flexión de las oscilaciones del anillo? ¿Surgirán o no oscilaciones paramétricas, si el coeficiente de magnetoestricción del níquel, del cual está fabricado el vibrador, es igual a $\lambda = 7{,}5 \cdot 10^{-5}$ y el coeficiente de rozamiento es igual a $\eta = 0{,}008$? ¿Con qué frecuencia de excitación podrían surgir tales oscilaciones, si el diámetro medio del anillo es $R = 0{,}1$ m, el grosor, $h = 0{,}015$ m, la velocidad del sonido en el níquel es $c = \sqrt{E/\rho} = 4{,}8 \cdot 10^3$ m/s? E es el módulo de elasticidad; ρ, la densidad. Al determinar las frecuencias propias del anillo, la influencia del arrollamiento y de los orificios se desprecia.

9.72*. Calcular la velocidad crítica v_{cr} del flameo flexural — torsional del ala recta de un avión cuando la envergadura del ala es igual a $2l = 40$ m y la cuerda de la misma es $b = 4$ m. La dependencia del coeficiente de sustentación aerodinámica del ángulo de ataque es $c_{sa} = 3{,}5\alpha$, la distancia desde el borde delantero hasta el punto de aplicación de la fuerza sustentadora (coordenada del foco del ala) es $x_f = 0{,}96$ m, la coordenada del centro de flexión es $x_{flex} = 1{,}36$ m, la coordenada del centro de masas es x_m. La densidad del aire es $\rho = 1{,}29$ kg/m^3.

Suponer el esquema simplificado del ala en forma de un cuerpo absolutamente rígido de longitud l con ligaduras elásticas, la rigidez a la flexión de las cuales es igual a c_{flex} y la rigidez a la torsión, igual a $c_{tor} = 168\ \text{MN} \cdot \text{m}^2$.

§ 7. Métodos numéricos. Utilización de ordenadores

9.73*. Determinar los coeficientes λ_i en las expresiones de dos frecuencias bajas de las oscilaciones propias ω_i, si $\lambda^4 = \omega_i^2 \rho F l^4 / (EJ)$ y la viga es de sección constante. Examinar la viga empotrada en ambos extremos por el método de elementos finitos basado en el principio variacional. Suponer que en la primera aproximación el número de elementos finitos es igual a $n = 2$. En la fórmula arriba mencionada EJ es la rigidez de la viga; l, su longitud; ρ, la densidad del material; F, el área de la sección transversal. Comparar los resultados con la solución exacta.

9.74*. Resolver el problema anterior para una viga con apoyos articulados en sus extremos, considerando que $n = 2$.

9.75*. Examinar con ayuda de un ordenador el problema 9.73, considerando que el número de elementos finitos es igual a $n = 6$ y determinar las cinco frecuencias más bajas en comparación con la solución exacta.

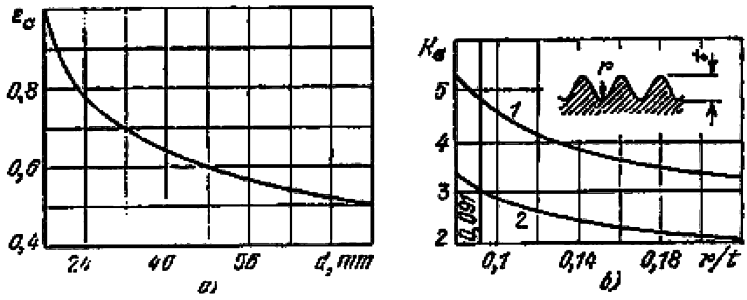
9.76*. Resolver el problema 9.74 suponiendo que el número de elementos finitos es igual a $n = 6$ y hallar las cinco frecuencias más bajas en comparación con la solución exacta.

CAPITULO 10

RESISTENCIA A LA FATIGA Y FLUENCIA

§ 1. Resistencia en estado de tensiones variables

10.1*. Un perno de acero aleado con rosca métrica y diámetro $d = 30$ mm está sometido a la acción de tensiones variables de tracción que van desde cero hasta su valor máximo. Determinar la tensión admisible cuando el factor de seguridad es igual a $n = 2$.

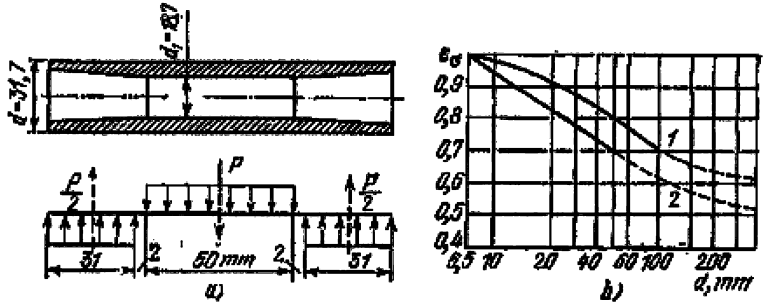


Para el problema 10.1. *1* — acero aleado, $d = 12$ mm; *2* — acero al carbono, $\sigma_r = 400$ MPa, $d = 12$ mm; $r/t = 0{,}091$ corresponde a la rosca métrica

Las características del acero son: $\sigma_r = 900$ MPa, $\sigma_{-1tr} = 300$ MPa, $\psi_\sigma = 0{,}1$. El coeficiente de concentración de tensiones debe ser tomado del gráfico adjunto. Para la rosca métrica $r/t = 0{,}091$ (véase la fig. *b*).

10.2*. Determinar el factor de seguridad de un perno de rosca métrica y diámetro $d = 20$ mm, si el esfuerzo de tracción en éste varía desde $N_{mín} = 5$ kN hasta $N_{máx} = 15$ kN. El diámetro interior del perno es $d_1 = 16{,}75$ mm. El perno está fabricado de acero al carbono con las características siguientes: $\sigma_r = 400$ MPa, $\sigma_{f1} = 240$ MPa, $\sigma_{-1tr} = 140$ MPa, $\psi_\sigma = 0$.

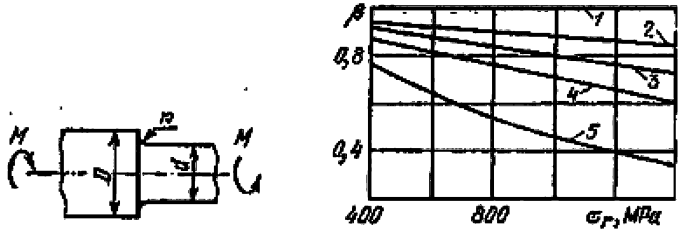
10.3*. El bulón de émbolo de un motor está sometido a una fuerza que varía desde $P_{máx} = 52$ kN hasta $P_{mín} = -11{,}5$ kN. Determinar el factor de seguridad en la sección más peligrosa. Las características del acero son: $\sigma_r = 1000$ MPa, $\sigma_{-1} = 450$ MPa, $\psi_\sigma = 0{,}15$. La superficie está pulida. El diagrama de cargas está representado en la fig. *a*.



Para el problema 10.3. *1* — acero al carbono, *2* — acero aleado

10.4*. Determinar el factor de seguridad del muelle cilíndrico de válvula de un motor. El diámetro medio del muelle es $D = 43{,}8$ mm, el diámetro del alambre del muelle es $d = 4{,}2$ mm. La carga varía desde $P_{mín} = 0{,}17$ kN hasta $P_{máx} = 0{,}28$ kN. Las características del material son: $\sigma_r = 1\,700$ MPa, $\tau_{r1} = 900$ MPa, $\tau_{-1} = 500$ MPa, $\psi_\tau = 0{,}1$.

10.5*. Determinar el factor de seguridad de un árbol escalonado de diámetros $D = 60$ mm, $d = 50$ mm y de radio de la arista hueca $r = 1$ mm. El momento torsor varía desde $M_{mín} = 1{,}2$ kN·m hasta



Para el problema 10.5. *1* — pulido, *2* — rectificado, *3* — torneado fino, *4* — torneado basto, *5* — existencia de la cascarilla

$M_{máx} = 4$ kN·m. El árbol está finamente torneado. Las características del material son: $\sigma_r = 800$ MPa, $\tau_{r1} = 280$ MPa, $\tau_{-1} = 220$ MPa, $\psi_\tau = 0{,}05$.

10.6*. Determinar las magnitudes admisibles de los momentos torsores máximo y mínimo, la relación entre los cuales es igual a $M_{mín}/M_{máx} = 0{,}25$, de un árbol escalonado de diámetros $D = 70$ mm, $d = 60$ mm y un radio de la arista hueca $r = 2$ mm. El factor de seguridad es $n = 2$. El árbol es de acero al carbono; $\sigma_r = 700$ MPa, $\tau_{r1} = 250$ MPa, $\tau_{-1} = 180$ MPa, $\psi_\tau = 0{,}05$. La superficie está pulida. Considerar que $\varepsilon_\tau = \varepsilon_\sigma$. El coeficiente β se toma del gráfico del problema 10.5.

10.7*. Determinar el factor de seguridad de un árbol escalonado de diámetros $D = 48$ mm, $d = 40$ mm y un radio de la arista hueca

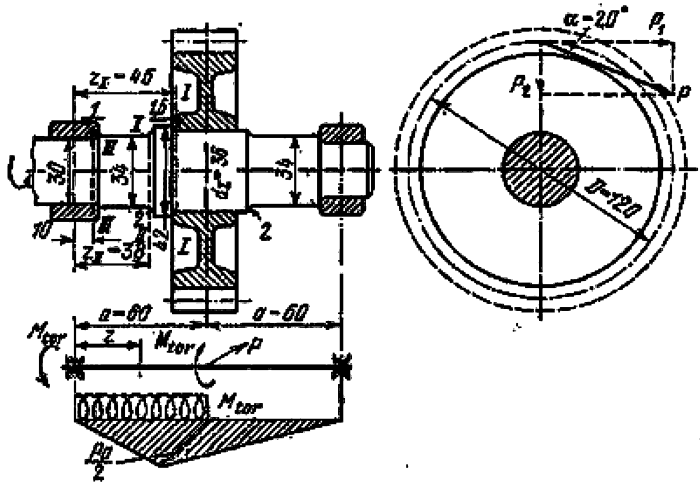
$r = 2$ mm sometido a flexión. La superficie del árbol está finamente torneada. El ciclo es simétrico. Viene dado: $\sigma_r = 500$ MPa, $\sigma_{-1} = 200$ MPa, el momento flector es $M_{máx} = 0{,}3$ kN·m.

10.8*. Sobre un árbol de diámetro $d = 50$ mm está montado a presión un casquillo. Determinar el factor de seguridad del árbol, si sobre éste actúa un momento flector $M = 0{,}75$ kN·m que cambia de acuerdo con el ciclo simétrico. Las características del material son: $\sigma_r = 800$ MPa, $\sigma_{-1} = 360$ MPa.

Para el problema 10.8

10.9*. Determinar el factor de seguridad de un árbol escalonado de diámetros $D = 48$ mm, $d = 40$ mm y un radio de la arista hueca $r = 2$ mm sometido a flexión variable con torsión. Las tensiones normales varían desde $\sigma_{máx} = 80$ MPa hasta $\sigma_{mín} = -80$ MPa. Las tangenciales varían desde $\tau_{máx} = 70$ MPa hasta $\tau_{mín} = 30$ MPa. El material es el acero aleado, cuyas características son: $\sigma_r = 800$ MPa, $\sigma_{fl} = 650$ MPa, $\sigma_{-1} = 360$ MPa, $\tau_{-1} = 210$ MPa, $\psi_\sigma = 0{,}10$, $\psi_\tau = 0{,}05$. La superficie está finamente torneada. ¿De qué modo variará el factor de seguridad, si la superficie del árbol está pulida?

10.10*. Determinar los factores de seguridad n_I, n_{II}, n_{III} en las secciones *I*, *II*, *III* de un árbol que transmite una potencia



Para el problema 10.10

$N = 40$ kW con una frecuencia de rotación $n = 1\,000$ r.p.m. En la figura están representados los diagramas de los momentos torsores y flectores. Las tensiones normales varían según un ciclo simétrico, las tangenciales, según un ciclo de pulsación. El árbol está finamente torneado. El engranaje de dientes rectos y los anillos-guía están

montados a presión. Las características del material son: $\sigma_r = 500$ MPa, $\sigma_{fl} = 260$ MPa, $\tau_{fl} = 140$ MPa, $\sigma_{-1} = 200$ MPa, $\tau_{-1} = 120$ MPa, $\psi_\sigma = 0{,}05$, $\psi_\tau = 0$.

10.11*. Una carga de masa $m = 20$ kg suspendida de un resorte cilíndrico efectúa oscilaciones con una amplitud $A = 4$ cm. El diámetro medio del resorte es $D = 10$ cm, el del alambre del resorte, $d = 1{,}2$ cm, el número de espiras, $n = 8$. Hallar el factor de seguridad del resorte. Viene dado: $\sigma_r = 1500$ MPa, $\tau_{fl} = 600$ MPa, $\tau_{-1} = 300$ MPa, $\tau_0 = 550$ MPa, $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

10.12*. Determinar la gama de frecuencias en la que debe encontrarse la frecuencia de rotación de la instalación representada en la figura del problema 9.45, para que el resorte rompa por fatiga. El diámetro medio del resorte es $D = 2$ cm, el del alambre del resorte, $d = 2$ mm, el número de espiras es $n = 8$. La masa es $m = 2$ kg, $r = 0{,}8$ cm, $\tau_{-1} = 350$ MPa, $\psi_\tau = 0{,}1$, $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

10.13*. Determinar el plazo de servicio de una pieza (número de ciclos de carga hasta la rotura) que trabaja bajo cargas no estacionarias. La distribución de amplitudes en el bloque se da en la tabla:

σ_{ai}, MPa	150	140	130	120	110	100	90	80	70	50
$10^{-3} n_i$	0,3	0,8	1,5	3	2	2	2,5	1,5	3	2,4

Los parámetros de la curva de fatiga son: $N_0 = 4 \cdot 10^6$, $m = 6$. El límite de fatiga de la pieza es $\sigma_{-1p} = 95$ MPa. Hacer uso de la hipótesis de la suma lineal de los deterioros.

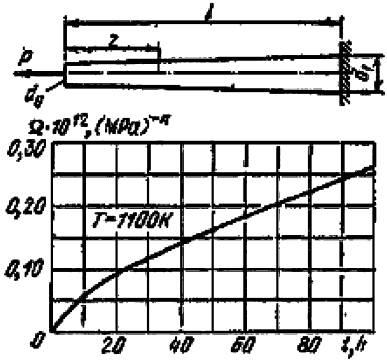
10.14*. Determinar el factor de seguridad de la pieza examinada en el problema anterior, si el plazo de servicio de ésta es de $3 \cdot 10^5$ ciclos.

§ 2. Fluencia y relajación

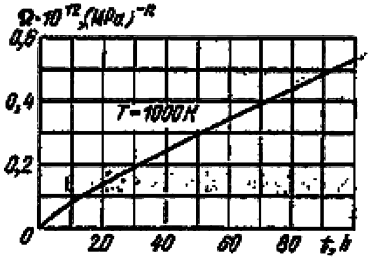
10.15*. Hallar el alargamiento de una barra de sección variable, cargada con una fuerza de tracción $P = 60$ kN, a causa de la fluencia después de 80 horas de trabajo a una temperatura $T = 1\,100$ K. Las dimensiones de la barra son: $d_0 = 1$ cm, $d_1 = 1{,}5$ cm, $l = 20$ cm. El material de la barra es acero. El exponente en la ecuación de la fluencia es $n = 3{,}8$. El gráfico de la función $\Omega(t)$ se da en la figura.

10.16*. La camisa cilíndrica de un motor de reacción calentada uniformemente está sometida a la acción de una presión interior excesiva $p = 0{,}3$ MPa y de una fuerza axial $N = 18$ kN. La temperatura es igual a $T = 1000$ K. El diámetro de la camisa es $D = 42$ cm. Determinar el grosor δ de ésta, partiendo de la condición de que durante 100 horas el aumento relativo del diámetro de la

camisa no sea mayor del 1%. La camisa está hecha de acero termorresistente. El exponente en la ecuación de la fluencia es $n = 6$. El gráfico de la función $\Omega(t)$ está dado en la figura.



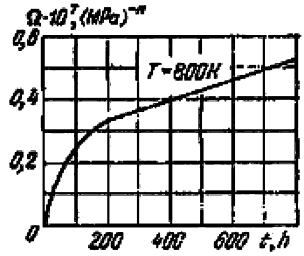
Para el problema 10.15



Para el problema 10.16

10.17*. Un tubo de paredes delgadas está cargado con un momento torsor $M_{tor} = 6$ kN·m. Determinar el ángulo de torsión del tubo a causa de la fluencia al trabajar 80 horas a la temperatura $T = 1000$ K. El diámetro exterior del tubo es $D = 180$ mm, el grosor de la pared, $\delta = 4$ mm, la longitud del tubo, $l = 0{,}8$ m. El tubo es de acero termorresistente. El exponente en la ecuación de la fluencia es $n = 6$. El gráfico de la función $\Omega(t)$ debe ser tomado del problema anterior.

10.18*. Una camisa cilíndrica de paredes delgadas está expuesta a una presión interior $p = 0{,}35$ MPa, una fuerza de tracción axial $N = 15$ kN y un momento torsor $M_{tor} = 4{,}6$ kN·m. Determinar el aumento del diámetro de la camisa a causa de una fluencia después de 90 horas de trabajo a la temperatura $T = 1000$ K. El diámetro de la camisa es $D = 40$ cm, el espesor de la pared, $\delta = 1{,}5$ mm. El material de la camisa es acero termorresistente. El exponente en la ecuación de la fluencia es $n = 6$. El gráfico de la función $\Omega(t)$ está dado en el problema 10.16.



Para el problema 10.19

10.19*. Determinar, dentro de cuántas horas es necesario apretar un perno de acero al cromo-vanadio que trabaja a la temperatura $T = 800$ K, si la disminución admisible de la tensión inicial del perno debe ser no más de un 25%. La tensión inicial en el perno es $\sigma_0 = 150$ MPa. El módulo de elasticidad a $T = 800$ K es igual a $E = 1{,}8 \cdot 10^5$ MPa. El exponente en la ecuación de la fluencia es $n = 1{,}83$. El gráfico de la función $\Omega(t)$ está dado en la figura. Debido

a la gran rigidez de las piezas apretadas por el perno la deformación de éstas se desprecia.

10.20*. ¿En qué por ciento disminuirá la tensión inicial de un perno de acero al cromo-vanadio a causa de la relajación durante 500 horas a la temperatura $T = 800$ K, si la tensión inicial es igual a $\sigma_0 = 180$ MPa? A esta temperatura el módulo de elasticidad es $E = 1{,}8 \cdot 10^5$ MPa. El exponente en la ecuación de la fluencia es $n = 1{,}83$. El gráfico de la función $\Omega(t)$ está dado en el problema anterior.

§ 3. Mecánica de la rotura

10.21*. Determinar cuántas veces hace falta aumentar el factor de seguridad, al realizar el cálculo de una pieza, si en el proceso de su fabricación es probable la aparición de grietas superficiales de longitud hasta $2l = 3$ mm. El material de la pieza es acero con un límite de resistencia a la rotura igual a $\sigma_r = 1600$ MPa. Al cargar la pieza, ésta se encuentra en condiciones de deformación plana, el coeficiente crítico de intensidad de las tensiones es $K_{I,c} = 100$ MN·m$^{-3/2}$. En este problema igual que en los problemas 10.22—10.24 no se debe tener en cuenta la dinámica del desarrollo de la grieta.

10.22*. Hallar las dimensiones admisibles (la longitud $2l$) de las grietas superficiales en una pieza hecha de una aleación a base de aluminio de $\sigma_r = 520$ MPa, $K_{I,c} = 30$ MN·m$^{-3/2}$ con las cuales la resistencia de la pieza disminuye como máximo a la mitad.

10.23*. Calcular la longitud $2l$ de una grieta, como resultado de la cual tendrá lugar una rotura frágil de una pieza plana estirada por una fuerza $P = 150$ kN. El área de la sección de la pieza es $F = 10$ cm^2, $K_{I,c} = 30$ MN·m$^{-3/2}$. La disminución de la sección durante el desarrollo de la grieta se desprecia.

10.24*. Para determinar el coeficiente crítico de intensidad de las tensiones $K_{I,c}$ fue ensayada a tracción una muestra plana de un material con $\sigma_r = 1200$ MPa. El área de la sección de la muestra es $F = 2$ cm^2. En el instante anterior a la rotura frágil, bajo la acción de una fuerza $P = 180$ kN, apareció en la muestra una grieta de longitud $2l = 30$ mm. Calcular la magnitud $K_{I,c}$.

10.25*. Una pieza está sometida a tensiones cíclicas que varían desde 0 hasta 50 MPa. Calcular el número de ciclos N_{cicl} que restan hasta la rotura de la pieza a partir de la aparición, en su superficie, de grietas de longitud $2l_0 = 0{,}5$ mm. El material de la pieza tiene $K_{I,c} = 20$ MN·m$^{-3/2}$, la velocidad del desarrollo de la grieta se define por la expresión $dl/dN = 10^{-8} (\Delta K)^2$ mm/ciclo, donde ΔK es el intervalo de variación del coeficiente de intensidad de las tensiones durante la carga cíclica.

§ 4. Seguridad en el caso de cargas accidentales

10.26*. Un elemento de una construcción está sometido a una acción accidental distribuida según una ley normal. El valor medio de la tensión que surge en este caso es igual a $\sigma = 100$ MPa, la desviación estándar, $S_\sigma = 50$ MPa. El límite de fluencia del material es $\sigma_{fl} = 300$ MPa.

Determinar la probabilidad de aparición, en el elemento, de una deformación plástica al cargarlo de una vez.

10.27*. Resolver el problema anterior suponiendo que el límite de fluencia está también distribuido según una ley normal con un valor medio de $\overline{\sigma_{fl}} = 300$ MPa y una desviación estándar $S_{\sigma_{fl}} = 20$ MPa.

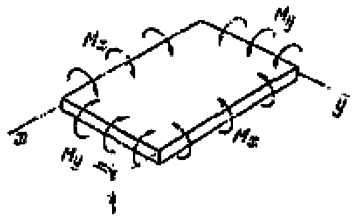
10.28*. Examinar el problema 10.26, suponiendo que la pieza es cargada dos veces.

CAPÍTULO 11

LÁMINAS Y BÓVEDAS

§ 1. Flexión de láminas rectangulares

11.1*. Una lámina rectangular libre de espesor $h = 0{,}6$ cm se encuentra sometida a flexión por momentos $M_x = 600$ N·m/m uniformemente distribuidos a lo largo de los bordes largos paralelos al eje y. Hallar el momento torsor máximo en la lámina, así como las tensiones normales y tangenciales máximas. Determinar los radios de curvatura principales de la superficie media de la lámina. La lámina es de acero ($E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\mu = 0{,}3$).



Para el problema 11.2

11.2*. Una lámina rectangular libre de espesor $h = 0{,}4$ cm se halla expuesta a flexión por momentos $M_x = 300$ N·m/m y $M_y = 100$ N·m/m uniformemente distribuidos a lo largo de sus bordes. Determinar las tensiones normales y tangenciales máximas en la lámina y comprobar su resistencia con ayuda de la teoría energética de resistencia cuando la tensión admisible es igual a $[\sigma] = 120$ MPa.

11.3. Una lámina cuadrada libre de espesor h se curva por momentos M_x y M_y uniformemente distribuidos a lo largo de sus bordes. Determinar cuál debe ser la relación entre M_x y M_y para que la torsión de la lámina sea igual a cero. Hallar la superficie por la cual se producirá la flexión de la lámina en este caso y determinar el alargamiento relativo máximo en la lámina, considerando que el módulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson μ del material son conocidos.

11.4. Una lámina cuadrada libre de espesor h se curva por momentos M_x y M_y uniformemente distribuidos a lo largo de sus bordes; las magnitudes de los momentos son iguales, pero sus signos son contrarios: $M_x = M$, $M_y = -M$. Determinar la magnitud y dirección del momento torsor máximo $K_{máx}$. Determinar la curvatura y torsión de la superficie curvada de la lámina en la dirección en que actúa $K_{máx}$. Considerar que el módulo de cizallamiento G y el módulo de elasticidad E del material de la lámina están dados.

11.5. Una lámina rectangular libre de espesor $h = 0{,}2$ cm se encuentra expuesta a torsión por momentos $K = 30$ N·m/m distri-

buidos uniformemente y aplicados a sus bordes. Determinar las direcciones por las cuales la torsión de la lámina es igual a cero. Calcular los momentos flectores y las curvaturas en estas direcciones.

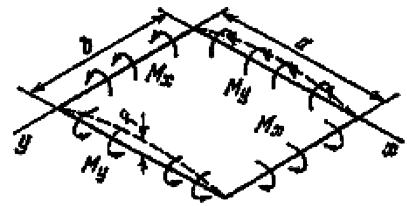
Comprobar la resistencia de la lámina por medio de la III teoría de resistencia, suponiendo que $[\sigma] = 160$ MPa, $E = 7 \cdot 10^4$ MPa, $\mu = 0{,}3$.

11.6*. Momentos $M_x = 250$ N·m/m uniformemente distribuidos están aplicados en dos bordes paralelos de una lámina rectangular de grosor $h = 0{,}5$ cm. Determinar la intensidad lineal de los momentos M_y que deben ser aplicados en los otros dos lados para eliminar la curvatura de la lámina en el sentido del eje y. ¿Por qué superficie se deformará en este caso la lámina?

Determinar las tensiones normales y tangenciales máximas y el radio de curvatura ρ_x cuando los momentos M_x y M_y actúan simultáneamente. Considerar que $E = 7 \cdot 10^4$ MPa y $\mu = 0{,}35$.

11.7*. Una lámina rectangular de espesor h al estar sometida a la acción de momentos M_x y M_y, uniformemente distribuidos a lo largo de sus bordes, se deforma por una superficie cilíndrica con generatrices paralelas al eje y. La flecha de la lámina es igual a $f = 0{,}9$ mm y está dirigida hacia arriba. Determinar las tensiones normales y tangenciales máximas en la lámina. Viene dado: $a = 24$ cm, $b = 20$ cm, $h = 0{,}6$ cm, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\mu = 0{,}25$.

11.8*. Una lámina rectangular de longitud $a = 20$ cm, ancho $b = 10$ cm y grosor $h = 0{,}2$ cm tiene los bordes largos libremente apoyados y está sometida a la acción de una carga uniformemente distribuida de intensidad $p = 12{,}5$ kPa. Determinar la flecha máxima f y las tensiones normales máximas en la lámina, suponiendo que $E = 7{,}2 \cdot 10^4$ MPa, $\mu = 0{,}34$.



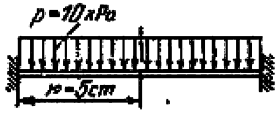
Para el problema 11.7

11.9*. Una lámina rectangular de longitud $a = 60$ cm, ancho $b = 20$ cm y grosor $h = 0{,}4$ cm está libremente apoyada por sus cuatro bordes y sometida a una presión uniforme $p = 40$ kPa. Determinar la flecha máxima f de la lámina, las tensiones normales y tangenciales máximas, así como el momento torsor máximo, considerando que $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\mu = 0{,}25$.

11.10*. Una lámina rectangular de longitud $a = 80$ cm, ancho $b = 25$ cm y grosor $h = 0{,}6$ cm está libremente apoyada por el contorno sobre bordes rígidos. La lámina está sometida a una presión $p = 200$ kPa. ¿En cuánto hay que reducir la presión para que la flecha máxima disminuya, en este caso, $\Delta f = 1$ mm? ¿Cuántas veces menor serán en este caso las tensiones normales? Considerar que $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\mu = 0{,}25$.

§ 2. Flexión de láminas circulares

11.11*. a) Construir el diagrama de deformaciones (v) y los diagramas de momentos flectores en las direcciones radial (M_1) y circunferencial (M_2) de una lámina circular de grosor $h = 1$ mm y radio $r = 5$ cm rígidamente empotrada en el borde y sometida a una carga transversal de intensidad $p = 10$ kPa uniformemente distribuida. El coeficiente de Poisson es $\mu = 0{,}3$. El módulo de elasticidad es $E = 2{,}2 \cdot 10^5$ MPa;



Para el problema 11.11(a)

b) Resolver el mismo problema para el caso de sustentación libre de la lámina en su contorno.

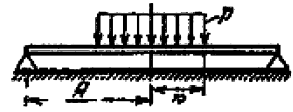
11.12. Una lámina de acero de grosor $h = 2$ mm y radio $r = 5$ cm está libremente apoyada en su contorno y sometida a una carga transversal $p = 0{,}12$ MPa uniformemente distribuida. Determinar la flecha máxima y las tensiones normal y tangencial máximas. El coeficiente de Poisson es $\mu = 0{,}25$, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

11.13. Una lámina de duraluminio de grosor $h = 3$ mm y radio $r = 20$ cm empotrada en todo su contorno está sometida a la acción en su centro de una fuerza concentrada $P = 100$ N. Determinar la flecha máxima y las tensiones máximas en flexión; $E = 7 \cdot 10^4$ MPa.

11.14. Resolver el problema 11.11 para el caso de una fuerza concentrada $P = 10$ N aplicada en el centro de la lámina.

11.15. Una lámina de duraluminio de radio $r = 20$ cm y grosor $t = 3$ mm apoyada libremente en su contorno está sometida a la acción de un momento de intensidad $M_0 = 0{,}5$ kN·m/m uniformemente distribuido a lo largo del contorno (caso de flexión pura de la lámina). Determinar los momentos flectores en las secciones radial y circunferencial, así como la flecha de la lámina; $E = 7 \cdot 10^4$ MPa.

Para el problema 11.15



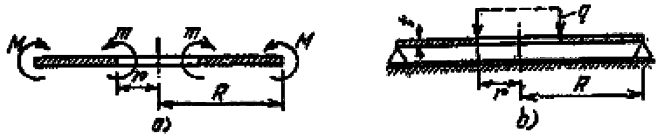
Para el problema 11.16

11.16. Una lámina circular libremente apoyada está sometida, dentro de los límites de su parte central de radio r, a la acción de una carga de intensidad p uniformemente distribuida. Determinar la flecha máxima.

11.17. Resolver el problema anterior para el caso cuando los bordes de la lámina están empotrados.

11.18. Obtener las expresiones de los momentos flectores M_1 y M_2 en una lámina circular con un orificio solicitada por: a) momentos distribuidos M y m en sus bordes exterior e interior correspon-

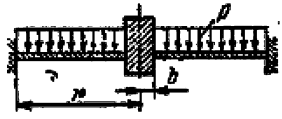
dientemente; b) una carga de intensidad q distribuida uniformemente en el borde del orificio.



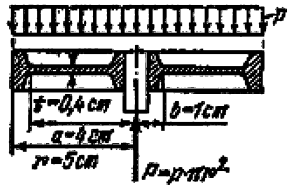
Para el problema 11.18

11.19. Para los datos del problema 11.18,*b* siendo $R = 15$ cm, $r = 5$ cm, $q = 10$ kN/m, $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, $\mu = 0{,}3$, se pide determinar la flecha máxima y construir los diagramas de los momentos M_1 y M_2. Definir la tensión máxima.

11.20. Una lámina de acero de grosor $h = 0{,}4$ cm y radio $r = 4$ cm posee en su centro una parte absolutamente rígida de radio $b = 1$ cm. Determinar la flecha máxima de la lámina estando ella sometida a la acción de una carga uniforme $p = 4$ MPa.



Para el problema 11.20

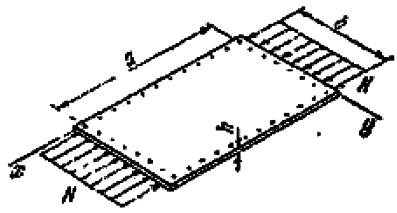


Para el problema 11.21

11.21. Obtener la ecuación de la deformada de un émbolo de acero expuesto a una presión $p = 4$ MPa y al esfuerzo de la varilla $P = p\pi r^2$ del lado contrario. Determinar la flecha máxima. Las partes engrosadas del émbolo se consideran absolutamente rígidas. $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\mu = 0{,}3$.

§ 3. Estabilidad de láminas rectangulares sometidas a compresión

11.22*. Una lámina rectangular con sustentación libre en su contorno está comprimida por fuerzas aplicadas en los bordes cortos. Determinar la tensión crítica, si $a = 40$ cm, $b = 25$ cm, $h = 0{,}8$ cm, $E = 7{,}2 \cdot 10^4$ MPa, $\mu = 0{,}34$, $\sigma_{prop} = 240$ MPa. ¿Cómo variará la tensión crítica, si la carga se aplica en los bordes largos?



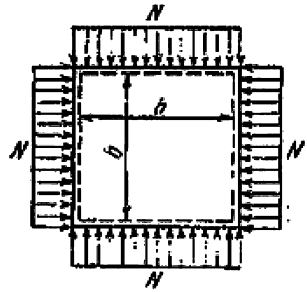
Para el problema 11.22

11.23. Determinar la tensión crítica en una lámina con apoyos articulados cuyas dimensiones son: $a = 40$ cm, $b = 20$ cm, $h =$

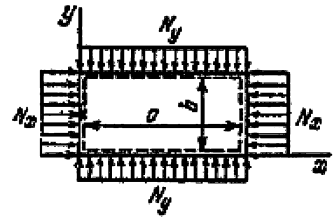
$= 0{,}1$ cm, si las fuerzas de compresión se aplican en los bordes cortos. Considerar $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, $\mu = 0{,}25$, $\sigma_{prop} = 420$ MPa. ¿De qué modo y en cuántas veces variará la tensión crítica, si disminuimos la longitud de la lámina en cuatro veces?

11.24*. Determinar el grosor h de una lámina a partir de su estabilidad en compresión por una fuerza $P = 30$ kN uniformemente distribuida por los bordes cortos. La lámina está simplemente apoyada por su contorno. Viene dado: $a = 35$ cm, $b = 10$ cm, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\mu = 0{,}28$, el coeficiente de reserva de estabilidad es $n = 1{,}5$.

11.25*. Una lámina cuadrada de lado $b = 20$ cm con apoyos articulados en su contorno está comprimida en dos direcciones mutuamente perpendiculares por fuerzas lineales iguales N. Determinar la tensión crítica, si el grosor $h = 0{,}4$ cm, $E = 7 \cdot 10^4$ MPa, $\mu = 0{,}3$. ¿Cuánto menor es esta tensión en comparación con el caso cuando la lámina se comprime en una sola dirección?



Para el problema 11.25



Para el problema 11.26

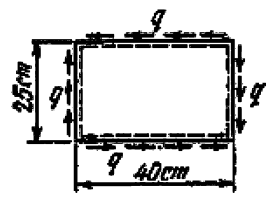
11.26*. Una lámina de longitud $a = 40$ cm, ancho $b = 20$ cm, grosor $h = 0{,}3$ cm está comprimida longitudinalmente por esfuerzos lineales N_x. Determinar en cuánto disminuirán las tensiones críticas, si a la lámina se le aplican adicionalmente unos esfuerzos de compresión $N_y = N_x/2$ en dirección transversal. Considerar que $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\mu = 0{,}25$.

§ 4. Estabilidad de láminas rectangulares sometidas a cizallamiento

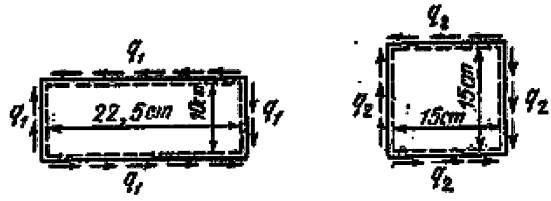
11.27*. Una lámina rectangular de longitud $a = 40$ cm, ancho $b = 25$ cm, grosor $h = 0{,}4$ cm con apoyos articulados en su contorno está sometida, por los bordes, a esfuerzos de cizallamiento q. Determinar la tensión tangencial crítica, considerando $E = 7{,}2 \cdot 10^4$ MPa, $\tau_{prop} = 120$ MPa.

11.28*. Una lámina cuadrada de 30×30 cm de grosor $h = 0{,}2$ cm experimenta cizallamiento puro. Determinar el valor de

la tensión crítica en el caso de empotramiento rígido de los bordes de la lámina. ¿En cuánto disminuirán las tensiones críticas, si se articulan sus bordes? Considerar que $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa.



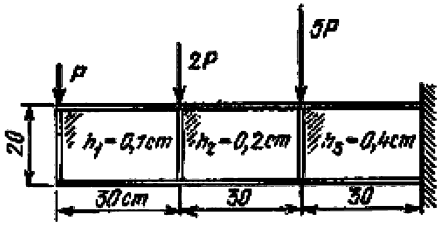
Para el problema 11.27



Para el problema 11.29

11.29. ¿Cuántas veces la tensión tangencial crítica de una lámina rectangular (véase la figura) es mayor que la de una lámina cuadrada de la misma área? El material y los grosores de las láminas son iguales, los apoyos son articulados.

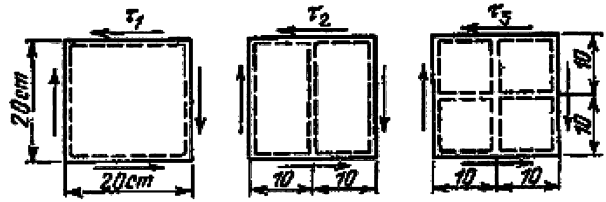
11.30. Determinar el valor admisible de la carga P para una viga de paredes delgadas, si el coeficiente de reserva de estabilidad



Para el problema 11.30

del alma es $n = 1{,}6$ y $E = 7{,}2 \cdot 10^4$ MPa. Considerar que los nudos están articulados y la pared tiene sustentación isostática en su contorno.

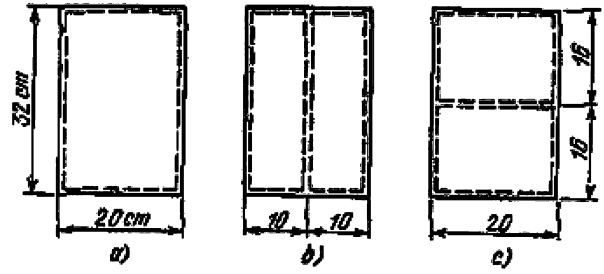
11.31. Una lámina cuadrada con apoyo articulado de su contorno está sometida a esfuerzos de cizallamiento. Calcular en cuántas veces aumentará la tensión crítica, si la lámina se apoya en el punto medio por: a) un nervio, b) dos nervios cruzados (véase la figura).



Para el problema 11.31

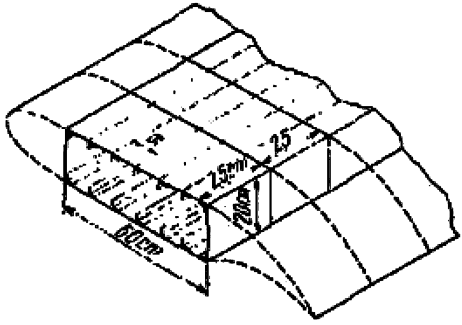
11.32. La lámina representada en la figura está cargada por los bordes con fuerzas de cizallamiento. ¿En cuántas veces aumentará

la tensión crítica de cizallamiento, si la lámina se apoya por: a) un nervio longitudinal, b) un nervio transversal que pasa por el punto medio? Se supone que el apoyo de la lámina sobre el nervio es articulado.

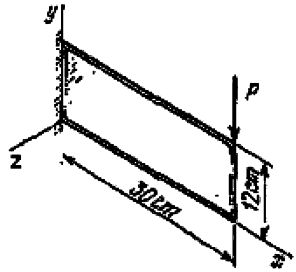


Para el problema 11.32

11.33*. Un revestimiento cilíndrico reforzado está sometido a la acción de un momento torsor $M_{tor} = 50$ kN·m. Las costillas están dispuestas a lo largo del revestimiento a 25 cm. Determinar el paso máximo x de los larguerillos a partir de la condición de estabilidad de los paneles del revestimiento de grosor $h = 0{,}2$ cm. Viene dado: $E = 7{,}2 \cdot 10^4$ MPa, $\tau_{prop} = 200$ MPa. Considerar que las uniones de los paneles con las barras de apoyo son articuladas.



Para el problema 11.33

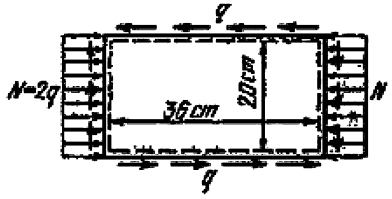


Para el problema 11.34

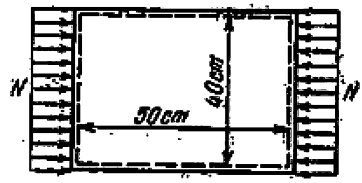
11.34*. Un panel rectangular delgado reforzado por los bordes con nervios rígidos fijados por medio de una fila de remaches experimenta cizallamiento bajo la acción de la fuerza P. Determinar el valor admisible de la fuerza si la reserva de estabilidad es igual a $n = 1{,}5$. El grosor de la pared es $h = 0{,}1$ cm, el módulo de elasticidad es $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\tau_{prop} = 250$ MPa.

11.35*. Una lámina rectangular de grosor $h = 0{,}2$ cm, con sustentación articulada en su contorno, está cargada por los bordes con fuerzas tangenciales de intensidad q y fuerzas de compresión de intensidad $N = 2q$, todas uniformemente distribuidas. Determinar

el valor q_{tor} con que la lámina perderá su estabilidad, suponiendo que la relación $N:q = 2$ se mantiene invariable durante la carga. Viene dado: $a = 18$ cm, $b = 10$ cm, $E = 7 \cdot 10^4$ MPa, $\mu = 0{,}3$.



Para el problema 11.35

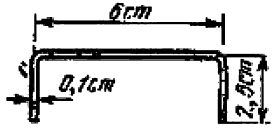


Para el problema 11.36

11.36. Una lámina rectangular de grosor $h = 0{,}5$ cm con apoyos articulados en su contorno está comprimida por fuerzas de intensidad $N = 500$ kN/m. Determinar la intensidad de fuerzas tangenciales q que debe ser aplicada adicionalmente en los bordes de la lámina para que ésta pierda su estabilidad. Viene dado: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\mu = 0{,}3$, $a = 0{,}5$ m, $b = 0{,}4$ m.

§ 5. Estabilidad local de barras de paredes delgadas

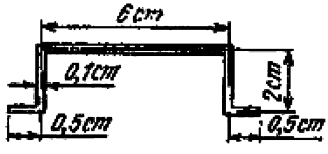
11.37*. Determinar la fuerza comprimente admisible a partir de la condición de estabilidad local para una barra de paredes delgadas corta de sección en U. Viene dado: el coeficiente de seguridad de estabilidad es $n = 2$, $E = 7{,}2 \cdot 10^4$ MPa, $\sigma_{prop} = 220$ MPa



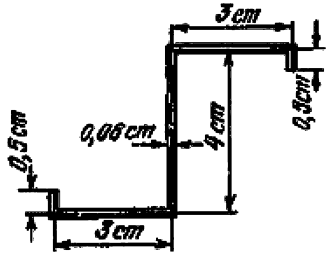
Para el problema 11.37

11.38. ¿En cuánto se aumentará la carga compresora admisible para la barra examinada en el problema anterior, si el ancho del ala se disminuye en 5 mm sin cambiar otras dimensiones?

11.39. Determinar la carga compresora admisible para una barra, cuya sección transversal está representada en la figura, cuando el coeficiente de seguridad de estabilidad local es igual a $n = 2$, $E = 7{,}2 \cdot 10^4$ MPa, $\sigma_{prop} = 220$ MPa. Comparar el resultado con los problemas 11.37 y 11.38.



Para el problema 11.39



Para el problema 11.40

11.40. Determinar la fuerza crítica a partir de la condición de estabilidad local para una barra de paredes delgadas que son de grosor constante $h = 0{,}6$ mm. La sección transversal de la barra está representada en la figura. Viene dado: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{prop} = 300$ MPa.

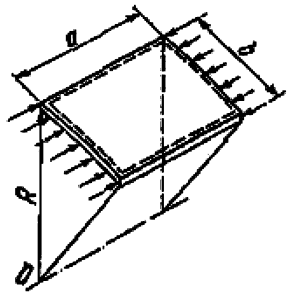
11.41. Para la barra del problema anterior se pide elegir una relación racional entre los anchos de alas, la pared y dobleces, con la cual se podrá sin variar la masa de la barra aumentar al máximo su estabilidad local. Determinar la fuerza crítica máxima y compararla con la obtenida en el problema 11.40.

§ 6. Estabilidad de bóvedas

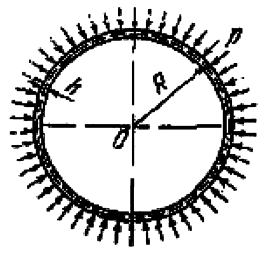
11.42*. Una bóveda cilíndrica circular está comprimida por una fuerza axial $P = 52$ kN. Determinar los valores superior y de cálculo (inferior) de la fuerza crítica y los coeficientes de reserva de estabilidad correspondientes a ellos. Viene dado: $E = 7 \cdot 10^4$ MPa, el grosor de la bóveda $h = 0{,}1$ cm, su radio de curvatura $R = 20$ cm.

11.43. Determinar el grosor de una bóveda cilíndrica de radio $R = 15$ cm a partir de la condición de estabilidad si está comprimida por una fuerza axial $P = 30$ kN. El coeficiente de seguridad es $n = 1{,}5$, $E = 7{,}2 \cdot 10^4$ MPa, $\sigma_{prop} = 280$ MPa.

11.44. Determinar la fuerza crítica de compresión de un panel cilíndrico de grosor $h = 0{,}8$ mm con apoyo articulado en su contorno. Viene dado: $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, $a = 40$ cm, $b = 30$ cm, $R = 50$ cm, $\sigma_{prop} = 200$ MPa.



Para el problema 11.44



Para el problema 11.45

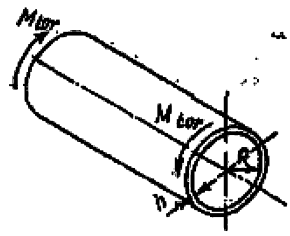
11.45*. Determinar la presión exterior crítica p_{cr} de una bóveda cilíndrica larga de radio $R = 10$ cm y grosor $h = 0{,}8$ mm, suponiendo que $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, $\mu = 0{,}3$, $\sigma_{prop} = 250$ MPa.

11.46. Determinar el grosor de una bóveda cilíndrica larga de radio $R = 20$ cm sometida a una presión exterior $p = 10$ kPa. El coeficiente de reserva de estabilidad es $n = 1{,}5$, $E = 7{,}2 \cdot 10^4$ MPa, $\mu = 0{,}34$, $\sigma_{prop} = 200$ MPa.

11.47*. Una bóveda cilíndrica larga de radio $R = 40$ cm y grosor de lámina $h = 0{,}15$ cm se somete a torsión por momentos aplicados en sus extremos.

Hallar el valor crítico del momento torsor, así como las tensiones críticas, si $E = 7{,}2 \cdot 10^4$ MPa, $\mu = 0{,}34$, $\tau_{prop} = 120$ MPa.

11.48*. Una bóveda cilíndrica larga de radio $R = 20$ cm, cuya lámina es de grosor $h = 0{,}1$ cm, está comprimida por una fuerza longitudinal $N = 100$ kN. Determinar el valor del momento torsor que es capaz de resistir adicionalmente la bóveda hasta perder su estabilidad. La bóveda es de acero: $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, $\mu = 0{,}25$, $\sigma_{prop} = 300$ MPa, $\tau_{prop} = 160$ MPa.

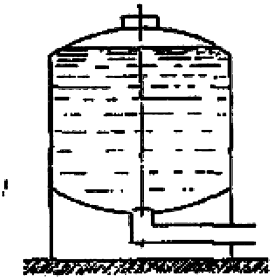


Para el problema 11.47

11.49*. Una bóveda cilíndrica de longitud $l = 3$ m y radio $R = 0{,}5$ m, cuya lámina es de grosor $h = 0{,}2$ cm, experimenta flexión pura. Determinar el momento flector admisible, si $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{prop} = 240$ MPa, el coeficiente de reserva de estabilidad es $n = 2$. ¿Cuánto disminuirá el valor del momento admisible, si el grosor de la lámina se reduce a la mitad?

11.50. Determinar el esfuerzo cortante crítico de una bóveda cilíndrica de longitud $l = 40$ cm, radio $R = 20$ cm, grosor $h = 1{,}2$ mm. La bóveda está fijada por un extremo y en el otro tiene aplicada una fuerza concentrada; $E = 7{,}2 \cdot 10^4$ MPa, $\mu = 0{,}34$, $\sigma_{prop} = 280$ MPa.

11.51. Una bóveda cilíndrica con un extremo fijo está solicitada en el otro por una fuerza concentrada. La longitud de la bóveda es $l = 120$ cm, el radio, $R = 20$ cm, el grosor, $h = 1{,}6$ mm. ¿Cómo variará la tensión crítica en la bóveda, si su longitud disminuye cuatro veces? Viene dado: $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, $\mu = 0{,}3$, $\sigma_{prop} = 320$ MPa.


Para el problema 11.52

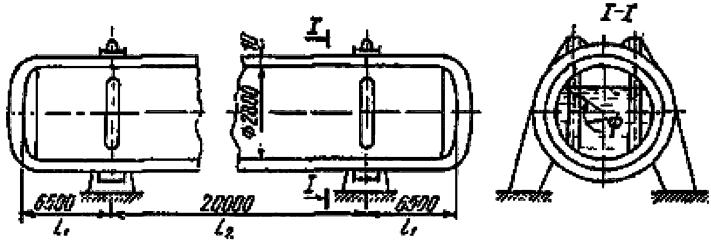
11.52*. Al evacuar el combustible de un tanque, en caso de desperfectos en el sistema de drenaje, es probable la pérdida de estabilidad de la bóveda debida a la presión exterior. Determinar el grosor h de la lámina esférica superior del tanque a partir de la condición de rarificación profunda. El radio de la esfera es igual a $R = 4$ m. El módulo de elásticidad del material es $E = 7{,}2 \cdot 10^4$ MPa. La caída de presión es igual a 100 kPa; la presión se considera uniformemente distribuida por toda la lámina. La tensión de cálculo debe determinarse aproximadamente igual que para una bóveda totalmente esférica (véase la tabla 13 del anexo).

11.53*. Un tanque cilíndrico de paredes delgadas fabricado de una aleación a base de aluminio y magnesio ($E = 7{,}2 \cdot 10^4$ MPa), de diámetro $D = 2$ m, longitud $L = 3$ m y grosor de pared $h = 3$ mm,

fue sacado, con la válvula cerrada, del depósito en el que se mantenían condiciones normales ($q_1 = 100$ kPa, $T_1 = 288$ K). Comprobar la estabilidad de la bóveda, si la temperatura exterior es $t° = -20$ °C y $q = 100$ kPa.

Indicaciones. 1) Cuando el volumen es constante $q_1/q_2 = T_1/T_2$, donde $T = 273 + t°$; 2) la presión crítica se determina por los datos de la tabla 13 del anexo.

11.54*. Determinar el coeficiente de reserva de estabilidad n_{est} de la envoltura del vaso de un tanque cilíndrico horizontal destinado a la conservación de productos criógenos, al llenar el



Para el problema 11.54

tanque con nitrógeno líquido hasta el nivel $\psi = (3/4)\,\pi$ (véase la figura). Las dimensiones del vaso se dan en la figura. La masa del vaso con el producto es igual a 250 t; la temperatura del nitrógeno líquido es igual a 77 K. Considerar que la temperatura de la parte que contacta con el líquido es igual a la temperatura del producto. Junto a la superficie de división de fases la temperatura varía bruscamente y es igual a 232 K. El vaso es de acero especial ($E = 2 \cdot 10^5$ MPa) el límite de fluencia a la temperatura $T = 232$ K es igual a $\sigma_{0.2} = 270$ MPa; a la temperatura $T = 77$ K, $\sigma_{0.2} = 3100$ MPa, el coeficiente de dilatación térmica es $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ 1/K. Considerar que el límite de proporcionalidad es $\sigma_{prop} = 0{,}96\sigma_{0.2}$.

Indicación. Las tensiones debidas a cargas de peso deben calcularse por similitud con las vigas. Las tensiones debidas a cargas térmicas se determinan por medio de las fórmulas

$$\sigma_\varphi = \begin{cases} E\alpha\Delta t\left(-1 + \dfrac{\psi}{\pi} + \dfrac{2}{\pi}\operatorname{sen}\psi\cos\varphi\right) & \text{cuando } 0 \leqslant \varphi \leqslant \psi, \\ E\alpha\Delta t\left(\dfrac{\psi}{\pi} + \dfrac{2}{\pi}\operatorname{sen}\psi\cos\varphi\right) & \text{cuando } \varphi > \psi. \end{cases}$$

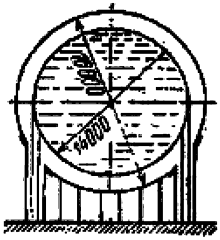
El ángulo ψ se cuenta a partir del punto inferior en dirección al superior $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$.

11.55*. Un tanque esférico criogénico de volumen $V = 1400$ m³ posee una funda de vacío de 16 m de diámetro y un vaso de 14 m de diámetro para conservar productos criogénicos. El vaso y la funda están instalados sobre columnas. El aislamiento de los pro-

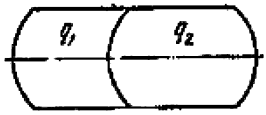
ductos del petróleo en el vaso lo asegura el alto vacío creado en el espacio entre el vaso y la funda.

Determinar el grosor de la funda a partir de la estabilidad a una presión exterior $p = 0{,}1$ MPa. La funda es de acero ($E = 2{,}05 \times 10^5$ MPa, $\sigma_{0,2} = 240$ MPa). El coeficiente de reserva de estabilidad es $n_{est} = 2{,}4$.

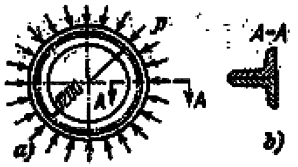
11.56*. Durante el transporte de una aeronave el compartimiento de combustible, cuyo esquema está representado en la figura, se encuentra en estado presionizado. Valorar el salto de presión (crítico) de la presionización $(\Delta q)_{cr} = q_1 - q_2$ que ofrece peligro por probable pérdida de estabilidad del fondo intermedio plano. Viene dado: $E = 0{,}72 \cdot 10^5$ MPa, el radio de la esfera es $R = 2$ m, el grosor del fondo es $h = 4$ mm.



Para el problema 11.55



Para el problema 11.56



Para el problema 11.57

11.57*. Calcular la sección de una cuaderna circular de radio $R = 600$ mm, considerando que su cordón está formado por dos angulares tipo Pr. 100 remachados entre sí (fig. *b*). La cuaderna debe soportar una presión exterior $p = 1{,}5$ kN/m con un factor de reserva de estabilidad doble; $E = 0{,}72 \cdot 10^5$ MPa.

§ 7. Deformación poscrítica de láminas

11.58*. Determinar la fuerza de compresión máxima N que debe ser aplicada a una lámina de ancho $b = 240$ mm y grosor $h = 3$ mm reforzada en los bordes longitudinales por dos nervios (larguerillos) de área de sección $F = 5$ cm^2. Las tensiones críticas de la estabilidad local del larguerillo son iguales a $\sigma_{cr,1ar} = 200$ MPa. El material de la lámina es acero, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, el límite de proporcionalidad es $\sigma_{prop} = 240$ MPa. La posibilidad de pérdidas de estabilidad generales no se tiene en cuenta.

11.59*. Un panel comprimido se compone de una lámina de duraluminio de ancho $b = 150$ mm y grosor $h = 1{,}5$ mm con los bordes reforzados en la dirección de la compresión por nervios de área de sección $F = 1$ cm^2 fabricados del mismo material que tiene $E = 7 \cdot 10^4$ MPa, $\sigma_{prop} = 280$ MPa. Determinar la carga de compresión con la cual los captadores pegados a los nervios registrarán una deformación relativa $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$.

11.60*. Un panel compuesto de una lámina de acero de ancho $b = 200$ mm, de grosor $h = 2$ mm con nervios de acero longitudinales de refuerzo (larguerillos) de área de sección $F = 3$ cm² está solicitada por una fuerza de compresión $N = 100$ kN. Determinar las tensiones en los nervios, considerando que $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{prop} = 300$ MPa. La posibilidad de perder la estabilidad de los nervios se excluye.

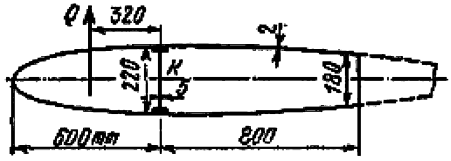
§ 8. Métodos numéricos. Utilización de ordenadores

11.61*. Determinar la tensión crítica en compresión en una sola dirección de una lámina cuadrada de lado a con apoyos articulados por el método de diferencias finitas. En la primera aproximación se considera que el número de intervalos en cada uno de los lados de la lámina es igual a $n = 2$. Compararla con el valor exacto de la tensión crítica.

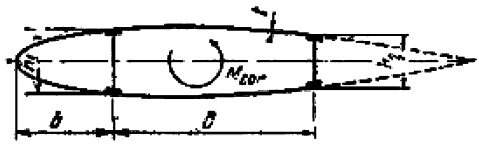
11.62*. Resolver el problema 11.61 con ayuda de un ordenador considerando que el número de intervalos es $n = 4$.

§ 9. Tensiones tangenciales en bóvedas reforzadas

11.63*. Por el método aproximado determinar las tensiones tangenciales en el revestimiento del ala de un solo larguero y en el tabique del larguero debidas a la acción de una fuerza transversal $Q = 180$ kN, considerando que el revestimiento recibe solamente el momento torsor y el tabique, solamente la carga transversal.



Para el problema 11.63

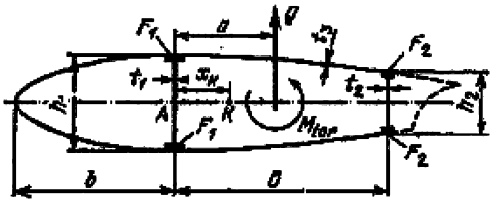


Para el problema 11.64

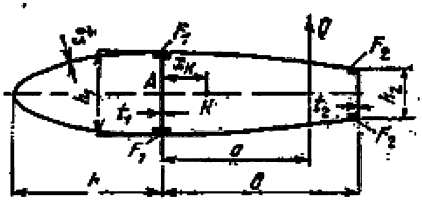
11.64*. Mediante el método aproximado, se pide hallar las tensiones tangenciales en el revestimiento de un ala de dos largueros debidas a la acción de un momento torsor $M_{tor} = 160$ kN·m. Las dimensiones de la sección son: $B = 1$ m, $b = 0{,}5$ m, $h_1 = 0{,}24$ m, $h_2 = 0{,}18$ m, $t = 2{,}5$ mm. Considerar que la punta del perfil está trazada por una semielipse, la parte media es trapezoidal. Las tensiones en la parte de la cola y en los tabiques de los largueros se desprecian.

11.65*. Por el método aproximado se pide determinar las tensiones tangenciales en el revestimiento y en los tabiques de los largueros del ala de dos largueros, teniendo en cuenta la influencia de la falta de paralelismo en los cordones de los largueros, si en la sección de cálculo actúan: una fuerza transversal vertical $Q = 800$ kN, un

momento torsor $M_{tor} = 750$ kN·m y un momento flector en el plano vertical $M_x = 7600$ kN·m. Viene dado: $B = 2{,}4$ m, $b = 1{,}6$ m, $a = 1$ m, $h_1 = 0{,}72$ m, $h_2 = 0{,}5$ m, $t_1 = 4$ mm, $t_2 = 3$ mm, $t_3 = 2{,}5$ mm, $F_1 = 60$ cm², $F_2 = 35$ cm². Los cordones de los largueros están hechos de un mismo material. El ángulo de conicidad del larguero delantero es $\gamma_1 = 0{,}025$, del trasero, $\gamma_2 = 0{,}018$. Considerar que la punta del perfil es una semielipse, la parte media es trapezoidal. Las tensiones en la parte de la cola se desprecian. Suponer que el revestimiento y los tabiques de los largueros no perciben tensiones normales.



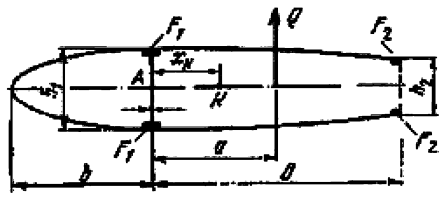
Para el problema 11.65



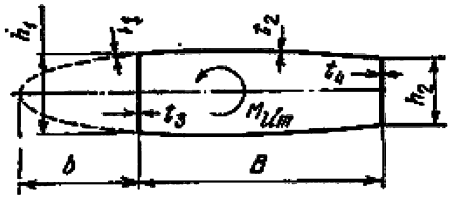
Para el problema 11.66

11.66. Por medio del método aproximado, determinar los esfuerzos tangenciales lineales y las tensiones en el revestimiento y los tabiques de los largueros de un ala cuya sección está representada en la figura. La carga transversal se reduce a la fuerza vertical $Q = 140$ kN aplicada a una distancia $a = 600$ mm del larguero delantero. Viene dado: $B = 0{,}8$ m, $b = 0{,}6$ m, $h_1 = 0{,}25$ m, $h_2 = 0{,}17$ m, $t_1 = 4$ mm, $t_2 = 2{,}5$ mm, $t_3 = 1{,}5$ mm, $F_1 = 2F_2$. Los cordones de los largueros están fabricados de un mismo material. El material de los tabiques y del revestimiento no percibe esfuerzos normales. El contorno izquierdo es una semielipse, el contorno derecho es un trapecio, la parte de la cola no se considera.

11.67*. El larguero trasero de un ala de dos largueros está roto. Por el método aproximado se pide determinar los valores de los



Para el problema 11.67



Para el problema 11.68

esfuerzos tangenciales que actúan en el revestimiento y los tabiques de los largueros antes y después de la rotura, considerando que la fuerza transversal es igual a $Q = 200$ kN. Se supone que $a = 0{,}45$ m, $B = 1$ m, $b = 0{,}6$ m, $h_1 = 0{,}3$ m, $h_2 = 0{,}24$ m, $F_1 = 1{,}8F_2$. Los cordones de los largueros están hechos de un mismo material. El

revestimiento y los tabiques de los largueros no perciben tensiones normales.

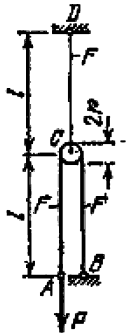
11.68*. Un ala, cuya sección está representada en la figura, tiene un agujero en la parte delantera del revestimiento representado en la figura con una línea de trazos. Mediante el método aproximado se pide determinar en qué por ciento cambiará el momento torsor límite percibido por el ala. Viene dado: $B = 1$ m, $b = 0{,}5$ m, $h_1 = 0{,}25$ m, $h_2 = 0{,}2$ m, $t_1 = 2{,}5$ mm, $t_2 = 2{,}0$ mm, $t_3 = 1{,}5$ mm, $t_4 = 4{,}0$ mm. El revestimiento y los tabiques de los largueros están fabricados de un mismo material.

CAPÍTULO 12

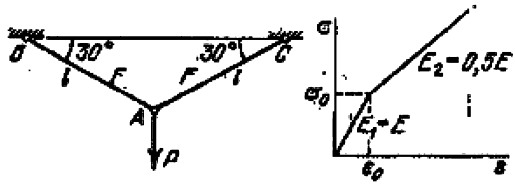
PROBLEMAS DE OLIMPIADAS ESTUDIANTILES

§ 1. Tracción y compresión

12.1*. Determinar la magnitud del desplazamiento w_A del punto A después de aplicar una carga P, considerando que el radio de la polea r es sumamente pequeño en comparación con la longitud l del cable. Las áreas de las secciones F y el material de los cables ACB y DC son iguales.



Para el problema 12.1



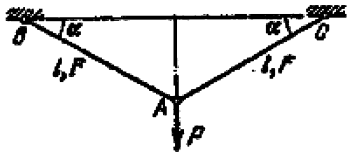
Para el problema 12.2

12.2*. Calcular el desplazamiento vertical del nudo A bajo la acción de una fuerza $P = 200$ kN, si el diagrama de tracción del material de las barras tiene la forma de la función lineal a trozos representada en el gráfico. Considerar que $\sigma_0 = 120$ MPa, $E = 7 \cdot 10^5$ MPa, $F = 10$ cm^2, $l = 3$ m.

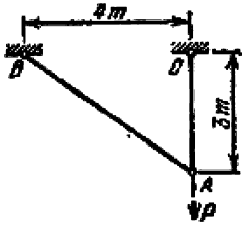
12.3. Las barras que fijan el nudo A tienen un volumen dado constante V. Hallar el valor del ángulo α con el cual la fuerza admisible P aplicada en el nudo será máxima. Determinar su magnitud, siendo dada la tensión admisible $[\sigma]$, para el material de las barras.

12.4. Durante el montaje del nudo ABC de dos barras resultó que la barra AB es de una longitud mayor en 3,2 mm que la dimensión nominal. Por eso el nudo A obtuvo un desplazamiento horizontal inicial hacia la derecha. Después de cargarlo con la fuerza P, el nudo resultó desviado 2 mm hacia la izquierda de la vertical AC.

Determinar la fuerza P, si el módulo de elasticidad del material de las barras es $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, el área de la sección de éstas es $F = 4$ cm^2.

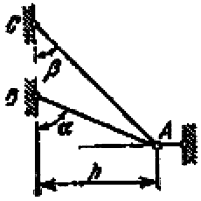


Para el problema 12.3

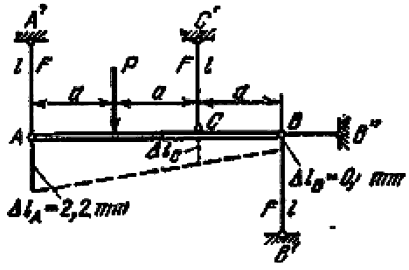


Para el problema 12.4

12.5. Determinar la relación entre los ángulos α y β con la cual no aparecen tensiones de origen térmico en las barras, si el material de las barras es el mismo y las temperaturas de su calentamiento son iguales. La distancia entre el nudo A y la superficie de apoyo BC es constante (h = const.).



Para el problema 12.5



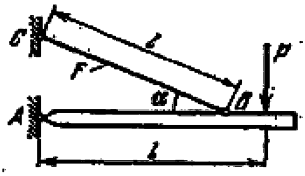
Para el problema 12.6

12.6*. Una barra absolutamente rígida se desplazó bajo la acción de una fuerza $P = 640$ kN (como está indicado en la figura con la línea de trazos). Calcular las tensiones en las barras surgidas durante la carga y las que quedan en éstas después de retirar la carga. Viene dado: $l = 1$ m, el material de las barras es el mismo, las áreas de las secciones de las barras son idénticas e iguales a $F = 10$ cm^2, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, el límite de proporcionalidad es $\sigma_{prop} = \sigma_{fl} = 240$ MPa.

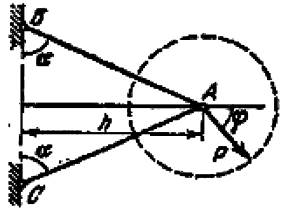
12.7. Sin cambiar la longitud de un tirante, hallar su posición (el ángulo α) con la cual la masa del tirante, determinada a partir de la condición de resistencia, sea mínima.

12.8*. El nudo A recibe una fuerza P de magnitud constante que gira lentamente en el plano. Determinar el valor del ángulo α con el cual la masa del material de las barras sea mínima. Las áreas de las secciones de las barras son iguales y se determinan a partir de la condición de resistencia.

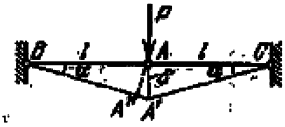
12.9*. El nudo A está fijado por dos barras elásticas iguales. Determinar los esfuerzos en las barras y la magnitud δ de la bajada del nudo bajo la acción de la fuerza P. El peso de las barras se desprecia.



Para el problema 12.7



Para el problema 12.8

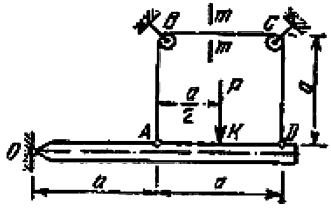


Para el problema 12.9

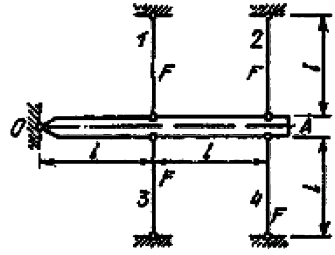
12.10*. Un cable de acero de longitud $l = 1$ m y de sección $F = 1$ cm^2 está fuertemente estirado entre dos puntos fijos dispuestos a una misma altura. En el punto medio del cable se aplica una fuerza vertical $P = 1$ kN. Determinar las tensiones en el cable y la magnitud δ del desplazamiento vertical del punto de aplicación de la carga durante la deformación elástica del cable. El peso del cable se desprecia. El módulo de elasticidad es $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

¿En cuántas veces disminuirán las tensiones y la magnitud del desplazamiento vertical del punto de aplicación de la fuerza, si la fuerza disminuye 10 veces?

12.11. Una barra absolutamente rígida está articulada en el punto O y es mantenida por el cable $ABCD$ que pasa por las poleas B y C. Determinar la magnitud δ del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza P. Hallar la sección del cable m—m que permanece inmóvil. Considerar que las magnitudes P y a son conocidas. El rozamiento en las poleas y su valor se desprecian. El área de la sección del cable es F.



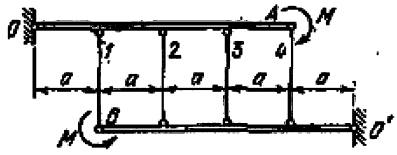
Para el problema 12.11



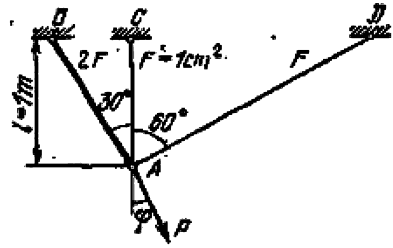
Para el problema 12.12

12.12*. Una viga imponderable absolutamente rígida OA se sostiene por cuatro barras iguales en las cuales son creados esfuerzos iguales N_0 de tensión inicial. Determinar los esfuerzos en las barras *1*, *2*, *3* que aparecerán después de retirar la barra *4*.

12.13*. Un sistema de barras se compone de dos vigas absolutamente rígidas paralelas AO y BO' unidas por cuatro barras elásticas verticales de igual rigidez c a la tracción. Determinar los esfuerzos en las barras surgidos después de aplicar en los puntos A y B momentos M de iguales magnitudes.



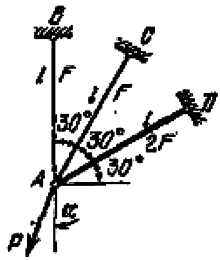
Para el problema 12.13



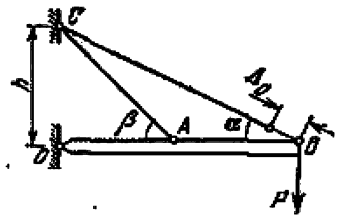
Para el problema 12.14

12.14. Hallar la magnitud y la dirección de la fuerza P aplicada en un nudo de tres barras, si se sabe que el nudo se desplazó por la vertical a $\Delta = 0{,}05$ cm; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

12.15. ¿A qué ángulo α hace falta aplicar en el nudo la fuerza P para que el desplazamiento de éste se efectúe por la vertical? Las longitudes de las barras son iguales, están hechas de un mismo material. El área de la sección de la barra AD es dos veces mayor que el área de la sección de las barras AB y AC.



Para el problema 12.15

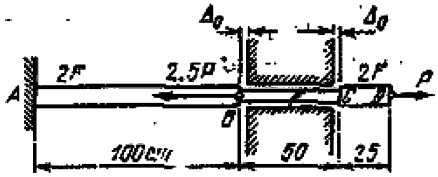


Para el problema 12.16

12.16. Determinar la magnitud del juego de montaje de la barra BC para que el esfuerzo en ésta después del montaje sea igual a cero. El material y las secciones están dados. El valor de h, las magnitudes de α y β son conocidos.

12.17. La parte media de una barra escalonada, con empotramiento perfecto en el extremo izquierdo, está abrazada por una pieza absolutamente rígida inmóvil que forma con las partes engrosadas de la barra juegos $\Delta_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ cm. Calcular las tensiones máximas que surgen en la barra bajo la acción de las fuerzas P y $2{,}5P$. Viene dado: $P = 300$ kH, $F = 10$ cm², $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

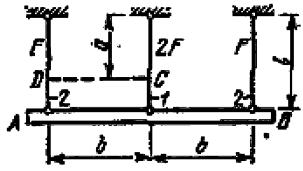
12.18. En una barra con empotramiento perfecto en ambos extremos la tensión admisible a compresión es dos veces mayor que a tracción: $[\sigma]_{comp} = 2[\sigma]_{tr}$. Determinar la relación entre las longitudes a y b que hace los tramos AC y CB equirresistentes.



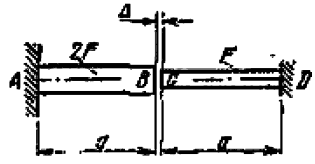
Para el problema 12.17

Para el problema 12.18

12.19*. Una barra absolutamente rígida AB está suspendida por medio de tres vástagos paralelos hechos de un mismo material de módulo E. La sección del vástago medio es dos veces mayor que la de los extremos. La temperatura del vástago *1* se eleva y la de los vástagos extremos *2* baja en la misma magnitud Δt. Determinar las tensiones en los vástagos y los desplazamientos w de los puntos C y D, considerando que los vástagos no pierden la estabilidad de equilibrio.



Para el problema 12.19



Para el problema 12.20

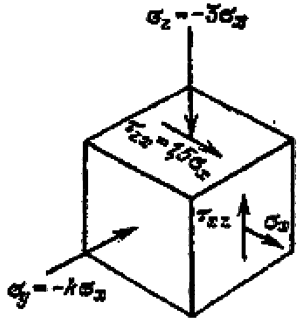
12.20*. Construir el diagrama de desplazamientos longitudinales de las secciones transversales de unas barras elásticas. El juego es igual a Δ. Las barras se calientan a $t°$. El área de la sección de la barra izquierda es $2F$, es decir, dos veces mayor que la de la barra derecha. El coeficiente de dilatación lineal del material es α, el módulo de elasticidad es E. Examinar dos casos: antes de reducir a cero el juego y después de reducirlo.

12.21*. Un cubo de lado a está introducido en la muesca de una placa absolutamente rígida con los juegos Δa y $2\Delta a$. El cubo sobresale $3\Delta a$ sobre la superficie de la placa. Bajo la acción de una presión aplicada en la arista saliente los juegos se cierran, con la particularidad de que en el momento del cierre del último juego la arista superior del cubo se nivela con la superficie de la placa. Determinar el valor del coeficiente de deformación transversal del material del cubo, considerando que para él es justa la ley de Hooke.

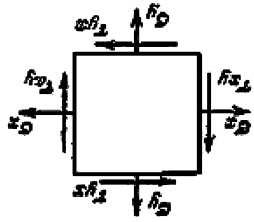
12.22*. Un cubo hueco hecho de material en planchas está sometido a presiones interior y exterior p que son iguales entre sí. Determinar el cambio del volumen interior del cubo, si son conocidos E,

μ, p y el lado del cubo a. Considerar que el grosor de la pared es muy pequeño en comparación con a.

12.23*. La figura muestra el estado tensional en el punto más peligroso de una pieza fabricado de material frágil. El límite de resistencia mecánica del material en compresión es dos veces mayor que en tracción. Determinar cómo varía la resistencia de la pieza, al cambiar la tensión de compresión $\sigma_y = -k\sigma_x$.



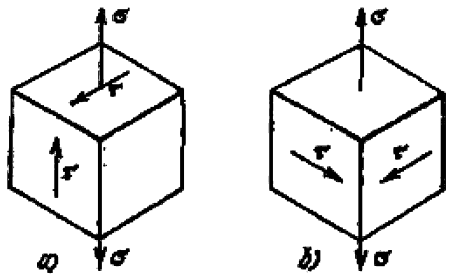
Para el problema 12.23



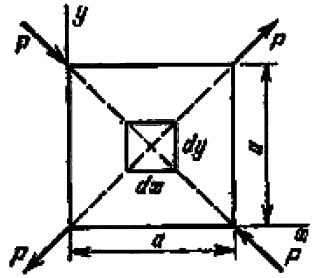
Para el problema 12.24

12.24. Determinar las relaciones entre σ_x, σ_y, τ_{xy} para que el estado tensional plano, representado en la figura, resulte lineal.

12.25*. Con ayuda de la III teoría de resistencia analice cuál de los estados tensionales representados en la figura es más peligroso desde el punto de vista de la resistencia.



Para el problema 12.25



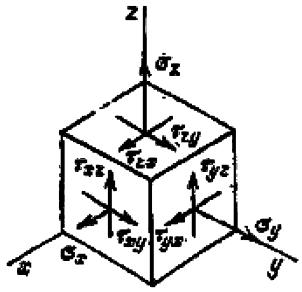
Para el problema 12.26

12.26. En los ángulos de una lámina cuadrada están aplicadas fuerzas concentradas dirigidas a lo largo de las diagonales. Determinar las tensiones en los lados de un elemento pequeño separado en el centro de la lámina por secciones paralelas a sus bordes. El lado a de la lámina y su grosor h están dados.

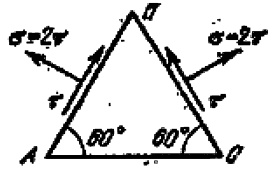
12.27. ¿Con qué relación entre las tensiones indicadas en la figura σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} el estado tensional será plano y con qué relación será lineal?

12.28*. Están dadas las tensiones σ y τ uniformemente distribuidas por las aristas de una lámina triangular. Se pide equilibrar

la lámina con tensiones en la tercera arista AC y comprobar la resistencia, teniendo en cuenta que el material de la lámina es frágil. Viene dado: $[\sigma] = 80$ MPa, $\mu = 0{,}25$, $\sigma = 2\tau = 20$ MPa.

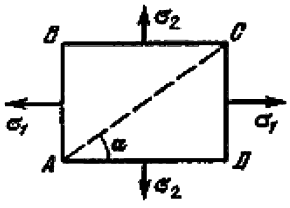


Para el problema 12.27

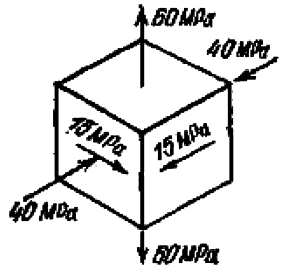


Para el problema 12.28

12.29. Determinar la relación entre las tensiones σ_1 y σ_2 para que las longitudes de las diagonales del elemento rectangular $ABCD$ no varíen. El coeficiente de Poisson es igual a μ.



Para el problema 12.29



Para el problema 12.30

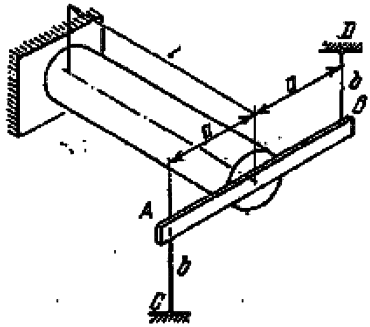
12.30. Para el estado tensional volumétrico representado en la figura se pide determinar la tensión tangencial máxima.

§ 2. Cizallamiento y torsión

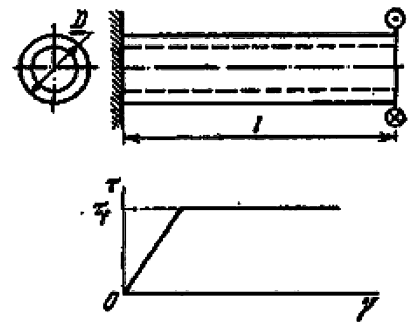
12.31. Un árbol macizo de sección circular cuyo diámetro es D está rígidamente empotrado en un extremo. En su otro extremo tiene fijada una traviesa rígida AB unida con barras iguales AC y BD. Las barras se enfrían en Δt. Determinar el área de la sección transversal de las barras de tal modo que las magnitudes de las tensiones normales en éstas sean iguales a las tensiones tangenciales máximas en el árbol.

12.32. Sobre la superficie de un árbol de acero de 50 mm de diámetro están pegados dos extensiómetros mutuamente perpendiculares a un ángulo de 45° respecto al eje del árbol. Las indicaciones de los extensiómetros tienen signos diferentes y al mismo tiempo poseen

magnitudes absolutas iguales, $6{,}5 \cdot 10^{-4}$ unidades de deformación relativa. Determinar la magnitud y dirección del momento torsor aplicado al árbol.



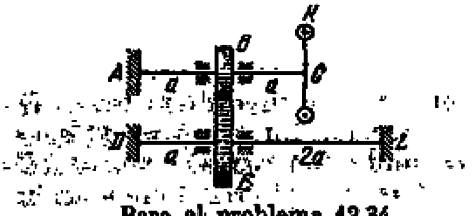
Para el problema 12.31



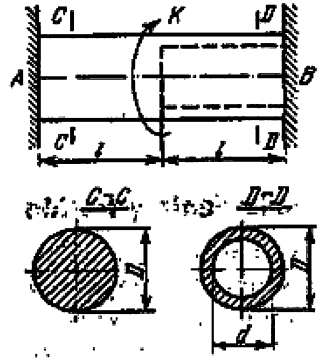
Para el problema 12.33

12.33. Un tubo hecho de un material elástico-plástico ideal (véase la figura) está rígidamente empotrado en el extremo izquierdo y sometido a torsión en el derecho. El límite de fluencia del material es igual a τ_f; el diámetro exterior del tubo es D, la relación entre los diámetros interior y exterior es α. Determinar el valor mínimo del ángulo de giro γ del extremo derecho del árbol a consecuencia del cual todo el material del tubo pasará al estado plástico.

12.34. En dos árboles de acero AC y DL, de diámetros iguales, están rígidamente encajados los engranajes B y E, con una relación entre sus diámetros igual a 1:2. Construir los diagramas de los momentos torsores M_{tor} y de los ángulos de giro φ de las secciones del árbol al cargar el sistema con un momento K.



Para el problema 12.34

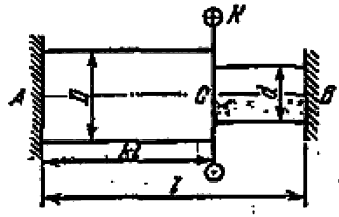


Para el problema 12.35

12.35. Determinar el ángulo φ al que es necesario hacer girar el empotramiento B de un árbol cargado en su punto medio con un momento K para que la tensión en el extremo A se anule.

12.36. Calcular la magnitud k a partir de la equirresistencia de las partes izquierda y derecha del árbol. Viene dado: $D/d = 1{,}2$.

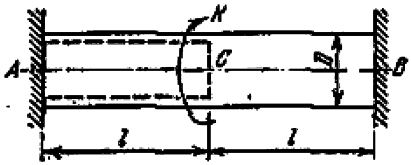
12.37. El ángulo de giro mutuo de las secciones A y B es igual a 0,01 rad. Hallar la tensión tangencial máxima, considerando que $l = 40$ cm, $G = 8 \cdot 10^4$ MPa, $D = 0{,}2$ m.



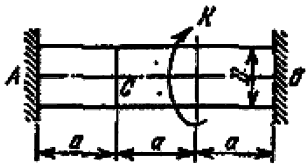
Para el problema 12.36

Para el problema 12.37

12.38. Un árbol rígidamente empotrado en ambos extremos tiene aplicado en su punto medio un momento torsor K. La parte izquierda del árbol es hueca, con una relación entre sus diámetros interior y exterior igual a α. El diámetro exterior del árbol es igual a D. Sin definir los momentos reactivos en los empotramientos, se pide hallar la relación entre las tensiones en las partes izquierda y derecha del árbol.



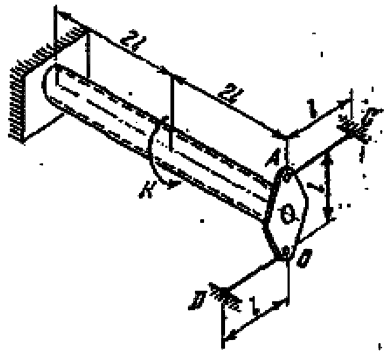
Para el problema 12.38



Para el problema 12.39

12.39. Una barra redonda de diámetro D rígidamente fijada en los extremos está cortada en la sección C a una distancia igual a la tercera parte de la longitud de la barra a partir del empotramiento izquierdo. En la parte cortada los extremos están apretados el uno con el otro.

La barra se calienta en $t°$ y luego se le aplica un momento torsor K que crece paulatinamente. ¿Con qué valor del momento se efectuará el giro mutuo de las partes del árbol en el corte? El coeficiente de rozamiento es igual a f; el coeficiente de dilatación lineal del material del árbol es α; el módulo de elasticidad del material es E. La tensión no supera el límite de elasticidad.



Para el problema 12.40

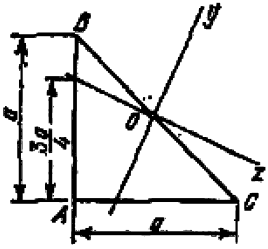
12.40. Un tubo de diámetro D, cuya relación entre diámetros interior y exterior es α, tiene una fijación rígida en un extremo y

aplicado en su punto medio el momento torsor K. En el otro extremo el tubo tiene impedido el giro por dos tirantes paralelos AC y BD de iguales dimensiones y articulados a una traviesa rígida.

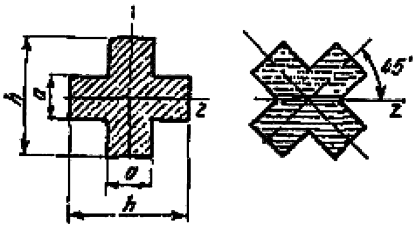
Determinar los esfuerzos N en los tirantes, considerando que todas las dimensiones son conocidas.

§ 3. Características geométricas de las secciones

12.41*. Hallar los momentos de inercia axiales y centrífugos de un triángulo isósceles rectángulo respecto a los ejes que pasan por el centro de la hipotenusa, como está representado en la figura.



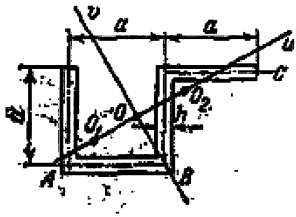
Para el problema 12.41



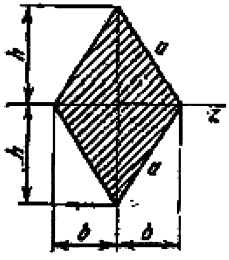
Para el problema 12.42

12.42. ¿Con qué relación entre las dimensiones a y h el módulo resistente de una viga de sección cruciforme con respecto al eje horizontal no variará al girar la sección a 45°?

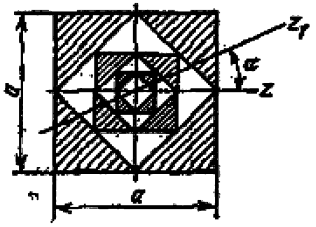
12.43*. Determinar la posición de los ejes centrales principales de una sección de paredes delgadas. El grosor de la pared es constante, pequeña e igual a h. Las dimensiones dadas en la figura son las de la línea media de las paredes.



Para el problema 12.43



Para el problema 12.44



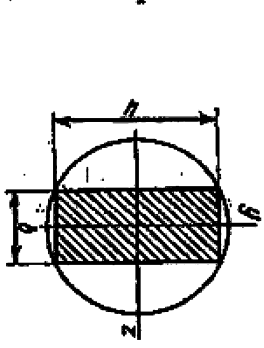
Para el problema 12.45

12.44. Para una sección en forma de rombo de lado a se pide determinar con qué relación entre las dimensiones b y h el momento de inercia y el módulo resistente respecto al eje central horizontal serán máximos.

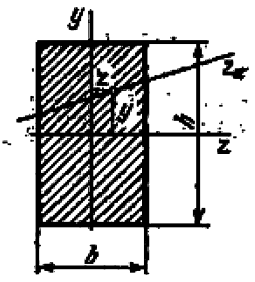
12.45*. La figura, cuya área en el dibujo está rayada, se compone de n cuadrados inscritos uno en el otro. Calcular el momento de iner-

cia de la figura respecto al eje central horizontal z y al eje z_1 inclinado respecto al horizonte a un ángulo $\alpha = 30°$.

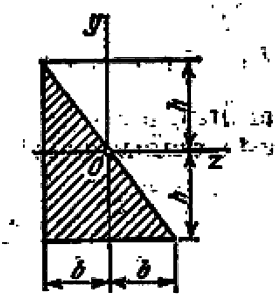
12.46*. ¿Con qué relación entre la altura h y la base b de un rectángulo, inscrito en un círculo, el momento de inercia y el módulo resistente respecto al eje central horizontal serán máximos?



Para el problema 12.46



Para el problema 12.47

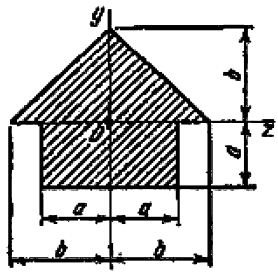


Para el problema 12.48

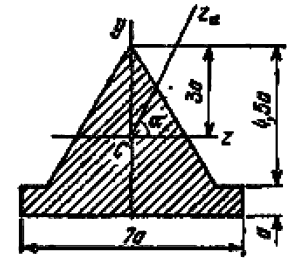
12.47. Hallar los puntos que poseen la propiedad de que cualquier eje z_α que pasa por uno de estos puntos será eje principal del rectángulo.

12.48. Sin recurrir a cálculos demostrar que los ejes z e y que pasan por el centro de la hipotenusa de un triángulo rectángulo paralelamente a sus catetos son los ejes principales.

12.49. Para la sección representada en la figura se pide hallar todos los ejes principales que pasan por el punto O.



Para el problema 12.49

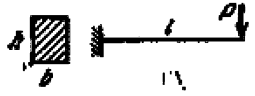


Para el problema 12.50

12.50*. La sección está formada por un triángulo equilátero y un rectángulo, cuyas dimensiones están indicadas en la figura. Demostrar que la magnitud del momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro de gravedad del triángulo no depende de la dirección del eje.

§ 4. Tensiones en vigas y estructuras debidas a flexión

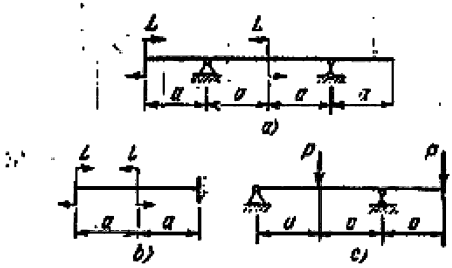
12.51. ¿Qué forma debe tener una viga de sección rectangular de altura constante h (el ancho b de la sección es variable) para que la flexión de su eje reproduzca un arco de circunferencia?



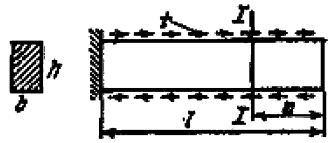
Para el problema 12.51

12.52*. Trace las deformadas de las vigas.

12.53*. Construir el diagrama de las tensiones tangenciales en una sección transversal arbitraria $I—I$ de una viga. Considerar que la carga tangencial t está uniformemente distribuida a lo largo y ancho de la viga.

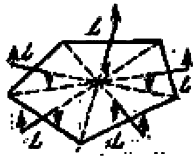


Para el problema 12.52

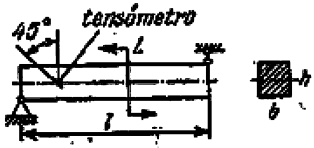


Para el problema 12.53

12.54*. Una estructura plana que representa un pentágono regular tiene aplicados cinco momentos torsores concentrados en los puntos medios de los lados. Construir los diagramas de momentos flectores y torsores.



Para el problema 12.54

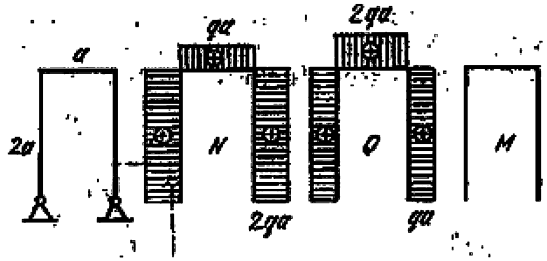


Para el problema 12.55

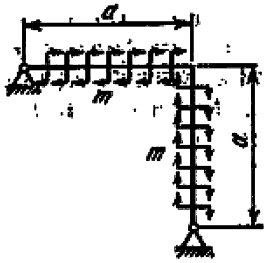
12.55. En la capa neutral de la viga representada en la figura fue instalado un tensómetro dispuesto a 45° respecto a la sección transversal. Al cargar la viga el tensómetro registró un alargamiento ΔB de su base B. ¿De qué modo se puede determinar el valor del momento L a partir de esta indicación del instrumento? La viga está fabricada de un material que posee un módulo de elasticidad E y cuyo coeficiente de Poisson es μ. La sección transversal es un rectángulo de ancho b y altura h.

12.56. Por los diagramas N, Q, M determinar cómo está cargada la estructura.

12.57. Construir los diagramas de los factores de fuerza interiores de una estructura cargada con momentos distribuidos.



Para el problema 12.56



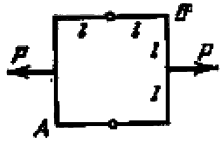
Para el problema 12.57

12.58. Determinar $M_{máx}$.

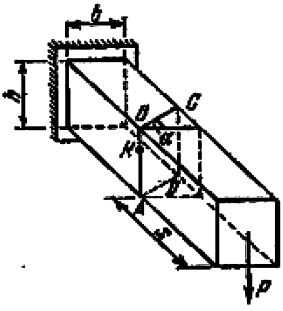
12.59. Hallar la variación de la distancia AB.

12.60. Un voladizo de sección transversal rectangular está cargado en su extremo con la fuerza P. Determinar las tensiones normales σ_α y tangenciales τ_α en el punto K de la sección $ABCD$ que forma con la sección transversal un ángulo α.

Para el problema 12.58

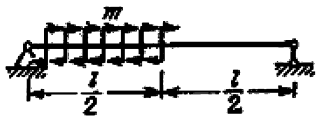


Para el problema 12.59

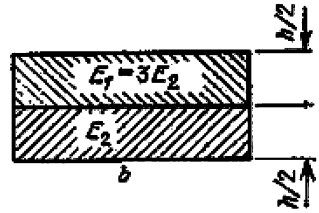


Para el problema 12.60

12.61. Una viga dispuesta sobre dos apoyos tiene medio vano cargado con momentos exteriores distribuidos con una intensidad constante m. Construir los diagramas Q y M.



Para el problema 12.61

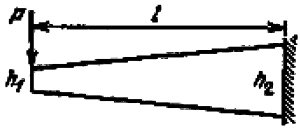


Para el problema 12.62

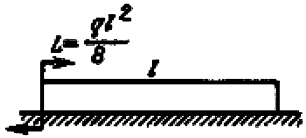
12.62. Hallar la distribución de las tensiones normales en la sección de una viga compuesta cuando ésta se encuentra trabajando

a flexión pura en el plano vertical e indicar la posición del eje neutro, considerando que la unión es absolutamente rígida.

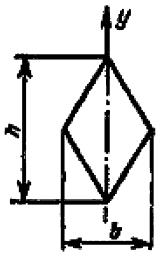
12.63. Un voladizo de sección transversal rectangular está sometido a la acción de la carga representada en la figura. El ancho de la viga es constante e igual a b, la altura varía linealmente desde h_1 en el extremo cargado hasta $h_2 = 3h_1$ junto al empotramiento. Calcular la tensión normal máxima que surge durante la flexión.



Para el problema 12.63



Para el problema 12.64

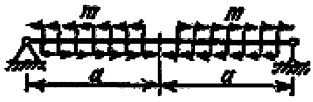


Para el problema 12.65

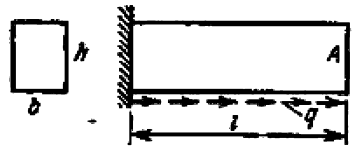
12.64. Una viga recta homogénea de longitud l y peso $G = ql$ descansa sobre un plano rígido. Determinar la altura a la que la viga será levantada al aplicar en su extremo el momento $L = ql^2/8$.

12.65. Construir el diagrama de las tensiones tangenciales τ_{xy} en la sección transversal de una viga que trabaja a flexión (x es el eje longitudinal de la viga). La sección de la viga es rómbica.

12.66. Construir los diagramas de los esfuerzos cortantes y los momentos flectores.



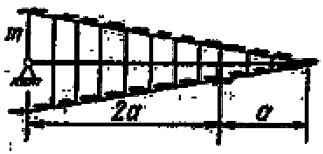
Para el problema 12.66



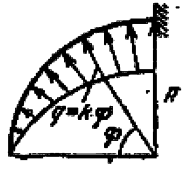
Para el problema 12.67

12.67. Hallar el desplazamiento horizontal del punto A del eje de la viga.

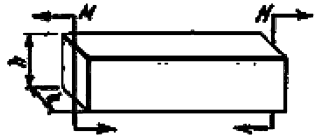
12.68. Construir el diagrama del esfuerzo cortante y del momento flector de una viga cargada con momentos que varían linealmente.



Para el problema 12.68



Para el problema 12.69



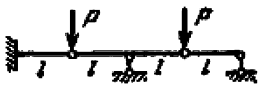
Para el problema 12.70

12.69. Determinar el momento flector junto al empotramiento de una barra redonda solicitada por una carga radial distribuida según la ley $q = k\varphi$, donde k es una constante.

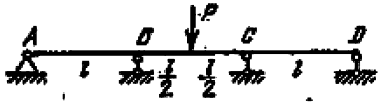
12.70*. Una cinta fina inelástica, que en el ensayo de rotura resiste un esfuerzo P, está pegada a la superficie de una barra de goma de sección rectangular (véase la figura). Basándose en la hipótesis de secciones planas, se pide determinar el valor de los momentos que someten a flexión la construcción en el instante de romper la cinta. Se considera que el grosor de la cinta es pequeño en comparación con h.

§ 5. Desplazamientos en vigas y estructuras debidos a flexión

12.71*. Trazar la deformada de la viga. Hallar los deplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas P.



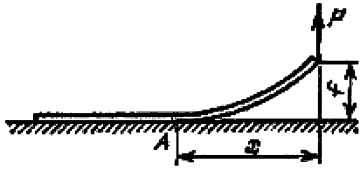
Para el problema 12.71



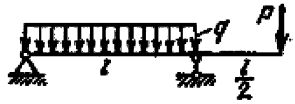
Para el problema 12.72

12.72*. ¿Qué asiento Δ es necesario asignar a los apoyos intermedios de una viga para que los momentos flectores en las secciones sobre estos apoyos se igualen a cero?

12.73*. Una tira de sección rectangular $b \times h$ descansa sobre una placa absolutamente rígida. Determinar el tramo x de tira que será levantado del plano al aplicar en su extremo la fuerza P. Definir la flecha f. El peso específico del material de la tira es γ.



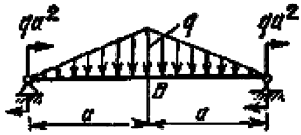
Para el problema 12.73



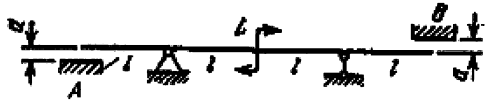
Para el problema 12.74

12.74*. ¿Con qué relación entre las cargas q y P el desplazamiento del punto de aplicación de la carga P será igual a cero?

12.75. Determinar el ángulo de giro en el punto B de la viga.



Para el problema 12.75

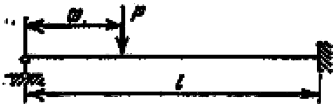


Para el problema 12.76

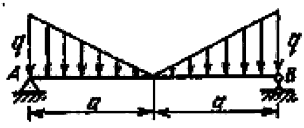
12.76. Considerando que $a = l/1\,000$, se pide determinar con qué valor de L los extremos de la viga alcanzarán a tocar los apoyos A y B.

12.77. Hallar la flecha en el extremo del voladizo representado en la figura del problema 4.87,7.

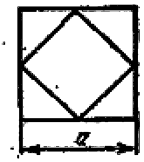
12.78. Hallar el valor de x al cual corresponderá el valor máximo del momento flector en la sección sometida a la fuerza P.



Para el problema 12.78



Para el problema 12.79



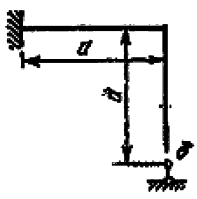
Para el problema 12.80

12.79. Construir los diagramas de las fuerzas interiores y determinar la flecha $v_{máx}$ en el centro de la luz, así como el ángulo de giro en el apoyo.

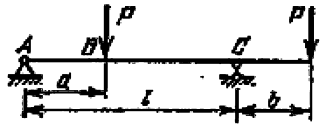
12.80. En un marco cuadrado de lado a está inscrito otro marco cuadrado de dimensiones más pequeñas. El material y las secciones transversales de ambos marcos son iguales. Construir el diagrama M cuando el marco interior está sometido a un calentamiento uniforme a $t°$.

12.81. El puntal de un marco resultó más corto que la dimensión necesaria en δ. Determinar el momento flector en el empotramiento surgido durante el montaje.

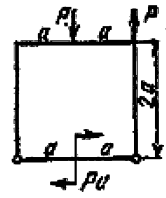
12.82. Elegir la dimensión a de tal modo que la flecha de la viga en el tramo AB varíe de modo lineal.



Para el problema 12.81



Para el problema 12.82



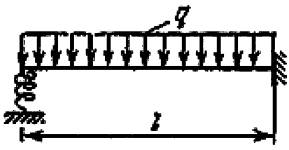
Para el problema 12.83

12.83. Encontrar el límite de indeterminación estática de una estructura. Construir el diagrama de momentos flectores.

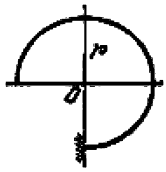
12.84. El extremo izquierdo de una viga se apoya sobre un resorte cuya rigidez es igual a c (c es la deformación del resorte provocada por una fuerza unitaria). Viene dado: q, l, c, E, J. Determinar el asiento Δ del resorte.

12.85. Una varilla de diámetro d está doblada, formando una circunferencia de radio r, a un ángulo $3\pi/2$ y después dirigida en

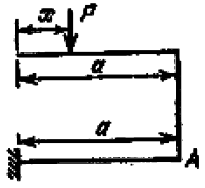
recta hacia el centro. En el centro (punto O) está aplicada perpendicularmente al plano del marco una fuerza P. Determinar el desplazamiento del punto O en el sentido de la fuerza.



Para el problema 12.84



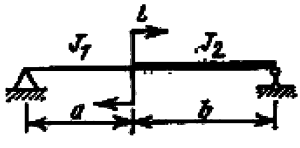
Para el problema 12.85



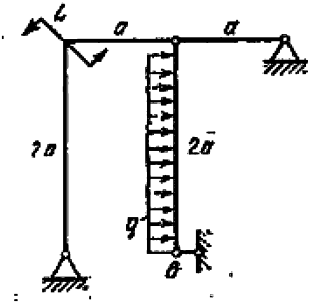
Para el problema 12.86

12.86. Definir la distancia x a la cual corresponde un desplazamiento nulo del punto A.

12.87. Teniendo las magnitudes a y b dadas, se pide determinar con qué relación entre los momentos de inercia de las secciones transversales $J_1 : J_2$ el desplazamiento lineal de la sección, donde está aplicado el momento concentrado L, será igual a cero. ¿Qué valor tiene en este caso el ángulo de giro de esta sección?



Para el problema 12.87



Para el problema 12.88

12.88. Determinar el desplazamiento vertical del punto B del pórtico presentado en la figura.

CAPÍTULO 1

TRACCIÓN Y COMPRESIÓN

1.3. Excluyendo los datos para los tramos *4—5*, *5—6*, *6—7*, cuyos alargamientos se distinguen mucho de los demás, calculamos la magnitud media del alargamiento uniforme máximo

$$\delta_{uni!} = \frac{(12-10)\,2+(11-10)\,5}{7\cdot 10} = 0{,}13.$$

Después de la rotura el alargamiento remanente medio es

$$\delta_{med} = \frac{(11-10)\,5+(12-10)\,2+(14-10)+(19-10)+(15-10)}{10\cdot 10} = 0{,}27;$$

$$\delta_{máx} = \frac{19-10}{10} = 0{,}9; \quad \psi = \frac{F_0-F_1}{F_0} = \frac{d_1^2-d_0^2}{d_0^2} = 0{,}64.$$

1.4. Basándonos en los datos del experimento, compongamos la tabla de los crecimientos medios de las indicaciones de los tensómetros correspondientes

Carga P, kN	Crecimiento de la carga ΔP, kN	Indicación media de los tensómetros n_{med}, mm	Crecimiento medio de las indicaciones Δn_{med}, mm	Crecimiento según la ley lineal Δn_{elas}	Desviación de la ley lineal en el tramo Δ_i	Desviación sumaria $\Sigma\Delta_i$, mm
10	—	30,0	—	—	—	—
20	10	37,5	7,5	8,05	−0,55	−0,55
30	10	46,0	8,5	8,05	0,45	−0,10
40	10	54,5	8,5	8,05	0,45	0,35
50	10	62,5	8,0	8,05	−0,05	0,30
60	10	70,0	7,5	8,05	−0,55	−0,25
70	10	78,5	8,5	8,05	0,45	0,20
80	10	86,5	8,0	8,05	−0,05	0,15
90	10	96,0	9,5	8,05	1,45	1,60
100	10	106,0	10,0	8,05	1,95	3,55

al crecimiento medio de la carga en $\Delta P = 10$ kN. Los primeros siete crecimientos Δn_{med} se distinguen poco entre sí y, por consiguiente, corresponden a la dependencia lineal entre la fuerza y el alargamiento. Hallamos

$$\Delta n_{elas} = \frac{7{,}5 \cdot 2 + 8{,}2 + 8{,}5 \cdot 3}{7} = 8{,}05 \text{ mm},$$

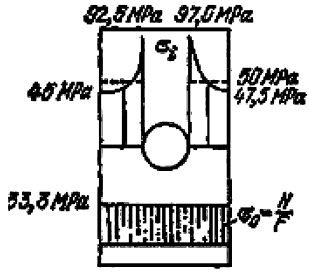
$$\Delta l_{elas} = \frac{8{,}05}{500} = 1{,}61 \cdot 10^{-2} \text{ mm}.$$

El módulo de elasticidad $E = \frac{\Delta P \cdot s}{\Delta l_{elas} \cdot F} = 1{,}98 \cdot 10^5$ MPa. Restando de Δn_{med} (la cuarta columna de la tabla) Δn_{elas} (la quinta columna) obtendremos las magnitudes de las desviaciones de las indicaciones de los tensómetros respecto de la ley lineal en cada escalón de carga (la sexta columna). Al sumar sucesivamente estas desviaciones (teniendo en cuenta sus signos) hallaremos las magnitudes de la desviación total respecto de la ley lineal para la carga dada. El límite convencional de proporcionalidad se halla con ayuda de la magnitud de la fuerza a que corresponde la desviación $\Sigma \Delta_l = 0{,}002\% \cdot l \cdot k = 1$ mm. Esta fuerza se encuentra entre $P = 80$ kN y $P = 90$ kN. Dicha fuerza se determina por interpolación lineal $P_{0.002} = 85{,}86$ kN; $\sigma_{0.002} = P_{0.002}/F = 273$ MPa.

1.5. El crecimiento medio de las indicaciones, que corresponde a $\Delta P = 10$ kN para el tensómetro longitudinal es $\Delta n_A = (10 + 9{,}5 + 10{,}5)/3 = 10$ mm, para el tensómetro transversal es $\Delta n_B = 3{,}5$ mm. Los alargamientos absolutos son por término medio: $\Delta s_A = 10/950 = 1{,}05 \cdot 10^{-2}$ mm, $\Delta s_B = 3{,}5/1190 = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ mm. De aquí

$$E = \frac{\Delta P \cdot s_A}{F \cdot \Delta s_A} = 1{,}9 \cdot 10^5 \text{ MPa};$$

$$\mu = \frac{\varepsilon_B}{\varepsilon_A} = \frac{\Delta s_B / s_B}{\Delta s_A / s_A} = 0{,}28.$$



Para el problema 1.7

1.7. Cuando crece la carga en $\Delta P = 20$ kN los crecimientos medios de las indicaciones de los tensómetros son iguales a: $\Delta n_1 = 18$, $\Delta n_2 = 19$, $\Delta n_3 = 37$, $\Delta n_4 = 39$, $\Delta n_5 = 19{,}5$, $\Delta n_6 = 19$. Los valores de las tensiones correspondientes a ellos son $\Delta \sigma_i = \Delta n_i E \cdot c = 2{,}5 \Delta n_i$ MPa. Hallamos $\Delta \sigma_1 = 45$ MPa, $\Delta \sigma_3 = 47{,}5$ MPa, $\Delta \sigma_2 = 92{,}5$ MPa, $\Delta \sigma_4 = 97{,}5$ MPa, $\Delta \sigma_5 = 48{,}75$ MPa, $\Delta \sigma_6 = 47{,}5$ MPa.

El diagrama de tensiones construido por los puntos experimentales está indicado en la figura con línea continua. La tensión media está representada con línea de trazos.

$$\Delta \sigma_{med} = 2 \cdot 10^4 / ((60 - 20)\, 10 \cdot 10^{-6}) = 5 \cdot 10^7 \text{ Pa} = 50 \text{ MPa}.$$

El valor medio de la tensión máxima, de acuerdo con el experimento, es igual a máx $\Delta \sigma = (\Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_4)/2 = 95$ MPa. El coeficiente teórico de concentración de tensiones es igual a

$$\alpha_T = \text{máx } \Delta \sigma / \Delta \sigma_{med} = 95/50 = 1{,}9.$$

1.10. Para determinar el error máximo hace falta tomar los valores mayores de las magnitudes que se encuentran en el numerador de la fórmula, y los valores menores que figuran en el denominador

$$E_{máx} = \frac{1{,}02P \cdot 1{,}005l}{0{,}99\Delta l \cdot 0{,}995^2 F} = 1{,}046 \frac{Pl}{\Delta l F} = 1{,}046 E_{med}.$$

$$\Delta E = \pm 0{,}046 E_{med}.$$

1.11. $\sigma = \frac{P}{F} = \frac{6 \cdot 10^4}{30 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^8$ Pa $= 200$ MPa,

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} = 0{,}25 \text{ mm}, \quad \varepsilon = \sigma/E = 10^{-3}$$

1.13. En las partes de la barra no debilitadas

$$\sigma_1 = \frac{P}{F_1} = \frac{1{,}5 \cdot 10^4 \cdot 4}{\pi \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 4{,}77 \cdot 10^7 \text{ Pa} = 47{,}7 \text{ MPa};$$

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1 (l - l_1)}{E} = 4{,}77 \cdot 10^{-5} \text{ m}.$$

En la parte debilitada

$$\sigma_2 = \frac{P}{F_2} = \frac{1{,}5 \cdot 10^4}{(\pi/4) \cdot 4 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 10^{-4}} = 1{,}31 \cdot 10^8 \text{ Pa} = 131 \text{ MPa};$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2 l_1}{E} = 1{,}31 \cdot 10^{-3} \text{ m}; \quad \Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0{,}18 \text{ mm}.$$

1.14. Al descomponer la fuerza P por las direcciones de las barras BA y BC, obtendremos $N_{BA} = -1{,}93P$ (compresión), $N_{BC} = P$ (tracción),

$$\sigma_{BA} = -1{,}93 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 4 / (\pi (2^2 - 1{,}8^2) 10^{-4}) = -6{,}47 \cdot 10^8 \text{ Pa} = -64{,}7 \text{ MPa};$$

$$\sigma_{BC} = 2 \cdot 10^5 / (0{,}1 \cdot 10^{-4}) = 2 \cdot 10^8 \text{ Pa} = 200 \text{ MPa}.$$

1.16. Sustituimos la carga repartida por la resultante $R = lq = 4 \cdot 2 = 8$ kN aplicada en el punto medio de la viga. Hallamos el esfuerzo N_{AB} en el tornapuntas, igualando a cero la suma de momentos de todas las fuerzas que actúan sobre la viga respecto a la charnela O: $R \cdot 2 - N_{AB} \cdot 1{,}3 = 0$. El brazo de la fuerza N_{AB} es igual a $OD = 1{,}5 \cdot \cos 30° = 1{,}3$ m. Hallamos $N_{AB} = 8 \cdot 2/1{,}3 = 12{,}3$ kN.

$$\sigma_{AB} = N_{AB}/F_{AB} = 24{,}6 \text{ MPa}$$

En el punto C aplicamos una fuerza vertical igual a 1 y determinamos la reacción $\overline{N}_{AB}$ en el tornapuntas: tenemos $1 \cdot 4 - \overline{N}_{AB} \cdot 1{,}3 = 0$, $\overline{N}_{AB} = 4/1{,}3 = 3{,}08$. Con ayuda de la fórmula de Maxwell—Mohr calculamos el desplazamiento

$$\Delta_C = \frac{N_{AB} \cdot \overline{N}_{AB}}{EF_{AB}} \, l_{AB} = 1{,}14 \text{ mm}.$$

1.18. Hallamos las fuerzas longitudinales en los tramos de la barra como la suma de todas las fuerzas que actúan sobre una parte de la barra a un lado de la sección examinada. El diagrama de las fuerzas longitudinales N está representado en la figura;

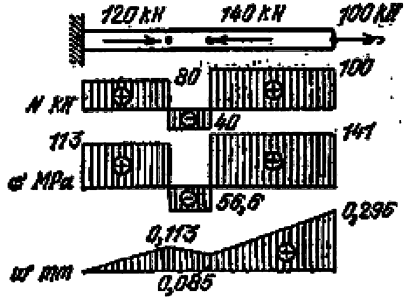
$$N_{\text{máx}} = 100 \text{ kN}, \quad \sigma_{\text{máx}} = N_{\text{máx}}/F = 10^5 \cdot 4/(\pi \cdot 9 \cdot 10^{-4}) =$$

$$= 1{,}41 \cdot 10^8 \text{ Pa} = 141 \text{ MPa}.$$

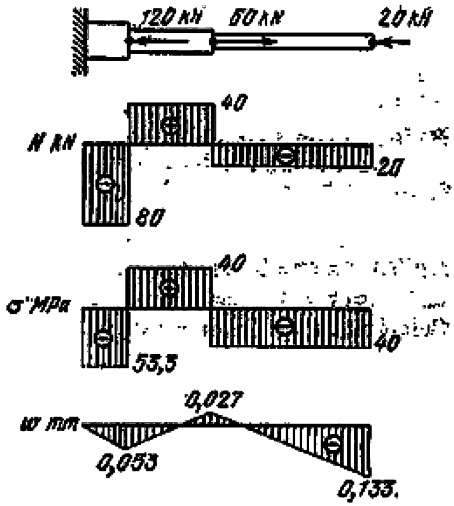
El desplazamiento transversal w de la sección se halla como la suma de los alargamientos Δl_i de los tramos de la barra entre el empotramiento y la sección en cuestión $w = \Sigma \sigma_i l_i / E$, la suma se efectúa por tramos en los cuales la tensión es constante. Obtenemos

$$w_{\text{máx}} = (113 \cdot 0{,}2 - 56{,}6 \cdot 0{,}1 + 141 \cdot 0{,}3) \cdot 10^6 / (2 \cdot 10^{11}) = 2{,}96 \cdot 10^{-4} \text{ m} \approx 0{,}3 \text{ mm}.$$

1.19. Sumando sucesivamente las fuerzas, empezando por el extremo libre, obtendremos el diagrama de las fuerzas longitudinales N (véase la figura): $N_{máx} = -20 + 60 - 120 = -80$ kN (compresión), $\sigma_{máx} = N_{máx}/F = -80 \cdot 10^3/(15 \cdot 10^{-4}) = -5{,}33 \cdot 10^7$ Pa $= -53{,}3$ MPa, $\varepsilon_{máx} = \sigma_{máx}/E =$



Para el problema 1.18



Para el problema 1.19

$= -5{,}33 \cdot 10^7/(2 \cdot 10^{11}) = -2{,}665 \cdot 10^{-4}$, $w_{máx} = \Sigma \varepsilon_i l_i = -2{,}665 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}4 - 2 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}8 = -1{,}33 \cdot 10^{-4}$ m.

1.20. La rigidez a la tracción (compresión) se mide por la magnitud de la fuerza que provoca un alargamiento igual a 1: $c = P/\Delta$. Para la barra escalonada

$$\Delta_{esc} = \frac{4l_1P}{E\pi d^2} + \frac{4l_2P}{E\pi D^2} = \frac{4l_1P}{\pi ED^2}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \beta\right), \quad c_{esc} = \frac{\pi ED^2\alpha^2}{4l_1(1+\alpha^2\beta)}.$$

Para la barra hueca

$$\Delta_{huec} = \frac{4P(l_1+l_2)}{\pi E(D^2-d^2)} = \frac{4Pl_1(1+\beta)}{\pi ED^2(1-\alpha^2)}, \quad c_{huec} = \frac{\pi ED^2(1-\alpha^2)}{4l_1(1+\beta)}.$$

Tenemos $c_{esc} = c_{huec}$, $\alpha^2/(1+\alpha^2\beta) = (1-\alpha^2)/(1+\beta)$; $\beta = (1-2\alpha^2)/\alpha^4$.

1.21. El esfuerzo que trata de arrancar el cilindro del cárter es igual a $P = p\pi D^2/4$. Si la distribución del esfuerzo entre los espárragos es uniforme, el esfuerzo admisible es igual a $P = n(\pi d^2/4)[\sigma]$. Igualando las expresiones obtenidas, hallamos que $d = D\sqrt{p/n[\sigma]} = 14{,}4$ mm; podemos considerar que $d = 15$ mm.

1.23. Igualando a cero la suma de las proyecciones sobre el eje y de todas las fuerzas que actúan sobre el nudo obtenemos que $2N \cdot \cos 60^\circ - P = 0$. A consecuencia de la simetría del nudo y debido a la carga aplicada los esfuerzos en las barras son iguales. De aquí $N = P$. De la condición de resistencia de la barra hallamos que $P = 10^8 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^4$ N $= 50$ kN.

Aplicando al nudo una fuerza vertical igual a 1 hallamos los esfuerzos en las barras $\bar{N} = 1$. Según la fórmula de Maxwell—Mohr tenemos

$$\Delta_C = \sum \frac{N_i \bar{N}_i l_i}{EF_i} = \frac{2 \cdot P \cdot 1 \cdot 4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot \operatorname{sen} 60^\circ} = 4{,}62 \cdot 10^{-3} \text{m} = 4{,}62 \text{ mm}.$$

1.24. Al proyectar todas las fuerzas que actúan sobre el nudo sobre los ejes x e y e igualando a cero las sumas de las proyecciones, hallamos las reacciones en las barras $N_{AB} = 290$ kN (tracción), $N_{AC} = -410$ kN (compresión). Las magnitudes incógnitas de las áreas se determinan de las condiciones de resistencia

$$\frac{N_{AB}}{F_{AB}} \leqslant [\sigma]_{tr}, \quad F_{AB} \geqslant \frac{2{,}9 \cdot 10^5}{1{,}2 \cdot 10^8} = 2{,}42 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2.$$

Tomamos $F_{AB} = 24{,}2$ cm^2, $\frac{N_{AC}}{F_{AC}} \leqslant [\sigma]_{comp}$, $F_{AC} \geqslant \frac{4{,}1 \cdot 10^5}{5 \cdot 10^7} = 8{,}2 \cdot 10^{-3}$ m^2. Podemos considerar que $F_{AC} = 82$ cm^2.

1.25. Mediante las condiciones de equilibrio del nudo hallamos los esfuerzos en las barras debidos a la acción de la fuerza dada P:

$$N_{AB} = 0{,}866P, \quad N_{AC} = 0{,}5P.$$

Aplicando una fuerza horizontal 1, calculamos los esfuerzos en las barras provocados por esta fuerza que son iguales a $\overline{N}^H_{AB,\,1} = 0{,}866$, $\overline{N}^H_{AC,\,1} = -0{,}5$. Calculamos el desplazamiento horizontal del nudo

$$\Delta_x = \sum \frac{N_l \overline{N}^H_l l_l}{EF_l} = \frac{0{,}866 \cdot 10^5 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} + \frac{0{,}5 \cdot 10^5 \cdot (-0{,}5) \cdot 0{,}1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} =$$

$$= 3{,}32 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0{,}0332 \text{ mm}.$$

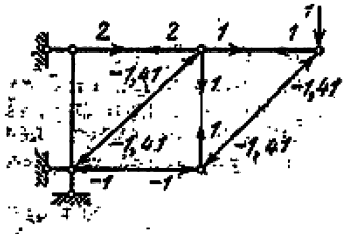
Los esfuerzos debidos a la fuerza vertical 1 son iguales a $N^V_{AB} = 0{,}5$, $N^V_{AC} = 0{,}866$. El desplazamiento vertical es

$$\Delta_y = \sum \frac{N_l N^V_l l_l}{EF_l} = \frac{0{,}866 \cdot 10^5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} + \frac{0{,}5 \cdot 10^5 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} =$$

$$= 0{,}115 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0{,}115 \text{ mm}.$$

El desplazamiento total del nudo es igual a $\Delta = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2} = 0{,}12$ mm, $\operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = 3{,}49$; $\theta = 74°$.

1.26. Aplicamos la fuerza vertical 1 en el nudo A de la armadura y calculamos los esfuerzos en sus barras, examinando el equilibrio de los nudos. Las direcciones y magnitudes de los esfuerzos $\overline{N}_l$ están indicadas en la figura.



Para el problema 1.26

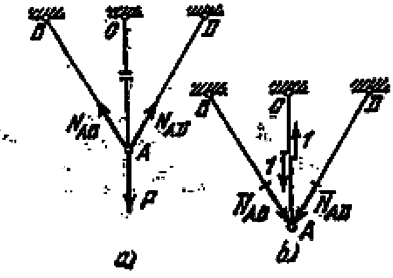
El desplazamiento vertical del nudo A se determina por la fórmula $\Delta_y = \sum \alpha_l l_l \Delta t_l \overline{N}_l = 1{,}25 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot (1 \cdot 1 - 1{,}41 \cdot 1{,}41 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1{,}41 \cdot 1{,}41 \cdot 1) = -1{,}25 \cdot 10^{-3}$ m $= -1{,}25$ mm. El signo menos indica que el desplazamiento es contrario a la fuerza 1, es decir, está dirigido hacia arriba.

1.27. El desplazamiento se halla por la fórmula $\Delta = \sum \overline{N}_l \Delta_{0l}$, donde $\overline{N}_l$ es el esfuerzo en las barras debidos a la fuerza 1 aplicada en la dirección del desplazamiento buscado, Δ_{0l} es la desviación de la longitud de la l-ésima barra respecto de la dimensión nominal que se considera positiva, si la barra es más larga que la normal. Al aplicar en el nudo A fuerzas iguales a 1 en las direcciones horizontal y vertical hallamos las reacciones en los apoyos debidas a cada una de estas fuerzas (por separado) y calculamos los esfuerzos en las barras de la armadura. Es suficiente determinar sólo los esfuerzos $\overline{N}_{BC}$, porque las longitu-

des de las otras barras son iguales a las nominales y las desviaciones iniciales correspondientes Δ_{0i} son iguales a cero. Tenemos $\bar{N}^{V}_{BC} = \frac{2}{3}$, $N^{H}_{BC} = 0$. Por eso $\Delta_y = \frac{2}{3}\Delta_0 = \frac{2}{3} \cdot 0{,}005 \cdot 120 = 0{,}4$ cm, $\Delta_x = 0$. El desplazamiento total del nudo es igual a 0,4 cm y está verticalmente dirigido hacia arriba (según la dirección de la fuerza 1).

Después del montaje en las barras no aparecen tensiones.

1.31. El sistema de barras es estáticamente indeterminado, porque para hallar tres esfuerzos incógnitos en las barras se pueden componer solamente dos ecuaciones de equilibrio del nudo ($\sum X = 0$ y $\sum Y = 0$).



Para el problema 1.31

Eligimos el sistema principal cortando una de las barras, por ejemplo, la barra AC (véase la figura a). Aplicamos en el nudo A la fuerza P y calculamos los esfuerzos en las barras laterales, que la equilibran. Estos esfuerzos son iguales a $N_{AB} = N_{AD} = P/(2\cos\alpha) = 0{,}577P$. En este caso el esfuerzo en la barra cortada es igual a cero.

Luego en el corte de la barra media del sistema principal aplicamos las fuerzas de tracción 1 (véase la figura b). Los esfuerzos en la barras son: $\bar{N}_{AB} = \bar{N}_{AD} = -0{,}557$ (compresión), $\bar{N}_{AC} = 1$.

El esfuerzo incógnito X_1 en la barra media del nudo dado se determina por medio de la ecuación canónica $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$, donde

$$\delta_{11} = \sum \frac{\bar{N}_i^2 l_i}{EF_i} = 2 \cdot \frac{(-0{,}577)^2 \cdot l}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot \cos 30^\circ} + \frac{1^2 \cdot l}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = -0{,}442 \cdot 10^{-7}\, l$$

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{\bar{N}_i N_i l_i}{EF_i} = 2 \cdot \frac{0{,}577P\,(-0{,}577)\,l}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot \cos 30^\circ} = -0{,}192 \cdot 10^{-7}\, Pl,$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = 0{,}434P.$$

Los esfuerzos en las barras del sistema inicial se obtienen por la suma de los esfuerzos en el sistema principal debidos a las fuerzas P y X_1: $N_1 = N_{AB} + X_1\bar{N}_{AB} = 0{,}577P + (-0{,}577) \cdot 0{,}434P = 0{,}326P = N_3$; $N_2 = X_1 = 0{,}434P$. La barra media es la más cargada. Para ella componemos la condición de resistencia que es $\frac{0{,}434P}{F} \leqslant [\sigma]$ donde $[\sigma] = \frac{\sigma_{f1}}{n} = \frac{260}{2} = 130$ MPa. Hallamos

$$P \leqslant \frac{1{,}3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{0{,}434} = 6 \cdot 10^4 \text{ N} = 60 \text{ kN}.$$

La disminución del área de la sección de la barra media influirá solamente en la magnitud δ_{11} la cual en este caso será

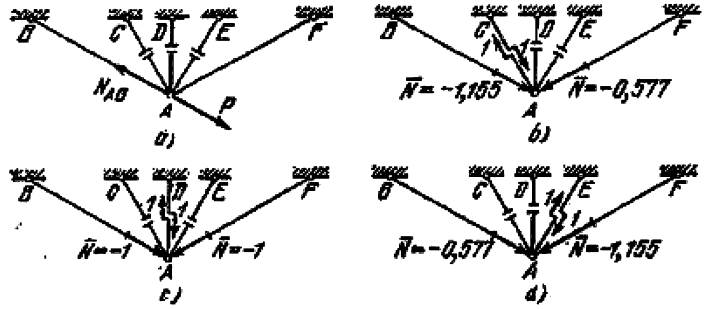
$$\delta_{11} = 2 \cdot \frac{(-0{,}577)^2 l}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cos 30^\circ} + \frac{1^2 \cdot l}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1 \cdot 10^{-4}} = 0{,}692 \cdot 10^{-7}\, l.$$

Entonces $X_1 = 0{,}278P = N_2$,

$$N_1 = N_3 = 0{,}577P + (-0{,}577) \cdot 0{,}278P = 0{,}417P.$$

En este caso están más cargadas las barras laterales, para las cuales la condición de resistencia $0{,}417P/(2\cdot10^{-4}) = 1{,}3\cdot10^{8}$ nos da la magnitud de la carga admisible: $P = 62{,}4$ kN. El aumento de la carga admisible será $\frac{62{,}4 - 60}{60}\cdot100\% = 4\%$.

1.34. El problema es tres veces estáticamente indeterminado. Cortamos tres barras interiores y al sistema principal, obtenido de este modo, le aplica-



Para el problema 1.34

mos consecutivamente la fuerza dada P y las fuerzas unitarias en los cortes (veáse la figura). Las fuerzas incógnitas X_1, X_2, X_3 en las barras cortadas se definen por medio del sistema de ecuaciones canónicas

$$\begin{aligned}
\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} &= 0,\\
\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} &= 0,\\
\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} &= 0.
\end{aligned}$$

Los coeficientes y los miembros independientes de las ecuaciones se calculan por las fórmulas

$$\delta_{ik} = \sum \frac{\bar{N}_i\bar{N}_k l_i}{EF_i}, \quad \Delta_{iP} = \sum \frac{\bar{N}_i N_P l_i}{EF_i}.$$

Sustituyendo los esfuerzos hallados para el sistema principal, cuyas magnitudes están indicadas en la figura, obtendremos

$$\Delta_{1P} = \frac{-1{,}155P\cdot 2l}{EF} = \frac{-2{,}31Pl}{EF}; \quad \Delta_{2P} = \frac{-1\cdot P\cdot 2l}{EF} = -2\frac{Pl}{EF};$$

$$\Delta_{3P} = \frac{-0{,}577P\cdot 2l}{EF} = -1{,}154\frac{Pl}{EF};$$

$$\delta_{11} = \frac{(-1{,}155)^2\cdot 2l}{EF} + \frac{1^2\cdot 1{,}155l}{EF} + \frac{(-0{,}577)^2\cdot 2l}{EF} = 4{,}489\frac{l}{EF},$$

$$\delta_{22} = 2\cdot\frac{(-1)^2\cdot 2l}{EF} + \frac{1^2 l}{EF} = \frac{5l}{EF},$$

$$\delta_{33} = \frac{0{,}577^2\cdot 2l}{EF} + \frac{1^2\cdot 1{,}155l}{EF} + \frac{1{,}155^2\cdot 2l}{EF} = \frac{4{,}489l}{EF},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{(-1{,}155)(-1)\cdot 2l}{EF} + \frac{(-0{,}577)(-1)\cdot 2l}{EF} = \frac{3{,}464l}{EF},$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = 2\cdot\frac{(-1{,}155)(-0{,}577)\cdot 2l}{EF} = \frac{2{,}667l}{EF},$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{(-0{,}577)(-1)\cdot 2l}{EF} + \frac{(-1)(-1{,}577)\cdot 2l}{EF} = \frac{3{,}464l}{EF}.$$

Después de sustituir las magnitudes calculadas resolvemos el sistema y obtenemos $X_1 = N_{AC} = 0{,}464P$, $X_2 = N_{AD} = 0{,}197P$, $X_3 = N_{AE} = -0{,}170P$.

Los esfuerzos en las barras laterales (no cortadas) se hallan como las sumas de los esfuerzos debidos a la fuerza P y de las incógnitas halladas:

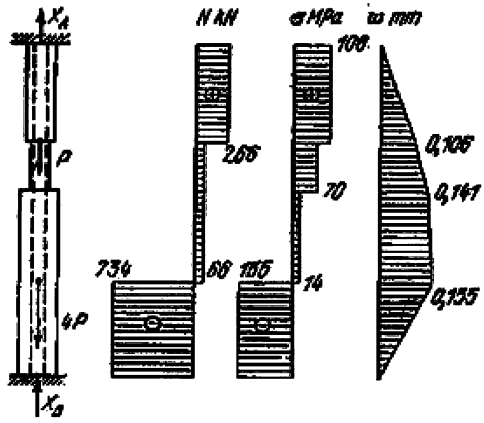
$$N_{AB} = P - 1{,}115 \cdot 0{,}464P - 1 \cdot 0{,}197P + 0{,}577 \cdot 0{,}170P = 0{,}365P,$$

$$N_{AF} = -0{,}577 \cdot 0{,}464P - 1 \cdot 0{,}197P - 1{,}155\,(-0{,}170)\,P = -0{,}268P.$$

1.39. Retiramos el empotramiento superior y sustituimos su acción por una reacción incógnita X_A que definiremos de la condición de que el alargamiento total de la barra es igual a cero:

$$\frac{0{,}2X_A}{25{,}1 \cdot 10^{-4}E} + \frac{0{,}1\,(X_A - P)}{9{,}42 \cdot 10^{-4}E} + \frac{0{,}2\,(X_A - P)}{47{,}1 \cdot 10^{-4}E} + \frac{0{,}2\,(X_A - 5P)}{47{,}1 \cdot 10^{-4}E} = 0.$$

De aquí $X_A = 1{,}33P = 266$ kN, $X_B = X_A - 5P = -734$ kN (compresión). Los diagramas de las fuerzas longitudinales de las tensiones y de los desplaza-



Para el problema 1.39

mientos están indicados en la figura. $\sigma_{máx} = \dfrac{-7{,}84 \cdot 10^5}{47{,}1 \cdot 10^{-4}} = -155$ MPa, $w_{máx} = 0{,}155$ mm (en la sección donde está aplicada la fuerza $4P$).

1.41. La condición de equilibrio es: $N_{mad} + N_{ac} = P$. Las áreas de las secciones son: $F_{mad} = 625$ cm², $F_{ac} = 12{,}2$ cm². Las deformaciones de la columna de madera y de los angulares de acero son iguales: $\Delta l_{mad} = \Delta l_{ac}$. De aquí $\dfrac{N_{mad}l}{E_{mad}F_{mad}} = \dfrac{N_{ac}l}{E_{ac}F_{ac}}$ o $N_{mad} = \dfrac{N_{ac}E_{mad}F_{mad}}{E_{ac}F_{ac}} = 2{,}58N_{ac}$. Al sustituir este resultado en la ecuación de equilibrio, obtenemos $N_{ac} = 0{,}28P$, $N_{mad} = 0{,}72P$.

De la condición de resistencia de los angulares $\dfrac{0{,}28P}{12{,}2 \cdot 10^{-4}} \leqslant 1{,}6 \cdot 10^8$ obtenemos $P \leqslant 697$ kN.

La condición de equilibrio de la parte de madera de la columna $\dfrac{0{,}72P}{625 \cdot 10^{-4}} \leqslant 1{,}2 \cdot 10^7$ nos da la magnitud $P \leqslant 949$ kN. La carga admisible se determina por el valor menor: $P = 697$ kN.

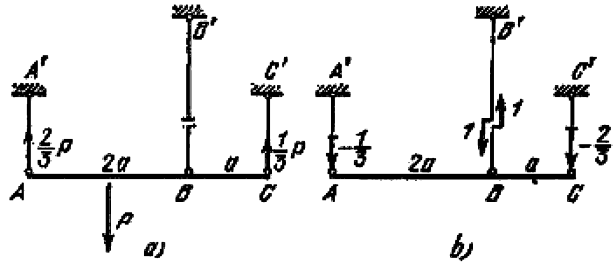
Si acortamos los angulares, la parte de madera de la columna puede ser cargada adicionalmente a una magnitud $\Delta P = 949 - 697 = 252$ kN. Esta

carga provocará una reducción adicional de la columna $\Delta = \frac{2.52 \cdot 10^5 \cdot 1}{625 \cdot 10^4 \cdot 1 \cdot 10^{10}} = 4 \cdot 10^{-4}$ m = 0,4 mm. Ésta es precisamente la magnitud del acortamiento necesario de los angulares con el cual la carga admisible sobre la columna crecerá hasta 949 kN, es decir, en un 36%.

1.42. Utilizar la condición de igualdad de los alargamientos de la lámina y de los nervios longitudinales.

1.45. Utilizar la condición de igualdad de alargamientos de los tirantes y de acortamiento del cilindro, pues debido a la simetría la barra efectuará un movimiento de traslación. Sustituir la carga q por la fuerza resultante aplicada en el punto medio de la barra.

1.46. El problema es una vez estáticamente indeterminado. Elijamos el sistema principal, cortando la barra BB'. Hallemos primeramente los esfuerzos en las barras del sistema principal debidos a la carga dada P y después, a la



Para el problema 1.46

fuerza unitaria aplicada en el corte. Las reacciones están indicadas en la figura. El esfuerzo incógnito en la barra cortada se halla de la ecuación canónica $X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0$, donde

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{N_i \bar{N}_i l_i}{EF_i} = -\frac{2}{3} P \cdot \frac{1}{3} \frac{l}{EF} - \frac{P \cdot 2}{3 \cdot 3} \cdot \frac{l}{2EF} = -\frac{Pl}{3EF},$$

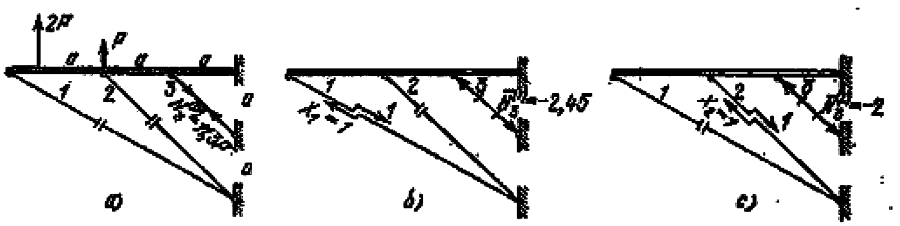
$$\delta_{11} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{l}{EF} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{l}{2EF} + 1^2 \cdot \frac{2l}{EF} = \frac{7l}{3EF}.$$

Obtenemos $X_1 = P/7$, es decir, $N_{BB'} = X_1 = \frac{P}{7}$, $N_{AA'} = \frac{2}{3} P - \frac{P}{3 \cdot 7} = \frac{13}{21} P$, $N_{CC'} = \frac{P}{3} - \frac{2P}{3 \cdot 7} = \frac{5}{21} P$.

La carga admisible se halla de la condición de resistencia de la barra más cargada AA': $\frac{13P}{21 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} \leqslant 1{,}6 \cdot 10^8$, $P \leqslant 258$ kN.

Si la barra efectúa un movimiento de traslación, los alargamientos de todas las barras son iguales y los esfuerzos en éstas son proporcionales a sus rigideces $c_i = EF_i/l_i$. La resultante de todas estas fuerzas está aplicada a la distancia $z = 2a$ a partir del punto A. El esfuerzo máximo $N = 4P/7$ será el de la barra más rígida CC'. La magnitud admisible de la carga en este caso es igual a $P = 280$ kN.

1.49. El problema es dos veces estáticamente indeterminado. El sistema principal se obtiene cortando, por ejemplo, las barras *1* y *2* (véase la figura). Aplicamos sucesivamente al sistema principal la carga dada y las fuerzas unitarias $X_1 = 1$ y $X_2 = 1$ en los cortes (figs. *a*, *b*, *c*). De la condición de equilibrio calculamos el esfuerzo en la barra *3* debido a cada una de estas cargas y luego



Para el problema 1.49

hallamos las magnitudes de los coeficientes y los miembros independientes de las ecuaciones canónicas:

$$\delta_{11}=\frac{1^2\cdot 4a}{EF}+\frac{(-2,45)^2\, a\sqrt{2}}{EF}=12,49\,\frac{a}{EF},$$

$$\delta_{22}=\frac{1^2\cdot 2a\sqrt{2}}{EF}+\frac{(-2)^2\, a\sqrt{2}}{EF}=8,485\,\frac{a}{EF},$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{(-2)\,(-2,45)^2\, a\sqrt{2}}{EF}=6,93\,\frac{a}{EF},$$

$$\Delta_{1P}=\frac{11,3P\,(-2,45)\, a\sqrt{2}}{EF}=-\,39,15\,\frac{Pa}{EF},$$

$$\Delta_{2P}=\frac{11,3P\,(-2)\, a\sqrt{2}}{EF}=-\,31,96\,\frac{Pa}{EF}.$$

Las ecuaciones canónicas tienen la forma

$$6,93X_1+8,485X_2-31,96P=0,\quad 12,49X_1+6,93X_2-39,15P=0.$$

Resolviendo el sistema, obtendremos $N_1=X_1=1,92P$, $N_2=X_2=2,2P$, después de lo cual hallamos $N_3=11,3P-2,45\cdot 1,92P-2\cdot 2,2P=2,2P$. La magnitud admisible de la fuerza se halla a partir de la condición de resistencia de la barra *2* (ó *3*):

$$2,2P/(2\cdot 10^{-4})\leqslant 1,6\cdot 10^{5}.\ \text{Tenemos}\quad P\leqslant 14,5\ \text{kN}$$

1.52. Las tensiones de origen térmico se determinan de la condición de igualdad del acortamiento elástico de la barra a su expansión térmica

$$\sum \frac{Nl_i}{EF_i}=\alpha l\,\Delta t.$$

1.53. El problema es estáticamente indeterminado. Cortamos la barra media AC y aplicamos en el corte las fuerzas $X_1=1$ (véase la figura). Según las condiciones de equilibrio se hallan los esfuerzos en las barras no cortadas $\bar{N}_{AB}=\bar{N}_{AD}=-0,577$ (compresión). La fuerza incógnita X_1 en la barra cortada se halla por medio de la ecuación canónica $\delta_{11}X_1+\Delta_{1t}=0$, donde

$$\delta_{11}=\sum \frac{\bar{N}_i^2 l_i}{EF_i}=2\cdot\frac{(-0,577)^2\cdot 1,1551l}{2EF}+\frac{1^2\cdot l}{EF}=1,38\,\frac{1}{EF}.$$

$$\Delta_{1t}=\sum \bar{N}_i\alpha l_i\,\Delta t_i=1,25\cdot 10^{-5}\cdot 80\,(2\,(-0,577)\cdot 1,155l+1\cdot l)=-3,33\cdot 10^{-4}l.$$

Obtenemos

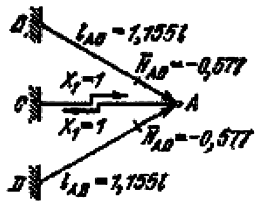
$$X_1=-\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}}=48\cdot 10^{6}F,$$

$$N_{AB}=N_{AD}=-0,557X_1=-27,7\cdot 10^{6}F.$$

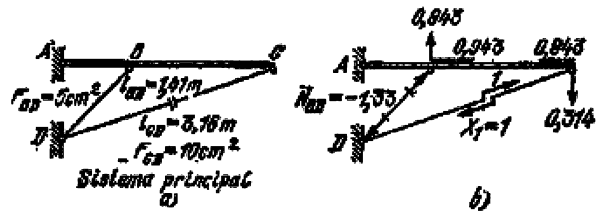
Las tensiones incógnitas en las barras son:

$$\sigma_{AC}=\frac{X_1}{F}=48\ \text{MPa},\quad \sigma_{AB}=\sigma_{AD}=\frac{-27{,}7\cdot10^6F}{2F}=-13{,}85\ \text{MPa}.$$

1.54. El sistema es una vez estáticamente indeterminado. Calculamos las longitudes de las barras (están indicadas en la figura), elegimos el sistema principal, cortando la barra CD. Aplicamos en el corte fuerzas iguales a 1 y determinamos la reacción $\bar{N}_{BD}$ en la barra no cortada BD. Los esfuerzos en los puntos B



Para el problema 1.53



Para el problema 1.54

y C se sustituyen por sus componentes representadas en la figura con flechas de trazos. Las componentes horizontales iguales a 0,943 efectuarán el trabajo de expansión térmica de la viga y deben ser tomadas en consideración durante el cálculo de Δ_{1t}.

$$\Delta_{1t}=\sum\bar{N}_i\alpha_i\Delta t_i l_i=-1{,}33\cdot1{,}25\cdot10^{-5}\cdot30\cdot1{,}41+0{,}943\cdot2{,}25\cdot10^{-5}\cdot1\cdot30+$$
$$+1{,}125\cdot10^{-5}\cdot30\cdot3{,}16-0{,}943\cdot2{,}25\cdot10^{-5}\cdot3\cdot30=-7{,}93\cdot10^{-3};$$

$$\delta_{11}=\sum\frac{\bar{N}_i^2l_i}{EF_i}=\frac{1^2\cdot3{,}16}{2\cdot10^{11}\cdot10^{-3}}+\frac{1{,}33^2\cdot1{,}41}{2\cdot10^{11}\cdot5\cdot10^{-4}}=4{,}12\cdot10^{-5};$$

$$N_{CD}=X_1=-\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}}=\frac{7{,}93\cdot10^{-3}}{4{,}12\cdot10^{-5}}=192{,}5\ \text{kN};$$

$$N_{BD}=-1{,}33X_1=-260\ \text{kN (compresión)}$$

$$\sigma_{CD}=1{,}925\cdot10^5/10^{-3}=1{,}925\cdot10^8\ \text{Pa}=192{,}5\ \text{MPa};$$

$$\sigma_{BD}=-2{,}58\cdot10^5/(5\cdot10^{-4})=-5{,}20\cdot10^8\ \text{Pa}=-520\ \text{MPa}.$$

1.55. Al calentar los casquillos, éstos se ensanchan más que el perno. Por eso ellos resultan comprimidos y el perno, estirado por fuerzas adicionales iguales a ΔN. Componemos la ecuación de los alargamientos totales de los casquillos y del perno

$$\alpha_0 u_1\Delta t\cdot40\cdot10^{-3}+\alpha_{cob}\cdot\Delta t\cdot10\cdot10^{-3}-\frac{\Delta N\cdot40\cdot10^{-3}}{(EF)_{dur}}-\frac{\Delta N\cdot10\cdot10^{-3}}{(EF)_{cob}}=$$
$$=\alpha_{ac}\Delta t\cdot50+\frac{N\cdot50\cdot10^{-3}}{(EF)_{ac}}.$$

De aquí $\Delta N=166\Delta t=166\cdot20=3320N=3{,}32$ kN. El esfuerzo total en el perno es

$$N=N_0+\Delta N=23{,}32\ \text{kN}.$$

1.58. Después de cortar la barra media, aplicamos al sistema principal obtenido $X_1 = 1$ y calculamos los esfuerzos $\bar{N}$ en las barras laterales (están indicadas en la figura). Luego calculamos

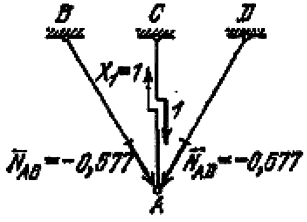
$$\delta_{11} = \sum \frac{\bar{N}_i^2 l_i}{EF_i} = 2 \cdot \frac{(-0{,}577)^2 l}{EF \cos 30^\circ} + \frac{1^2 \cdot l}{EF} = 1{,}77 \frac{l}{EF};$$

$$\Delta_{10} = \sum \bar{N}_i \Delta_0 = 1 \cdot 5 \cdot 10^{-4} l; \quad \delta_{11} = X_1 + \Delta_{10} = 0;$$

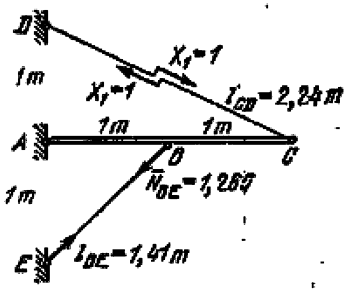
$$N_{AC} = X_1 = -\frac{5 \cdot 10^{-4} lEF}{1{,}77l} = -5{,}65 \cdot 10^{7} F \text{ N};$$

$$N_{AB} = N_{AD} = -0{,}577 \cdot N_{AC} = 3{,}26 \cdot 10^{7} F \text{ N}.$$

1.59. El problema es una vez estáticamente indeterminado. Cortamos la barra DC y aplicamos en el corte las fuerzas $X_1 = 1$ (véase la figura). Calculamos el esfuerzo en el puntal BE a partir de la igualdad a cero de los momentos de



Para el problema 1.58



Para el problema 1.59

todas las fuerzas respecto al punto A. El esfuerzo X_1 en la barra cortada se halla mediante la ecuación canónica $\delta_{11} X_1 + \Delta_{10} = 0$.

$$\delta_{11} = \sum \frac{\bar{N}_i^2 l_i}{EF_i} = \frac{1^2 \cdot 2{,}236}{2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} + \frac{1{,}265^2 \cdot 1{,}41}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 8{,}45 \cdot 10^{-8};$$

$$\Delta_{10} = \sum \bar{N}_i \Delta_{0i} = -2{,}236 \cdot 10^{-3};$$

$$N_{CD} = X_1 = -\frac{-2{,}236 \cdot 10^{-3}}{8{,}45 \cdot 10^{-8}} = 2{,}65 \cdot 10^{4} \text{ N} = 26{,}5 \text{ kN};$$

$$N_{BE} = 1{,}265 \cdot 26{,}5 = 33{,}5 \text{ kN};$$

$$\sigma_{CD} = \frac{2{,}65 \cdot 10^{4}}{4 \cdot 10^{-4}} = 5{,}88 \cdot 10^{7} \text{ Pa} = 58{,}8 \text{ MPa};$$

$$\sigma_{BE} = \frac{3{,}35 \cdot 10^{4}}{2 \cdot 10^{-4}} = 167{,}5 \text{ MPa}.$$

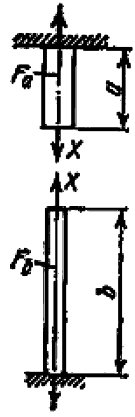
1.61. Las tensiones máximas actúan en la sección superior de la barra, cuyo peso es igual a $G = \rho g l F$.
$\sigma_{máx} = G/F = \rho g l F/F = \rho g l = 7{,}85 \cdot 10^{3} \cdot 9{,}8 \cdot 10^{1} = 7{,}7 \cdot 10^{6}$ Pa $= 0{,}77$ MPa.
El alargamiento del elemento de longitud dx situado a la distancia x del extremo

libre es igual a $\frac{\rho g}{EF} x\,dx$. El alargamiento total es igual al desplazamiento del extremo libre

$$w_{\max} = \int_0^l \frac{\rho g}{EF} x\,dx = \frac{\rho g l^2}{2EF} = \frac{\sigma_{\max} l}{2E} = 1{,}83 \cdot 10^{-5} \text{ m}.$$

El alargamiento de la barra bajo la acción de su peso propio es dos veces menor que el alargamiento debido a la acción de una fuerza igual al peso, pero aplicada en el extremo de la barra.

1.64. Cortamos la barra tal como está indicado en la figura y hallamos la fuerza X a partir de la condición de que la suma de los alargamientos de los tramos de barra debidos a la acción del peso y de la fuerza X debe ser igual a cero. Para calcular el alargamiento debido al peso propio es conveniente utilizar la solución del problema 1.61.



Para el problema 1.64

$$\frac{X \cdot a}{EF_a} + \frac{\rho g a^2 F_a}{2EF_a} + \frac{X \cdot b}{EF_b} - \frac{\rho g b^2 F_b}{2EF_b} = 0,$$

$$X = -\frac{\rho g a F_a}{2} \cdot \frac{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}{\left(1 + \frac{b}{a}\frac{F_a}{F_b}\right)},$$

$$V_A = X + \rho g a F_a, \quad V_B = X - \rho g b F_b.$$

1.67. Las áreas de las secciones de la barra se hallan de las condiciones de resistencia:

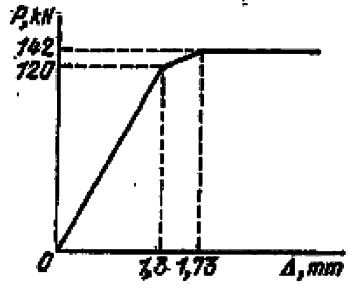
$$F_1 = \frac{P}{[\sigma] - \rho g x},$$

$$F_2 = \frac{P[\sigma]}{([\sigma] - \rho g(l-x))([\sigma] - \rho g x)}.$$

El peso total de la barra es $G = \rho g P \frac{[\sigma] l - \rho g x (l-x)}{([\sigma] - \rho g x)([\sigma] - \rho g (l-x))}$. El valor mínimo del peso alcanza cuando

$$x = \frac{l}{2} - \frac{[\sigma]}{\rho g} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} + \left(\frac{[\sigma]}{\rho g}\right)^2}.$$

1.71. Las tensiones en la barra media alcanzarán el límite de fluencia antes que en las barras laterales. El crecimiento subsiguiente de la carga sobre el nudo es posible solamente a cuenta del aumento de las tensiones en las barras extremas hasta que éstas alcancen el límite de fluencia σ_{f1}. El valor de la carga que provoca en la barra media tensiones iguales a σ_{f1} (véase la solución del problema 1.31) es $P_1 = (1 + 2\cos^3\alpha) F\sigma_{f1} = (1 + 2 \cdot 0{,}866^3) \cdot 2 \cdot 260 = 120$ kN. En este momento el nudo A bajará a una magnitud Δ_1 igual al alargamiento de la barra media sometida a tensiones σ_{f1}: $\Delta_1 = \sigma_{f1} \cdot l/E = 0{,}18$ cm. Después de alcanzar la carga el valor P_1 la barra media se alarga sin aumento de la carga. La carga máxima corresponde al estado cuando las tensiones en las tres barras sean iguales



Para el problema 1.71

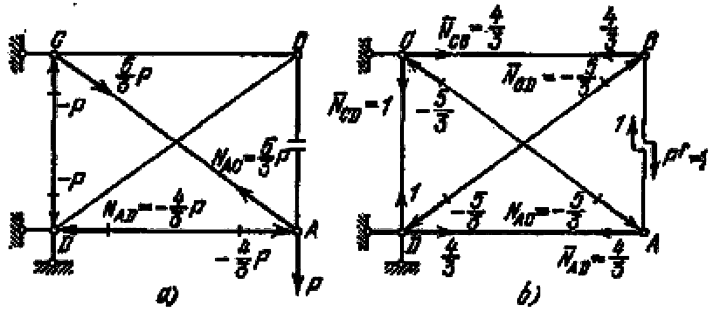
a σ_{fl}. Esta fuerza es igual a $P_2 = P_{máx} = \sigma_{fl}F\,(1 + 2\cos\alpha) = 142$ kN. La carga admisible es $[P] = \frac{142}{2} = 71$ kN. El aumento de la carga es igual a $\frac{71 - 60}{60} \cdot 100\% = 18{,}3\%$.

El desplazamiento inicial del nudo Δ_2 correspondiente a la fuerza P_2 se halla por los alargamientos de las barras laterales bajo la acción de las tensiones σ_{fl}

$$\Delta_2 = \frac{\Delta l_{AB}}{\cos\alpha} = \frac{2{,}6 \cdot 10^8 \cdot 1{,}155}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}866} = 1{,}73 \cdot 10^{-3}\ \text{m} = 0{,}173\ \text{cm}.$$

El alargamiento posterior de las barras se produce sin el aumento de la carga. El gráfico que expresa la dependencia de la fuerza respecto del alargamiento está representado en la figura.

1.73. La armadura tiene una ligadura sobrante. Elegimos el sistema principal cortando la barra AB. Los esfuerzos en las barras del sistema principal



Para el problema 1.73

debidos a la carga dada y a las fuerzas unitarias, aplicadas en el corte, están representados en las figuras *a* y *b* respectivamente. La fuerza X_1 en la barra cortada se determina mediante la ecuación canónica $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$

$$\delta_{11} = \sum \frac{\overline{N}_1^2 l_i}{EF} = 2 \cdot \frac{25}{9} \cdot \frac{1}{EF} + 2 \cdot \frac{16}{9} \frac{0{,}8}{EF} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{0{,}6}{EF} = \frac{9{,}6}{EF},$$

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{N_i \overline{N}_i l_i}{EF} = \frac{5}{3} P \left(-\frac{5}{3}\right) \frac{1}{EF} - \frac{4}{3} P \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{0{,}8}{EF} = -\frac{4{,}2P}{EF},$$

$$N_{AB} = X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = 0{,}438P, \quad N_{AC} = \frac{5}{3} P + 0{,}438P \left(-\frac{5}{3}\right) = 0{,}935P,$$

$$N_{BD} = 0{,}438P \left(-\frac{5}{3}\right) = -0{,}73P, \quad N_{AD} = -\frac{4}{3} P + 0{,}438P \cdot \frac{4}{3} = -0{,}75P,$$

$$N_{BC} = 0{,}438P \cdot \frac{4}{3} = 0{,}585P.$$

La barra AC es la más cargada. La carga correspondiente al comienzo de la fluencia en esta barra es igual a $0{,}935P = \sigma_{fl}F = 3 \cdot 10^8 \cdot 5 \cdot 10^{-4}$. De aquí $P = 1{,}6 \cdot 10^5$ N = 160 kN.

Al alcanzar la carga el valor límite, también aparecerán tensiones de fluencia en la barra diagonal BD. En este momento en la barra AB actúa la fuerza $N_{AB} = P_{lím} - \sigma_{fl} \cdot F \cos\alpha = P_{lím} - 3 \cdot 10^8 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}6 = P_{lím} - 9 \cdot 10^4$. En

la barra BD actúa la fuerza $N_{BD} = \sigma_{fl} \cdot F = 1{,}5 \cdot 10^5$ N. Componemos la condición de equilibrio del nudo B: $P_{lim} - 9 \cdot 10^4 = 1{,}5 \cdot 10^5 \cdot 0{,}6$. De aquí la fuerza límite es igual a $P_{lim} = 180$ kN.

1.75. Resolviendo el problema estáticamente indeterminado, hallamos los esfuerzos en las barras de unión $N_{AA'} = 0{,}636P$, $N_{CC'} = 0{,}227P$, $N_{DD'} = 0{,}136P$. Cuando en las barras más cargadas AA' y CC' las tensiones alcancen el límite de fluencia, la estructura se encontrará en estado límite. Componiendo la suma de momentos de las fuerzas en estado límite respecto al punto D, hallamos

$$\sigma_{fl} F \cdot 2a + \sigma_{fl} F \cdot 4a = P_{lim} 3a; \quad P_{lim} = 2\sigma_{fl} F = 350 \text{ kN}.$$

La carga con la cual tensión en la barra más cargada alcanza el límite de elasticidad se determina mediante la relación $\frac{0{,}636 P_{elas}}{5 \cdot 10^{-4}} = 3 \cdot 10^8$; como resultado obtenemos $P_{elas} = 236$ kN.

El factor de seguridad es $n = 350/236 = 1{,}5$.

1.78. De la condición de igualdad a cero del alargamiento total de la barra hallamos la reacción en la sección inferior $R_B = 0{,}75P$. En el estado límite $R_B/F = 0{,}75 P_{lim}/F = \sigma_{fl} = 3{,}5 \cdot 10^8 \cdot P_{lim} = 467$ kN. Durante el calentamiento surgirán fuerzas de compresión adicionales X que se determinan mediante la ecuación

$$\frac{Xl}{EF} + \alpha l \, \Delta t = 0; \quad X = -\alpha \Delta t \, EF = -125 \text{ kN (compresión)}$$

Esta fuerza después de componerse en la parte inferior de la barra con la fuerza igual a $0{,}75P_{lim}$ disminuirá la carga límite

$$\frac{(0{,}75 P_{lim} + 1{,}25 \cdot 10^5)}{10 \cdot 10^{-4}} = 3{,}5 \cdot 10^8; \quad P_{lim} = 300 \text{ kN}$$

1.79. Los alargamientos de la armadura y del hormigón son iguales: $\Delta l_{ac} = \Delta l_{hor}$. Por eso $\sigma_{ac} = 10\sigma_{hor}$. Las tensiones admisibles según los datos son $[\sigma]_{ac} = \sigma_{fl}/k_{fl} = 133$ MPa, $[\sigma]_{hor} = \sigma_{fl}/k_{fl} = 8{,}3$ MPa. La tensión en el acero no debe ser mayor de $10\,[\sigma]_{hor} = 83$ MPa, que es la tensión máxima para el acero. La fuerza admisible es $[P] = [\sigma]_{hor} \cdot F_{hor} + \sigma_{máx\text{-}ac} \cdot F_{ac} = 8{,}3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-1} + 83 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-3} = 1{,}57$ MN. Si el cálculo se efectúa según las cargas admisibles, entonces la fuerza límite $P_{lim} = \sigma_{fl\text{-}hor} \cdot F_{hor} + \sigma_{fl\text{-}ac} \cdot F_{ac} = 5{,}2$ MN. Cuando $k_{fl} = 3$ la fuerza admisible $[P]_{lim} = 5{,}2/3 = 1{,}73$ MN.

1.82. La tensión en la sección transversal de la barra es $\sigma_0 = \sigma_\alpha + \sigma_\beta = 80$ MPa. De aquí la fuerza de tracción es igual a $P = \sigma_0 F = 80$ kN.

1.86. La tensión en la sección transversal es $\sigma_0 = P/F$. La tensión en la sección inclinada es

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2} \operatorname{sen} 2\alpha = \sigma_0 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha.$$

Debe cumplirse la relación $\tau_\alpha = 0{,}6\sigma_\alpha$ o $\sigma_0 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 0{,}6\sigma_0 \cos^2 \alpha$. De aquí hallamos $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}6$, $\alpha = 31°$ y calculamos σ_α y τ_α.

1.87. El ángulo formado por la dirección de la normal hacia la superficie ab y la dirección de la tensión principal σ_1 es $\alpha = 90° - \beta = 10°$;

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 10° + \sigma_2 \operatorname{sen}^2 10° = 147 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{\alpha+90°} = \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_\alpha = 53 \text{ MPa},$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \operatorname{sen} 2\alpha = 17 \text{ MPa},$$

$$\tau_{\alpha+90°} = -\tau_\alpha = -17 \text{ MPa}$$

1.88. $\sigma_\alpha = 160 \cos^2\alpha - 80 \operatorname{sen}^2\alpha = 40$ MPa. Resolviendo esta ecuación respecto a α, hallamos $\cos\alpha = \pm\sqrt{2}/2$, $\alpha = \pm 45°$;

$$\tau_\alpha = \frac{160+80}{2} \operatorname{sen}(\pm 90°) = \pm 120 \text{ MPa}.$$

1.91. $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\tau_\alpha}{\sigma_{\alpha+90°} - \sigma_\alpha} = -0{,}8$, $\alpha = -19°20'$.

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90°} \pm \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_{\alpha+90°})^2 + 4\tau_\alpha^2});$$

$$\sigma_1 = 142 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = -242 \text{ MPa}.$$

1.93. Calculamos las magnitudes y direcciones de las tensiones principales

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(60 \pm \sqrt{140^2 + 4 \cdot 50^2}) = 30 \pm 86 \text{ MPa};$$

$$\sigma_1 = 116 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = -56 \text{ MPa};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot (-50)}{-40-100} = 0{,}714; \quad \alpha = 17°45'.$$

El alargamiento máximo será en dirección de la tensión principal σ_1:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \mu\sigma_2}{E} = 6{,}5 \cdot 10^{-4}.$$

El crecimiento correspondiente de la indicación del tensómetro es $\Delta n = \varepsilon_1 sk = 6{,}5$ mm.

1.95. La fuerza que actúa sobre la cara lateral del cubo es igual a $P\sqrt{2}$. Las tensiones en las caras laterales son

$$\sigma_2 = \sigma_3 = -P\sqrt{2}/F = -5 \cdot 10^4 \sqrt{2}/10^{-4} = -7{,}07 \text{ MPa}.$$

Dos caras no tienen tensiones: $\sigma_1 = 0$.

La variación relativa del volumen es $\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \dfrac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \dfrac{1-2 \cdot 0{,}17}{0{,}2 \cdot 10^{11}}(-7{,}07 \cdot 10^6 - 7{,}07 \cdot 10^6) = -0{,}467 \cdot 10^{-3}$.

1.99. Las tensiones principales son: $\sigma_1 = 100$ MPa, $\sigma_2 = 60$ MPa, $\sigma_3 = -40$ MPa.

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 70 \text{ MPa};$$

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = 40 \text{ MPa};$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} = 58{,}9 \text{ MPa};$$

$$\varepsilon_v = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 5 \cdot 10^{-4};$$

$$U_0 = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2)] = 1{,}1 \cdot 10^5 \text{ J/m}^3;$$

$$U_f = \frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{3(1+\mu)}{2E}\tau_{oct}^2 = 10^5 \text{ J/m}^3.$$

1.101. $\sigma_e^{II}=\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)=76$ MPa $<[\sigma]_{tr}$; $\sigma_e^{III}=\sigma_1-\sigma_3=120$ MPa $=$ $=[\sigma]_{tr}$, $\sigma_e^{IV}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2}=112$ MPa $<[\sigma]_{tr}$, $\sigma_e^{V}=\sigma_1-\frac{[\sigma]_{tr}}{[\sigma]_{comp}}\sigma_3=78$ MPa $<[\sigma]_{tr}$.

1.104. Las tensiones principales en la pared del flotador son $\sigma_1=\frac{pD}{2t}=\frac{30\cdot 8\cdot 10^{-3}}{2t}=\frac{1,2}{t}$, $\sigma_2=0,5\sigma_1$; $\sigma_3=0,6/t$. De acuerdo con la cuarta teoría de resistencia obtenemos

$$\sigma_e^{IV}=\frac{1}{t}\cdot\sqrt{0,5[(1,2-0)^2+(0,6-0)^2+(1,2-0,6)^2]}=\frac{1,04}{t}\leqslant 160\text{ MPa},$$

de donde el grosor de la pared es $t=6,5\cdot 10^{-3}$ m $=6,5$ mm.

1.109. Calculamos las tensiones principales:

$$\sigma_{pr}=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y\pm\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau^2})=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\sigma-\sigma\pm\sqrt{(2\sigma+\sigma)^2+4\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2}\right)=0.5\sigma\pm 3,16\sigma;$$

$$\sigma_1=3,66\sigma;\quad \sigma_3=-2,66\sigma$$

(la tensión principal media σ_2 es igual a cero).

La condición de resistencia según la teoría de Mohr tiene la forma

$$\sigma_{c.\,v}=\sigma_1-k\sigma_3\leqslant[\sigma]_{tr};\quad k=[\sigma]_{tr}/[\sigma]_{comp}=100/250=0,4;$$
$$3,66\sigma-0,4\,(-2,66\sigma)\leqslant 100;\quad \sigma=21,2\text{ MPa}.$$

Los valores admisibles de las tensiones son: $\sigma_x=42,4$ MPa, $\sigma_y=$ $=-21,2$ MPa, $\tau_y=10.6$ MPa.

Cuando las resistencias a la tracción y a la compresión son iguales aprovechamos la tercera teoría de resistencia: cuando $[\sigma]=150$ MPa, $\sigma_e^{III}=$ $=\sigma_1-\sigma_3\leqslant[\sigma]$; $3,66\sigma-(-2,66\sigma)\leqslant 150$ MPa, $\sigma=150/6,32=23,7$ MPa.

1.111. La tensión máxima actúa en los puntos de suspensión: $T=$ $=(\pi d^2/4)[\sigma]=630$ N. La tensión en el punto inferior $H=\frac{T}{1+8f^2/l^2}$; H y f están vinculadas por la relación $H=\frac{pl^2}{8f}$, donde p es el peso de un metro de cable igual a $p=F\rho g=\frac{\pi}{4}\cdot 16\cdot 10^{-6}\cdot 8\cdot 10^3\cdot 9,8=0,985$ N/m. Resolviendo conjuntamente las ecuaciones obtenidas, hallamos f y H:

$$f=\frac{T}{2p}-\sqrt{\left(\frac{T}{2p}\right)^2-\frac{l^2}{8}}=0,5\text{ m},\quad H=\frac{0,985\cdot 50^2}{8\cdot 0,5}=615\text{ N}.$$

El valor de H se diferencia de T en un 2%. Por eso los hilos con pequeñas flechas de curvatura pueden considerarse uniformemente estirados en toda su longitud.

1.112. Considerando que el alambre está uniformemente estirado (véase la solución del problema 1.111) en toda su longitud por el esfuerzo $T=\frac{pl^2}{8f}=\frac{\rho gFl^2}{8f}$ se calcula su alargamiento $\Delta l=\frac{Tl}{EF}=\frac{pl^2}{8fEF}=\frac{\rho gl^3}{8fE}$.

La ecuación de la curva del combado es $y=\frac{px^2}{2T}=\frac{4fx^2}{l^2}$.

La longitud del alambre combado es

$$S=2\int_0^{l/2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=2\int_0^{l/2}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{8fx}{l^2}\right)^2\right]dx\approx\left(1+\frac{8f^2}{3l^2}\right)l,$$

es decir, el alargamiento $\Delta l = S - l = \frac{8f^2}{3l}$. Igualando ambas expresiones de Δl determinamos la flecha del combado $f = \frac{l}{4}\sqrt[3]{\frac{3\rho g l^2}{E}} = 0{,}361$ m. La tensión en el alambre es $\sigma = \frac{T}{F} = \frac{\rho g l^2}{8f} = 430$ MPa.

1.114. Puesto que la curva de combadura es una parábola $y = kx^2$ con el vértice en el punto C, entre las coordenadas de los puntos A y B existe la dependencia siguiente $a^2/b^2 = h_A/h_B = 2/20 = 0{,}1$; $a = b\sqrt{0{,}1} = 0{,}316b$; $a + b = 1{,}316b = 50$ m; $b = 38$ m; $a = 12$ m. El empuje $H = p(2a)^2/(8h_A) = 432$ N.

1.120. Durante el enfriamiento sobre la superficie de contacto de los cilindros surge una presión p. El cilindro de acero se estira por la fuerza $N_{ac} = pD/2$ y el de cobre se comprime por la misma fuerza $N_{cob} = N_{ac} = pD/2$. La variación de los diámetros de los cilindros debe ser igual. La condición de reciprocidad de deformaciones es

$$\alpha_{ac}\Delta t D = \frac{pD}{2}\left[\frac{D}{E_{ac}F_{ac}} + \frac{D}{E_{cob}F_{cob}}\right].$$

De aquí hallamos la presión entre los cilindros

$$p = \frac{2\alpha_{ac}\Delta t E_{ac}E_{cob}F_{ac}F_{cob}}{D(E_{ac}F_{ac} + E_{cob}F_{cob})} = \frac{2\cdot 1{,}25\cdot 10^{-5}\cdot 45\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 10^{11}\cdot 1\cdot 10^{-3}\cdot 4\cdot 10^{-3}}{0{,}1\,(2\cdot 10^{11}\cdot 1\cdot 10^{-3} + 10^{11}\cdot 4\cdot 10^{-3})} =$$

$= 1{,}5$ MPa.

1.122. El diámetro de la superficie de encaje es $D = 60 + 2\cdot 8 = 76$ mm. El calentamiento de la camisa debe aumentar su diámetro en 0,05 mm $= 5\cdot 10^{-5}$ m para que se pueda efectuar el ajuste:

$$\alpha_{ac}\,\Delta t D = 1{,}25\cdot 10^{-5}\cdot \Delta t\cdot 7{,}6\cdot 10^{-2} = 5\cdot 10^{-5}, \quad \Delta t = 52{,}5 \text{ K}.$$

Después del enfriamiento se efectuará una deformación elástica del casquillo y de la camisa bajo la influencia de la presión mutua. La presión p se halla de la condición de igualdad de la suma de las deformaciones radiales de los cilindros a la magnitud de la apretura:

$$\frac{7{,}6\cdot 10^{-2}p}{2\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^{11}} + \frac{7{,}6\cdot 10^{-2}p}{2\cdot 8\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}1\cdot 10^{11}} = \frac{5\cdot 10^{-5}}{7{,}6\cdot 10^{-2}};$$

de aquí $p = 2{,}8$ MPa. Las tensiones en los cilindros son:

$$\sigma_{ac} = \frac{pD}{2h_{ac}} = 108 \text{ MPa}, \quad \sigma_{cob} = -\frac{pD}{2h_{cob}} = -13{,}3 \text{ MPa}.$$

1.125. Las tensiones en las secciones horizontales de la parte cilíndrica del vaso son constantes

$$\sigma_z = \frac{\rho g R}{2h}\left(H - \frac{R}{3}\right) = \frac{10^3\cdot 9{,}8\cdot 2}{2\cdot 10^{-3}}\left(6 - \frac{2}{3}\right) = 5{,}22 \text{ MPa}.$$

Las tensiones en las secciones meridianas son: en la parte superior del cilindro $\sigma_1 = pR/h = 0$, porque $p = 0$, en el lugar de unión del cilindro con la esfera

$$\sigma_1 = pR/h = \rho g(H - R)R/h = 7{,}84 \text{ MPa}.$$

En la parte esférica las tensiones máximas están en el punto inferior $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\rho g H R}{2h} = 5{,}88$ MPa.

1.129. La tensión en la sección con la coordenada x se expresa así: $p_x = p_a + (p_b - p_a)(x - a)/(b - a)$. Los radios de las secciones extremas del

tubo son R_a y R_b, el radio de la sección x es más cómodo expresarlo a través del ángulo de inclinación de la generatriz del cono:

$$R_a = a \operatorname{tg} \alpha, \quad R_b = b \operatorname{tg} \alpha, \quad R_x = x \operatorname{tg} \alpha.$$

Componemos la ecuación de equilibrio de la parte cortada del tubo $\sigma_2 h \cdot 2\pi R_x \cos \alpha = \int_a^x p_x \cdot 2\pi R_x \operatorname{sen} \alpha \, ds$, donde $ds = \dfrac{dx}{\cos \alpha}$. Después de efectuar la integración hallamos la tensión longitudinal

$$\sigma_2 = \frac{x \operatorname{tg} \alpha}{6 (b-a) x h \cos \alpha} \{p_a [3 (x^2 - a^2) b - 2 (x^3 - a^3)] + p_b (2x^3 - 3ax^2 + a^3)\}.$$

Las tensiones principales meridianas σ_1 se hallan mediante la ecuación de Laplace teniendo en cuenta que los radios de curvatura principales del tubo

$$\rho_1 = \frac{R_x}{\cos \alpha} = \frac{x \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \text{ y } \rho_2 = \infty:$$

$$\sigma_1 = \frac{p_x \rho_1}{h} = \frac{x \operatorname{tg} \alpha}{(b-a) h \cos \alpha} [p_a (b-x) + p_b (x-a)].$$

1.131. Examinando el equilibrio de la parte izquierda de la barra cortada a una distancia x del extremo A obtenemos la siguiente expresión de la fuerza longitudinal:

$$N(x) = P - \int_0^x q(x)\, dx = ql \left[\xi_0 - \int_0^x \ln \left(1 + \frac{x}{l} + \operatorname{sen} \frac{x}{l}\right) dx\right].$$

Para las transformaciones sucesivas es más cómodo introducir la coordenada adimensional $t = x/l$. En este caso la fuerza longitudinal se determina por la expresión

$$N(t) = ql [\xi_0 - C(t)],$$

donde está introducida la designación

$$C(t) = \int_0^t \ln (1 + t + \operatorname{sen} t)\, dt.$$

En idioma algorítmico fortrán la expresión para la fuerza longitudinal se escribirá como FORCE = FØ* (XI — C) con el uso del operador de adjudicación.

Aquí FORCE es el identificador de la fuerza longitudinal N, FØ es el identificador del producto ql, XI es el identificador ξ.

Calculamos los valores de la fuerza longitudinal en las secciones distantes entre sí a $0{,}1l$, es decir, cuando el paso es igual a $t = 0{,}1$.

Abajo se da una variante de programa posible.

```
      PROGRAM␣BRUSI
      EXTERNAL␣FUNI
      READ(5,1Ø1)XI,Q,AL
1Ø1␣FORMAT(3E11.3)
      FØ=Q*AL
      DO␣5␣I = 1,11
      B = (I — 1)/1Ø.
      CALL␣GAM(FUNI,Ø.,B,Ø.Ø1,C)
      FORCE = FØ*(XI — C)
 5␣WRITE(6,1Ø1) FORCE
```

```
      STOP
      END
      SUBROUTINE ␣ GAM (XXX,A,B,EPS,T)
      (subprograma estándar)
      RETURN
      END
      FUNCTION␣FUNI (T)
      FUN1 = ALOG (1. + T + SIN (T))
      RETURN
      END
```

En el programa han sido usadas las designaciones:

EXTERNAL es el operador de subprogramas exteriores,
READ es el operador de salida,
FORMAT es el operador de formato de la introducción y salida de los datos,
DO es el operador de ciclo,
CALL es el operador de llamada del subprograma GAM,
WRITE es el operador de salida de los resultados a la impresión.

El subprograma estándar SUBROUTINE llamado GAM permite calcular la integral definida $C(t)$ según el método modificado de Gauss con la exactitud relativa dada EPS.

El subprograma FUNCTION, llamado FUNI, formula la función subintegral $\ln(1+t+\text{sen}\,t)$ necesaria para el trabajo del subprograma SUBROUTINE␣ GAM. El último no debe ser anotado en el programa, puesto que se encuentra en el banco de subprogramas estándar.

Los datos obtenidos en la impresión se utilizan para construir el gráfico de variación de la fuerza longitudinal N a lo largo de la barra.

1.135. Deshaciéndonos del empotramiento izquierdo A sustituimos su acción por una fuerza incógnita R que se halla de la igualdad a cero del desplazamiento de la sección A:

$$\Delta_A = R\delta_R - \Delta_Q = 0;$$

de aquí $R = \Delta_q/\delta_R$.

En este caso el desplazamiento Δ_q del extremo liberado A de la barra bajo la acción de la carga q se halla por la fórmula

$$\Delta_q = \int_0^l \frac{N_q(x)}{EF(x)}\,dx = \frac{4q}{\pi E d_0^2}\int_0^l \frac{x\,dx}{\left[1+\left(\frac{x}{l}\right)^{5/7}\right]^2}$$

o después de pasar a la coordenada adimensional $t = x/l$,

$$\Delta_q = \frac{4ql^2}{\pi E d_0^2}\int_0^1 \frac{t\,dt}{(1+t^{5/7})^2}.$$

Definitivamente $\Delta_q = \frac{4ql^2}{\pi E d_0^2} C_q$, donde $C_q = \int_0^1 \frac{t\,dt}{(1+t^{5/7})^2}$. De esta manera la expresión de Δ_q puede ser escrita en lengua fortrán en forma de operador de adjudicación

```
DQ = 4 * Q * AL ** 2/(3.1416 * E * D ** 2) * CQ,
```

donde CQ es el identificador de la integral C_q.

El desplazamiento del extremo de la barra bajo la acción de la fuerza unitaria aplicada en la sección liberada A es

$$\delta_R = \frac{4l}{\pi E d_0^2} \int_0^l \frac{dx}{\left[1+\left(\frac{x}{l}\right)^{5/7}\right]^2}.$$

Al introducir la coordenada adimensional obtenemos

$$\delta_R = \frac{4l}{\pi E d_0^2} C_R, \quad \text{donde} \quad C_R = \int_0^l \frac{dt}{(1+t^{5/7})^2}.$$

El desplazamiento δ_R se introduce en el programa en forma de operador de adjudicación

```
DR=4 * AL/(3.1416 * E * D ** 2) * CR.
```

La reacción incógnita $R = \Delta_Q/\delta_R$ se escribe en la lengua algorítmica fortrán en la siguiente forma de operador de adjudicación:

```
R=DQ/DR.
```

La posible variante del programa de determinación de la reacción se da a continuación.

```
      PROGRAM␣BRUS 14
      EXTERNAL␣FUN 14, FUN 14A
      READ(5,114)Q,AL,E,D
      CALL␣GAM(FUN 14,Ø.,1.,Ø.Ø1,CQ)
      DQ=4* Q* AL** 2/(3.1416*E*D**2)*CQ
      CALL␣GAM(FUN 14A,Ø.,1.,Ø.Ø1,CR)
      DR=4*AL/(3.1416*E*D**2)*CR
      R=DQ/DR
      WRITE(6,114)Q,AL,E,D,CQ,CR,R
114␣FORMAT(7E 1Ø.3)
      STOP
      END
      SUBROUTINE␣GAM(XXX,A,B,EPS,T)
      (subprograma estándar)
      RETURN
      END
      FUNCTION␣FUN 14(T)
      FUN14=T/(1.+T**5./7.)) ** 2
      RETURN
      END
      FUNCTION␣FUN14A(T)
      FUN 14A=1./(1.+T**(5./7.))**2
      RETURN
      END
```

CAPITULO 2

CIZALLAMIENTO Y TORSIÓN

2.2. Si $\sigma_2 = -\sigma_1$, tiene lugar cizallamiento puro con tensiones tangenciales $\tau = \sigma_1 = 120$ MPa.

El módulo de cizallamiento es $G = E/[2(1+\mu)] = 8 \cdot 10^4$ MPa. El desplazamiento relativo es $\gamma = \tau/G = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ rad $= 5{,}2'$.

2.3. $\varepsilon_1 = \sigma/E = 1{,}5 \cdot 10^6/E = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$, de aquí $E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa. La deformación relativa es $\varepsilon_2 = \mu\varepsilon_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$; de aquí $\mu = 0{,}333$, $G = E/[2(1+\mu)] = 7{,}5 \cdot 10^4$ MPa.

2.5. La carga P que actúa sobre la barra BC se equilibra por las tensiones tangenciales τ que se transmiten desde una lámina que trabaja a cizallamiento puro: $P = \tau F = \tau hl$, donde $F = hl$ es el área de la sección de la lámina, l es la altura de la lámina (la longitud de la barra BC),

$$\tau = \frac{2{,}5 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}25} = 5 \cdot 10^7 \text{ Pa} = 50 \text{ MPa}, \quad G = \frac{7 \cdot 10^{10}}{2(1+0{,}34)} = 2{,}6 \cdot 10^{10} \text{ Pa} = 2{,}6 \cdot 10^4 \text{ MPa},$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = 1{,}92 \cdot 10^{-3} \text{ rad}, \quad \Delta_C = \gamma l = 4{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0{,}48 \text{ mm}.$$

Las tensiones principales son: $\sigma_1 = \tau = 50$ MPa, $\sigma_2 = -\tau = -50$ MPa. Los alargamientos de las diagonales son: $\Delta l_{AC} = \varepsilon_1 l_{AC} = \frac{l_{AC}}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2) = 0{,}338$ mm, $\Delta l_{BD} = -0{,}338$ mm.

2.8. La fuerza con la cual la pieza presiona sobre la chaveta es $P = \frac{M}{(d/2)}$. De la condición de resistencia a cizallamiento de la chaveta el valor admisible de la fuerza es igual a $[P] = [\tau]\, bl = 2{,}4 \cdot 10^4$ N $= 24$ kN. Según la condición de resistencia al aplastamiento $[P] = [\sigma]_{ap}\left(\frac{h}{2}\right) l = 24$ kN. La chaveta posee una misma resistencia a cizallamiento y al aplastamiento. El momento admisible es $[M] = [P]\, d/2 = 0{,}6$ kN·m.

2.10. El gorrón se corta en dos secciones, cuya área total es $F_{ciz} = 2(\pi/4)\, d^2 = 6{,}28 \cdot 10^{-4}$ m^2. La fuerza admisible para el cálculo a cizallamiento es igual a $P = [\tau]_{ciz} \cdot F_{ciz} = 5 \cdot 10^4$ N $= 50$ kN.

La superficie de aplastamiento es igual tanto para el grillete, como para los dos ojales $F_{ap} = 2bd = 3{,}2$ cm^2. Para el material de las piezas la tensión admisible de aplastamiento es menor que para el material del gorrón. Por eso, partiendo de la condición de resistencia al aplastamiento de las piezas, obtenemos $P = [\sigma]_{ap} F_{ap} = 57{,}6$ kN. Lo determinativo es el cizallamiento. La fuerza admisible es $[P] = 50$ kN.

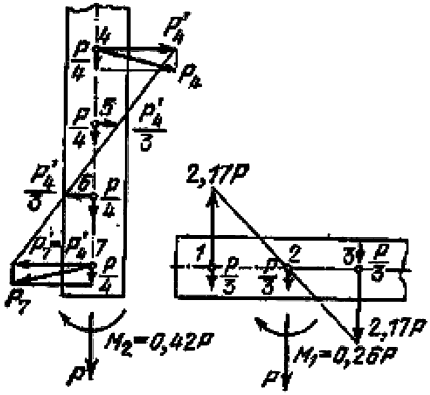
2.12. Los remaches son de dos cortes; el área de corte de cada remache es $F_{ciz} = 2 \cdot \pi d^2/4 = 2{,}51 \cdot 10^{-4}$ m. Las áreas de aplastamiento de la plancha de unión y de los dos angulares son iguales: $F_{ap} = 2h_1 d = h_2 d = 8 \cdot 10^{-4}$ m^2.

De las condiciones de resistencia a cizallamiento y al aplastamiento hallamos el número de remaches:

$$n = \frac{P}{[\tau] F_{ciz}} = \frac{2{,}2 \cdot 10^4}{10^8 \cdot 2{,}51 \cdot 10^{-4}} = 8{,}75, \quad n = \frac{P}{[\sigma]_{ap} F_{ap}} =$$

$$= \frac{2{,}2 \cdot 10^4}{2{,}8 \cdot 10^8 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} = 9{,}82.$$

Elegimos el número entero mayor $n = 10$ remaches (5 remaches en cada hilera).



Para el problema 2.15

2.13. Determinamos la fuerza P a partir de la condición de resistencia de las hojas a la rotura en las secciones de la primera y la segunda hileras de remaches: $P_1 = [\sigma]_{tr} (b - 2d) h = 422$ kN, $0{,}75P_2 = [\sigma]_{tr} \times (b - 4d) h$ (tenemos en cuenta que la primera hilera de remaches percibe $0{,}25P_2$). Hallamos $P_2 = 435$ kN.

A partir de la condición de resistencia a cizallamiento de los remaches determinamos que $P_2 = 312$ kN. De la condición de resistencia al aplastamiento hallamos $P_4 = 770$ kN. Como fuerza admisible tomamos la menor $P = 312$ kN. La resistencia de las hojas en la unión está reducida en $(2d/b)\,100\% = 18{,}5\%$.

2.15. Pasamos la fuerza P al centro del remache 2 añadiendo el momento $M_1 = 0{,}26P$. La fuerza se distribuirá uniformemente entre tres remaches. El momento cargará los dos remaches extremos con las fuerzas $M_1/0{,}12 = 2{,}17P$. En la figura se ve que la fuerza mayor (total) está aplicada al remache 3:

$$P_3 = 0{,}33P + 2{,}17P = 2{,}5P = 45 \text{ kN}.$$

De la condición de resistencia del remache a cizallamiento (unión de doble corte) obtenemos

$$d = \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}5 \cdot 10^4}{\pi \cdot 8 \cdot 10^7}} = 1{,}9 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 19 \text{ mm}.$$

La condición de resistencia al aplastamiento nos da la siguiente magnitud del diámetro:

$$d = 4{,}5 \cdot 10^4 / (2{,}5 \cdot 10^8 \cdot 10^{-2}) = 1{,}8 \cdot 10^{-2} = 18 \text{ mm}.$$

Determinamos cuál de los remaches está más cargado en la hilera vertical. Después de pasar la fuerza a la línea de disposición de los remaches surge un momento adicional $M_2 = 0{,}42P = 0{,}42 \cdot 18 = 7{,}56$ kN·m. Este momento se equilibra por pares de fuerzas horizontales que surgen en los remaches. Las magnitudes de las fuerzas son proporcionales a la distancia entre el remache y el centro de la unión. Teniéndolo en cuenta, obtendremos

$$P_4' \cdot 0{,}18 + (1/3)\, P_4' \cdot 0{,}06 = 7{,}56 \cdot 10^3,$$

de donde $P_4' = P_5' = 37{,}8$ kN.

Los esfuerzos en los remaches 5 y 6 serán tres veces menor.

La fuerza P se distribuirá uniformemente entre los remaches y cargará cada uno de ellos con una componente vertical $P/4 = 4{,}5$ kN. Teniendo en cuenta

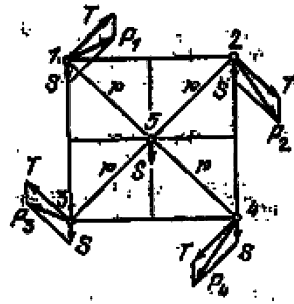
la presencia de componentes horizontales debidas al momento, hallamos la fuerza resultante aplicada a los remaches *4* y *7* más cargados:

$$P_4 = P_7 = \sqrt{37{,}8^2 + 4{,}5^2} = 38 \text{ kN},$$

Esta fuerza es menor que la fuerza que actúa sobre el remache *8* en la hilera horizontal. Por eso el diámetro del remache, que asegura la resistencia de toda la unión, es igual a 19 mm.

2.17. Después de pasar la fuerza al centro de la disposición de remaches se determina el momento $M = 0{,}12P$. La fuerza se distribuye uniformemente entre los remaches y da componentes verticales iguales a $S = 0{,}2P$.

El momento carga los remaches con las fuerzas T perpendiculares a los radios $r = 4 \cdot 10^{-2} \times \sqrt{2} = 5{,}66 \cdot 10^{-2}$ m (véase la figura) que unen los centros de los remaches periféricos con el remache central



Para el problema 2.17

$$M = 4Tr, \qquad T = M/(4r) = 0{,}53P.$$

Mediante el teorema de los cosenos calculamos la suma geométrica de las fuerzas T y S para los remaches *2* y *4* más cargados

$$P_2 = P_4 = \sqrt{T^2 + S^2 + 2TS\cos 45^\circ} = 6{,}85 \text{ kN}.$$

Después de quitar el remache central la fuerza S aumentará hasta $0{,}25P$. La fuerza T no variará. La fuerza sobre los remaches más cargados será

$$P_3 = P_6 = \sqrt{(0{,}53P)^2 + (0{,}25P)^2 + 2 \cdot 0{,}53 \cdot 0.25 \cdot 0{,}707P^2} = 0{,}728P = 7{,}28 \text{ kN}.$$

Como resultado el factor de seguridad de la unión disminuirá en 7,28/6,85 = = 1,06 vez (en un 6%).

2.18. Pasar la fuerza a la recta que une los centros de los remaches, añadiendo el momento $M = P \cdot e$; descomponer la fuerza y el momento entre los remaches tal como ha sido hecho en el problema 2.16.

2.19. La condición de resistencia del cordón en soldadura a tope nos da

$$\frac{10^5}{10^{-2} l_{cor}} \leqslant 10^8; \quad l_{cor} \geqslant 10^{-1} \text{ m} = 10 \text{ cm}.$$

El ancho de la banda debe ser mayor en 1 cm para compensar la soldadura incompleta posible del cordón: $b = 10 + 1 = 11$ cm.

La banda de esta anchura soporta sin riesgo la fuerza $P_1 = [\sigma]_{tr} b h = = 154$ kN. El porcentaje de aprovechamiento del material de la banda es igual a $\frac{100}{154} \cdot 100\% = 65\%$.

2.24. El esfuerzo de cálculo en el angular es igual a $P = 1{,}6 \cdot 10^8 \cdot 15{,}1 \cdot 10^{-4} = = 2{,}42 \cdot 10^5$ N = 242 kN. Determinamos la longitud sumaria de los cordones l_{cor} suponiendo que el grosor del cordón es igual a 8 mm:

$$2{,}42 \cdot 10^5/(0{,}7 \cdot 8 \cdot 10^{-3} l_{cor}) \leqslant 9 \cdot 10^7, \quad l_{cor} = 48 \text{ cm}.$$

El ancho de ala del angular es $b = 8$ cm, por consiguiente, la longitud de trabajo del cordón frontal es $l_{fr} = 8 - 1 = 7$ cm. Para los cordones laterales queda $l_{lat} = l_{cor} - l_{fr} = 41$ cm. La longitud de los cordones laterales debe ser inversamente proporcional a sus distancias hasta el eje del angular

$$l_1 : l_2 = e_1 : e_2 = 5{,}65/2{,}35 = 2{,}4.$$

Las longitudes de cálculo de los cordones son $l_1 = 29$ cm, $l_2 = 12$ cm; a estas longitudes hay que añadirles 1 cm para compensar la soldadura incompleta. Entonces, $l_1 = 30$ cm, $l_2 = 13$ cm.

2.27. El alargamiento relativo es $\varepsilon = \Delta n/(ks) = 0{,}6 \cdot 10^{-3}$. Durante la torsión $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = -\tau$, por eso

$$\varepsilon = (\sigma_1 - \mu\sigma_2)/E = \tau(1+\mu)/E = 0{,}6 \cdot 10^{-3}.$$

De aquí $\tau = 0{,}6 \cdot 10^{-3} E/(1+\mu) = 1{,}2 \cdot 10^{-3} G$. Por otro lado $\tau = M/W_{tr} = 16 \cdot 9 \cdot 10^3/[\pi \cdot 1{,}2^3 \cdot 10^{-3}(1 - 0{,}67^4)] = 3{,}3 \cdot 10^7$ Pa $= 33$ MPa.

Obtenemos que $G = 2{,}75 \cdot 10^4$ MPa. El ángulo de torsión es

$$\Delta\varphi = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 32}{2{,}75 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot 1{,}2^4 \cdot 10^{-4}(1 - 0{,}67^4)} = 2{,}01 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 1°10'.$$

2.29. Calculamos las tensiones tangenciales (véase la solución del problema 2.27)

$$\tau = \varepsilon E/(1+\mu) = 52{,}3 \text{ MPa}.$$

Luego $G = E/[2(1+\mu)] = 7{,}7 \cdot 10^4$ MPa.

$$J_{tr} = \frac{\pi}{32} D^4 (1 - \alpha^4) = 2{,}75 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4,$$

$$W_{tr} = 2J_{tr}/D = 6{,}88 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3.$$

En la superficie del árbol $\tau = M_{tor}/W_{tr}$, de aquí $M_{tor} = 3{,}6$ kN·m. La potencia $N = M_{tor}\omega = \pi n M_{tor}/30 = 188$ kW.

El ángulo de torsión del árbol es

$$\varphi = \frac{M_{tor} l}{G J_{tr}} = 1{,}02 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 35'.$$

2.30. Según la condición de resistencia

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 M_{tor}}{\pi[\tau]}} = 0{,}4 \cdot 10^{-2} \sqrt[3]{M_{tor}} \text{ m},$$

Según la condición de rigidez

$$D = \sqrt[4]{\frac{32 M_{tor}}{\pi G[\varphi']}} = 1{,}1 \cdot 10^{-2} \sqrt[4]{M_{tor}} \text{ m}.$$

Igualando las expresiones obtenidas del diámetro del árbol hallamos que $M_{tor} = 1{,}85 \cdot 10^5$ N·m. En este caso el diámetro del árbol es igual a $D = 0{,}4 \times 10^{-2} \sqrt[3]{1{,}85 \cdot 10^5} = 0{,}228$ m $= 22{,}8$ cm.

2.33. Sumando sucesivamente los momentos aplicados a un lado de la sección sucesiva del árbol construimos el diagrama de momentos torsores (véase la figura). A partir del momento mayor calculamos el diámetro del árbol, basándonos en la condición de resistencia

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 M_{tor}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 9 \cdot 10^3}{\pi \cdot 5 \cdot 10^7}} = 0{,}097 \text{ m} = 9{,}7 \text{ cm}.$$

Las tensiones tangenciales en la superficie del árbol son $\tau_{máx} = M_{tor}/W_{tr}$ donde $W_{tr} = \pi D^3/16 = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ m^3.

En la figura está mostrada la variación de $\tau_{máx}$ a lo largo del eje del árbol y la variación de τ por el radio del árbol en tres secciones $A-A$, $B-B$, $C-C$. El ángulo de torsión relativo del árbol es $\varphi' = M_{tor}/(GJ_{tr})$. El diagrama de los ángulos de giro de las secciones $\varphi = M_{tor}/(GJ_{tr})$ puede ser construido mediante la integración sucesiva de la función φ', a partir de la sección fija.

2.35. Determinamos los diámetros de los árboles. Para el árbol de acero

$$D_{ac}=\sqrt[3]{\frac{16\cdot 10^3}{\pi\cdot 8\cdot 10^7}}=4\cdot 10^{-2}\ \text{m}=4\ \text{cm},\quad J_{tr.ac}=\frac{\pi\cdot 4^4}{32}=25{,}1\ \text{cm}^4,$$

Para el árbol de aluminio

$$D_{al}=\sqrt[3]{\frac{16\cdot 10^3}{\pi\cdot 5\cdot 10^7}}=4{,}67\cdot 10^{-2}\ \text{m}=4{,}67\ \text{cm},\quad J_{tr.al}=\frac{\pi\cdot 4{,}67^4}{32}=46{,}9\ \text{cm}^4.$$

La relación de los ángulos de torsión es

$$\frac{\varphi_{al}}{\varphi_{ac}}=\frac{G_{ac}\cdot J_{tr.ac}}{G_{al}\cdot J_{tr.al}}=1{,}43.$$

La relación de las masas es

$$\frac{m_{ac}}{m_{al}}=\frac{D_{ac}^2\rho_{ac}}{D_{al}^2\rho_{al}}=2{,}22.$$

2.39. El problema se resuelve análogamente al problema 2.33. El módulo resistente a la torsión del árbol hueco es $W_{tor}=\pi D^3(1-\alpha^4)/16$. Según la condición de resistencia el diámetro del árbol es

$$D=\sqrt[3]{\frac{16M_{tor}}{\pi(1-\alpha^4)[\tau]}}$$

y según la condición de rigidez es $D=\sqrt[4]{\frac{32M_{tor}}{\pi(1-\alpha^4)[\varphi']}}$, $[\varphi']$ debe ser expresado en radianes por metro.

2.40. Al construir el diagrama de momentos torsores M_{tor} hallamos los diámetros de los tramos del árbol de acuerdo con la condición de resistencia

$$D_1=\sqrt[3]{\frac{16\cdot 2\cdot 10^3}{\pi\cdot 4\cdot 10^7}}=6{,}35\cdot 10^{-2}\ \text{m},$$

$$D_2=\sqrt[3]{\frac{16\cdot 1{,}2\cdot 10^3}{\pi\cdot 4\cdot 10^7}}=1{,}15\cdot 10^{-1}\ \text{m},$$

$$D_3=\sqrt[3]{\frac{16\cdot 8\cdot 10^3}{\pi\cdot 4\cdot 10^7}}=0{,}1\ \text{m}.$$

Los momentos polares de inercia correspondientes a estos diámetros son iguales a

$$J_{tr.1}=\pi\cdot 6{,}35^4\cdot 10^{-8}/32=1{,}6\cdot 10^{-6}\ \text{m}^4,$$

$$J_{tr.2}=\pi\cdot 1{,}15^4\cdot 10^{-4}/32=1{,}72\cdot 10^{-6}\ \text{m}^4,$$

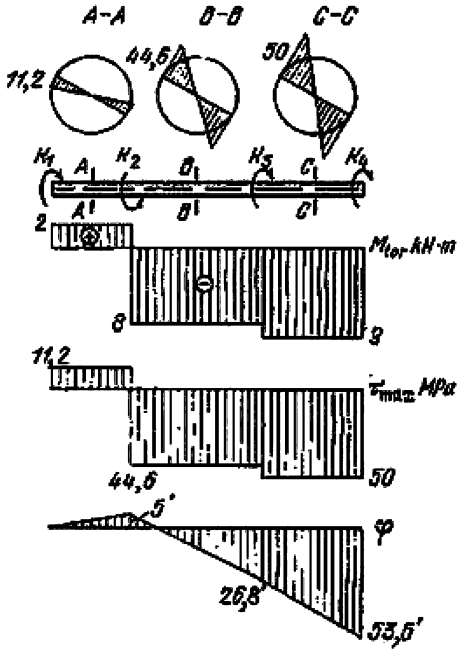
$$J_{tr.3}=\pi\cdot 0{,}1^4/32=9{,}8\cdot 10^{-6}\ \text{m}^4.$$

Luego calculamos $\varphi'=M_{tor}/(GJ_p)$ para cada tramo del árbol. El diagrama está representado en la figura. El diagrama de los ángulos φ de giro de las secciones del árbol se obtiene mediante la integración del diagrama φ' a partir del extremo fijo.

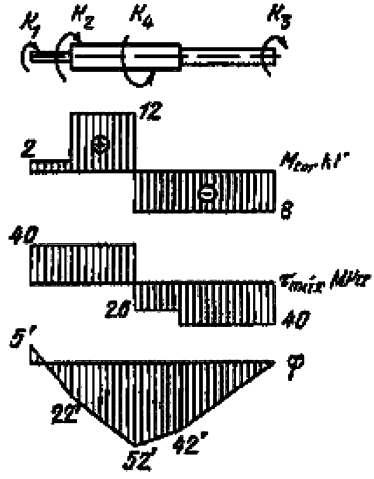
2.41. Retiramos el empotramiento en B y sustituimos su acción por el momento incógnito M_B. El ángulo de torsión sumario del árbol debe ser igual a cero:

$$\frac{K_1 \cdot a}{GJ_{tr}} - \frac{K_2 \cdot (a+b)}{GJ_{tr}} + \frac{M_B (a+b+c)}{GJ_{tr}} = 0.$$

De aquí hallamos $M_B = 220$ N·m, $M_A = 400 + 220 - 600 = 20$ N·m. Después de construir el diagrama M_{tor} determinamos el momento torsor máximo $M_{máx} = 380$ N·m.



Para el problema 2.33



Para el problema 2.40

Según la condición de resistencia $D = 3{,}62$ cm. Según la condición de rigidez $D = 5{,}75$ cm. Elegimos la magnitud mayor del diámetro.

2.42. Calculamos los momentos polares de inercia de las secciones del árbol: $J_{tr1} = \pi \cdot 4^4 \cdot 10^{-8}/32 = 2{,}51 \cdot 10^{-7}$ m^4, $J_{tr2} = \pi \cdot 5^4 \cdot 10^{-8}/32 = 6{,}14 \cdot 10^{-7}$ m^4.

Retiramos el empotramiento izquierdo y lo sustituimos por un momento de reacción incógnito M_A; componemos la condición de igualdad a cero del ángulo de torsión total del árbol:

$$\frac{M_A \cdot 1{,}2}{G \cdot 2{,}51 \cdot 10^{-7}} + \frac{M_A \cdot 0{,}4}{G \cdot 6{,}14 \cdot 10^{-7}} - \frac{10^4 \cdot 0{,}4}{G \cdot 6{,}14 \cdot 10^{-7}} = 0.$$

De aquí $M_A = 0{,}12 \cdot 10^4$ N·m $= 12$ kN·m.

El ángulo de giro máximo se da en la sección donde está aplicado el momento dado

$$\varphi_{máx} = \frac{1{,}2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 2{,}51 \cdot 10^{-7}} = 0{,}072 \text{ rad} = 4{,}1°.$$

2.43. Al resolver el problema es necesario examinar tres tramos de longitudes 0,4 m; 0,2 m y 0,8 m.

Calculamos los momentos de inercia polares de las secciones del árbol: $J_{p1} = J_{p2} = \pi \cdot 0{,}2^4/32 = 1{,}57 \cdot 10^{-4}$ m^4, $J_{p3} = \pi \cdot 1{,}5^4 \cdot 10^{-4}\,(1 - 0{,}8^4)/32 = 2{,}93 \cdot 10^{-5}$ m^4.

Retiramos el empotramiento derecho y para determinar el momento M_B componemos la ecuación de igualdad a cero del ángulo de torsión total del árbol:

$$\frac{M_B \cdot 0{,}6}{G \cdot 1{,}57 \cdot 10^{-4}} + \frac{M_B \cdot 0{,}8}{G \cdot 2{,}93 \cdot 10^{-5}} - \frac{1{,}5 \cdot 10^5 \cdot 0{,}4}{G \cdot 1{,}57 \cdot 10^{-4}} = 0,$$

de aquí $M_B = 1{,}23 \cdot 10^{-4}$ N·m $= 12{,}3$ kN·m.

Construimos el diagrama de momentos torsores y calculamos las tensiones tangenciales máximas en los tramos del árbol. Junto al empotramiento izquierdo $\tau_{máx,\,1} = \dfrac{137{,}7 \cdot 10^3 \cdot 0{,}1}{1{,}57 \cdot 10^{-4}} = 87{,}7$ MPa y junto al empotramiento derecho

$$\tau_{máx,\,2} = \frac{12{,}3 \cdot 10^3 \cdot 0{,}075}{2{,}93 \cdot 10^{-5}} = 31{,}5 \text{ MPa}.$$

2.44. Según la condición de reciprocidad de las deformaciones el momento en el empotramiento izquierdo es igual a

$$M_A = \frac{K_1 (a + l_2) + K_2 l_2}{l_1 + l_2 + a}.$$

De la condición de equilibrio hallamos el momento de reacción en el empotramiento derecho

$$M_B = \frac{K_1 l_1 + K_2 (a + l_1)}{l_1 + l_2 + a}.$$

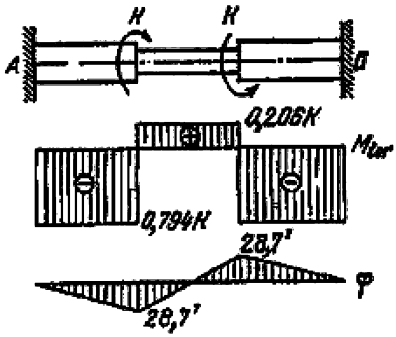
Igualando estos momentos hallamos la relación K_1/K_2 (véase la respuesta).

2.46. Escribimos la condición de igualdad de las tensiones tangenciales en las partes derecha e izquierda del árbol: $16M_A/(\pi \cdot 7^3) = 16M_B/(\pi \cdot 5^3)$; tenemos $M_A = 2{,}74M_B$. Basándonos también en la condición de equilibrio $M_A + M_B = K$, de aquí hallamos $M_A = 0{,}733K$, $M_B = 0{,}267K$. El momento exterior K debe estar aplicado a una distancia x tal del empotramiento izquierdo que el ángulo de torsión sumario del árbol sea igual a cero:

$$\frac{0{,}733K \cdot x \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot 7^4} - \frac{0{,}267K\,(1{,}5 - x)\,32}{G \cdot \pi \cdot 7^4} - \frac{0{,}267K \cdot 1 \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot 5^4} = 0.$$

De aquí $x = 1{,}43$ cm. El valor admisible del momento se halla de la condición de resistencia

$$\frac{0{,}733K \cdot 16}{\pi \cdot 7^3 \cdot 10^{-6}} \leqslant 6 \cdot 10^7, \quad K = 5{,}5 \text{ kN·m}.$$



Para el problema 2.49

2.49. Calculamos los momentos de inercia polares y los módulos resistentes de las secciones del árbol:

$$J_{tr1} = \pi \cdot 10^{-4}/32 = 0{,}982 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4, \quad W_{tr,\,1} = 0{,}196 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3,$$

$$J_{tr2} = \pi \cdot 0{,}6^4 \cdot 10^{-4}/32 = 0{,}127 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4, \quad W_{tr,\,2} = 0{,}424 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3.$$

Retiramos el empotramiento izquierdo, sustituimos su acción por un momento incógnito M_A e igualamos a cero la expresión del ángulo de torsión total del árbol;

$$\frac{M_A \cdot 0{,}5}{G \cdot 0{,}982 \cdot 10^{-8}} + \frac{M_A \cdot 0{,}5}{G \cdot 0{,}127 \cdot 10^{-8}} - \frac{K \cdot 0{,}5}{G \cdot 0{,}127 \cdot 10^{-8}} -$$

$$- \frac{K \cdot 0{,}5}{G \cdot 0{,}982 \cdot 10^{-8}} + \frac{K \cdot 0{,}5}{G \cdot 0{,}982 \cdot 10^{-8}} = 0.$$

Obtendremos $M_A = 0{,}794K$. Mediante la ecuación de equilibrio del árbol hallamos $M_B = -0{,}794K$. Construimos el diagrama de momentos torsores (véase la figura) y componemos las condiciones de resistencia de los tramos del árbol:

$$\frac{0{,}794K}{0{,}196 \cdot 10^{-3}} \leqslant 8 \cdot 10^7, \quad K = 19{,}75 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m},$$

$$\frac{0{,}205K}{0{,}424 \cdot 10^{-4}} \leqslant 8 \cdot 10^7, \quad K = 16{,}55 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Resulta que el tramo fino es el más peligroso

$$\varphi_{\max} = \frac{0{,}794 \cdot 16{,}55 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}982 \cdot 10^{-8}} = 0{,}836 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 28{,}7'.$$

2.50. Al componer la condición de reciprocidad de las deformaciones del árbol podemos convencernos de que los momentos de reacción son iguales a $M_A = K(1 - x/l)$; $M_B = Kx/l$. La parte más corta del árbol es la más cargada. Componemos para esta parte la condición de resistencia, considerando que

$$x \leqslant l/2, \quad \frac{K(1 - x/l)\,16}{\pi \cdot D^3} \leqslant 10^8,$$

de donde

$$D = \sqrt[3]{\frac{10^8 \cdot 16\,(1 - x/l)}{\pi \cdot 10^8}} = 0{,}172 \sqrt[3]{1 - x/l}.$$

Luego determinamos el valor del diámetro a partir de la condición de rigidez

$$\varphi_{\max} = \frac{K(l - x)\,\pi \cdot 32}{\pi D^4 G l^2} = \frac{0{,}5}{57{,}3}, \quad D = \sqrt[4]{\frac{10^8 \cdot 32\,(l - x)\,x \cdot 57{,}3}{8 \cdot \pi \cdot 0{,}5 \cdot 10^{10} l^2}} =$$

$$= 0{,}195 \sqrt[4]{\frac{(l - x)x}{l^2}}.$$

Igualando las expresiones obtenidas del diámetro hallamos $x = 0{,}482\,l = 0{,}482$ m.

2.51. En estado límite las tensiones tangenciales en todos los puntos de la sección son iguales a τ_{fl}

$$M_{\text{lím}} = \pi D^3 \tau_{fl}/12 = 4{,}9 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

2.55. En el caso límite los tramos contiguos a los empotramientos se encuentran por completo en el estado plástico. Los momentos límites en los empotramientos son:

$$M_A = \pi D_1^3 \tau_{fl}/12 = \pi \cdot 0{,}1^3 \cdot 2 \cdot 10^8/12 = 5{,}22 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m},$$

$$M_B = \pi D_2^3 \tau_{fl}/12 = \pi \cdot 0{,}06^3 \cdot 2 \cdot 10^8/12 = 1{,}13 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

El momento límite K es igual a la suma de los momentos de reacción a partir de la condición de equilibrio del árbol.

$$K_{\text{lím}} = M_A + M_B = 6{,}35 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m} = 63{,}5 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Si se libera el extremo izquierdo del árbol, el momento límite $K_{\text{lím}}$ será igual a 11,3 kN·m.

2.58. La relación de los lados de la sección rectangular es $a/b = 60/20 = 3$. En la tabla hallamos las características de la sección: $\alpha = 0{,}790$, $\beta = 0{,}801$, $\gamma = 0{,}753$. Obtendremos $J_{\text{tor}} = \alpha b^4 = 0{,}790 \cdot 2^4 = 12{,}64 \text{ cm}^4$; $W_{\text{tor}} = \beta b^3 = 6{,}4 \text{ cm}^3$, $\tau_{\text{máx}} = M_{\text{tor}}/W_{\text{tor}} = 62{,}5 \text{ MPa}$, $\tau'_{\text{máx}} = \gamma\tau_{\text{máx}} = 47 \text{ MPa}$, $\varphi = M_{\text{tor}} l/(GJ_{\text{tor}}) = 0{,}0316 \text{ rad} = 1{,}8°$.

2.61. Para el tubo no cortado el módulo resistente a torsión es $W_{\text{tor}} = \frac{\pi}{16} D^3 (1 - \alpha^4) = \frac{\pi \cdot 8{,}8^3 \cdot 0{,}317}{16} = 42{,}4 \text{ cm}^3$; el momento de inercia polar es $J_{\text{tor}} = W_{\text{tor}} (D/2) = 186{,}6 \text{ cm}^4$.

Para el tubo longitudinalmente cortado tenemos

$$W_{\text{tor}} = h^2 s/3 = 0{,}4^2 \cdot \pi \cdot 8{,}8/3 = 1{,}47 \text{ cm}^3,$$
$$J_{\text{tor}} = h^2 s/3 = 0{,}59 \text{ cm}^4.$$

La resistencia disminuirá 28,8 veces; la rigidez, 316 veces.

2.62. Calculamos la magnitud $J_{\text{tor}} = \Sigma s h^3/3 = (2{,}12 \cdot 2^3 + 30 \cdot 1^3)/3 = 74 \text{ cm}^4$. La tensión tangencial máxima es $\tau_{\text{máx}} = M_{\text{tor}} h_{\text{máx}}/J_{\text{tor}} = M_{\text{tor}} \cdot 2 \cdot 10^{-2}/(74 \cdot 10^{-8}) = 2{,}7 \cdot 10^4 M_{\text{tor}}$. El momento M_{tor} se halla a partir de la condición de resistencia: $\tau_{\text{máx}} = 2{,}7 \cdot 10^4 M_{\text{tor}} \leqslant 6 \cdot 10^7$. Obtenemos $M_{\text{tor}} = 2{,}22 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = 2{,}22 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

2.64. $\omega_{\text{tor}} = 2 \cdot 30 \cdot 10 = 600 \text{ cm}^3 = 0{,}06 \text{ m}^3$,

$$\tau_{\text{máx}} = M_{\text{tor}}/(\omega_{\text{tor}} \delta) = M_{\text{tor}}/(0{,}06 \cdot 3 \cdot 10^{-2}) \leqslant 6 \cdot 10^7,$$
$$M_{\text{tor}} = 6 \cdot 10^7 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-4} = 1{,}08 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m} = 10{,}8 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

2.66. $\tau_{\text{máx}} = \frac{8PD}{\pi d^3} = 300 \text{ MPa}$, $\Delta = \frac{8 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 12 \cdot 10^{-2}}{8{,}5 \cdot 10^{10} \cdot 2^4 \cdot 10^{-8}} = 6{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 6{,}5 \text{ cm}$.

2.67. $c = \frac{Gd^4}{8D^3 n} = 5{,}18 \text{ MN/m}$.

2.68. Determinamos el diámetro del alambre a partir de la condición de resistencia $\tau_{\text{máx}} = \frac{8PD}{\pi d^3} \leqslant [\tau]$. Tenemos $d \geqslant 2{,}17 \text{ cm}$. Elegimos $d = 22 \text{ mm}$.

2.69. Según la condición de resistencia tenemos $\frac{8 \cdot 1{,}5 \cdot 10^4 \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{\pi d^3} = 4 \cdot 10^8$, de donde $d = 1{,}79 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. Consideramos que $d = 1{,}8 \text{ cm}$. Utilizando la magnitud dada de la deformación del resorte, obtendremos

$$\frac{8 \cdot 1{,}5 \cdot 10^4 \cdot 6^3 \cdot 10^{-6} \cdot n}{8{,}5 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}8^4 \cdot 10^{-8}} = 2{,}5 \cdot 10^{-2}, \quad n = 8{,}6.$$

Elegimos $n = 9$.

2.70. Utilizando los datos del problema, obtendremos

$$\frac{8P \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{\pi d^3} = 2 \cdot 10^8 \quad \text{y} \quad \frac{8P \cdot 4^3 \cdot 10^{-6} \cdot 12}{8 \cdot 10^{10} \cdot d^4} = 8 \cdot 10^2.$$

De aquí hallamos $P = 15{,}7 \text{ kN}$, $d = 20 \text{ mm}$.

2.72. El momento torsor en la sección del árbol a la distancia x del extremo libre es igual a

$$M_{tor}(x) = \xi ml - mx = m(\xi l - x).$$

El módulo resistente polar es

$$W_p(x) = \frac{\pi}{16} d^3(x) = \frac{\pi d_0^3}{16}\left[1+\left(\frac{x}{l}\right)^{2/3}\right]^3.$$

La tensión tangencial máxima es

$$\tau_{máx}(x) = \frac{M_{tor}(x)}{W_p(x)} = \frac{16m(\xi l - x)}{\pi d_0^3\left[1+\left(\frac{x}{l}\right)^{2/3}\right]^3}.$$

Introduciendo la coordenada adimensional $t = x/l$, obtendremos

$$\tau_{máx}(t) = \frac{16ml(\xi - t)}{\pi d_0^3 (1+t^{2/3})^3}.$$

Tomamos la designación $\tau_0 = \frac{16ml}{d_0^3}$, $C(t) = \frac{\xi - t}{(1+t^{2/3})^3}$. Tenemos

$$\tau_{máx}(t) = \tau_0 \cdot C(t).$$

Escribimos esta expresión en la lengua fortrán en la forma:

```
STRESS = SØ*C,
```

donde STRESS es el identificador de la tensión tangencial máxima τ_{max}.

```
SØ = 16 * PM * AL/(3,1416 * D ** 3).
```

Para construir el diagrama de las tensiones tangenciales máximas a lo largo del árbol es necesario calcular sus valores en varias secciones del árbol. Fijamos las magnitudes de la coordenada adimensional en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant 1$ con un paso de 0,1, suponiendo que $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3$, etc. Las magnitudes correspondientes de $\tau_{máx}$ pueden ser calculadas, por ejemplo, por medio del programa siguiente, donde para el cálculo ha sido utilizado el ciclo organizado en base del operador IF:

```
      PROGRAM␣VAL6
      READ (5,1Ø6)XI,PM,AL,D
1Ø6␣FORMAT(4E11.3)
      SØ=16 * PM * AL/(3.1416 * D ** 3)
      T = Ø.
14␣C = (XI - T)/(1.+T ** (2./3.)) ** 3
      STRESS = SØ * C
      WRITE(6,1Ø6)STRESS
      T = T +.1
      IF(T␣LE.1)GO␣TO␣14
      STOP
      END
```

2.74. Calculamos el momento torsor en la sección x del árbol

$$M_{tor}(x) = K - \int_0^x m(x)\,dx = m\left(\xi l - \frac{x^2}{3l}\right).$$

Luego hallamos las expresiones del ángulo $\varphi(u)$ de giro de una sección arbitraria con la coordenada u, teniendo en cuenta que el momento polar de inercia es

$$J_{tr}(x) = \frac{\pi}{32} d^4(x) = \frac{\pi}{32} d_0^4\left(1+\frac{x}{l}\right)^{1/2}\Big)^4.$$

De este modo

$$\varphi(u)=\int_u^l \frac{M_{tor}(x)}{GJ_{tr}(x)}\,dx=\int_u^l \frac{m(\xi l-x^3/(3l^2))\cdot 32}{G\pi d_0^4\,[1+(x/l)]^{1/2}]^4}\,dx.$$

Pasando a la coo lenada adimensional $t = x/l$, obtendremos

$$\varphi\left(\frac{u}{l}\right)=\frac{32ml^3}{\pi Gd_0^4}\int_{u/l}^{1}\frac{\xi-t^3/3}{(1+t^{1/2})^4}\,dt=\varphi_0\cdot C(t),$$

donde están introducidas las designaciones

$$\varphi_0=\frac{32ml^3}{\pi Gd_0^4},\quad C(t)=\int_{u/l}^{1}\frac{\xi-t^3/3}{(1+t^{1/2})^4}\,dt.$$

Usamos las indicaciones siguientes:
UGOL, para el ángulo de giro $\varphi(u/l)$,
UØ, para la magnitud φ_0,
A, para la relación u/l.
En el programa serán introducidos los operadores de adjudicación
UØ=32 * PM * AL ** 2/(3.1416 * G * D ** 4),
UGOL = UØ * C.

Fijamos las designaciones de las relaciones u/l = 0,0.1,0.2,...,1 con intervalos de una décima parte de la longitud del árbol y calculamos los valores de los ángulos de giro de las secciones correspondientes. El cálculo se efectúa por el programa que se expone a continuación con el nombre convencional VAL 1Ø.

```
      PROGRAM␣VAL1Ø
      EXTERNAL␣FUN1Ø
      READ(5,11Ø)PM,AL,G,D
11Ø␣FORMAT(4E11.3)
      UØ=32 * PM * AL ** 2/(3.1416 * G * D ** 4)
      DO␣26␣I = 1,11
      A=(I — 1)/1Ø.
      CALL␣GAM(FUN1Ø,A,1.,Ø.Ø1,C)
      UGOL=UØ *C
  26␣WRITE(6,11Ø)UGOL
      STOP
      END
      SUBROUTINE␣GAM(XXX,A,B,EPS,T)
      (subprograma estándar)
      RETURN
      END
      FUNCTION␣FUN1Ø(T)
      FUN1Ø=(XI—T ** 3/3.)/(1.+SQRT(T)) ** 4
      RETURN
      END
```

El subprograma estándar SUBROUTINE␣GAM se usa para calcular la integral $C(t)$ mediante el método modificado de Gauss.

CAPITULO 3

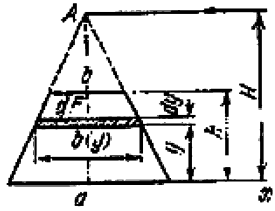
CARACTERISTICAS GEOMETRICAS DE LAS SECCIONES DE VIGAS

3.2. Continuemos los lados laterales del trapecio hasta su intersección en el punto A (véase la figura). La altura H del triángulo obtenido se halla mediante la proporción $H/a = (H - h)/b$, $H = ah/(a - b)$.

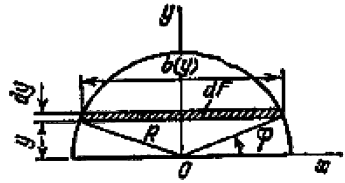
Examinamos una tira elemental de ancho dy situada paralelamente a la base a una distancia y. Su longitud es $b(y) = a(H - y)/H$. El momento estático del área del trapecio respecto a su base es

$$S_x = \int_0^h y \cdot b(y)\, dy = \frac{a}{H} \int_0^h (Hy - y^2)\, dy = \frac{ah^2}{6H}(3H - 2h).$$

Sustituyendo el valor obtenido de H tenemos $S_x = h^2(a + 2b)/6$. Calculamos la ordenada del centro del trapecio: $y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{a + 2b}{a + b} \cdot \frac{h}{3}$. La coordenada x_C se calcula análogamente.



Para el problema 3.2



Para el problema 3.3

3.3. a) Separamos una tira de ancho dy a una distancia y del diámetro horizontal. Introducimos el ángulo variable φ (véase la figura) y por medio de éste expresamos y y el área de la tira:

$$y = R \operatorname{sen} \varphi, \quad dy = R \cos \varphi\, d\varphi, \quad dF = 2R^2 \cos^2 \varphi\, d\varphi.$$

El momento estático del semicírculo respecto al eje x es

$$S_x = \int_0^{\pi/2} 2R^3 \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi\, d\varphi = \frac{2}{3} R^3.$$

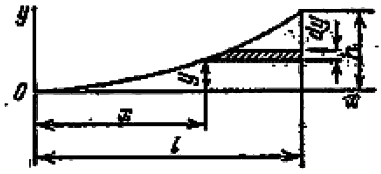
La ordenada del centro del área es $y_C = S_x/F = 4R/(3\pi)$.

3.10. Según los datos $y = ax^2$ cuando $x = l$, $y = h$. Sustituyendo estos valores en la ecuación de la curva, obtendremos $a = \frac{h}{l^2}$, $y = \frac{h}{l^2} x^2$, $dy = \frac{2h}{l^2} x\,dx$.

El área de la tira elemental paralela al eje x es igual a $dF = \frac{2h}{l^2}(l - x)\,x\,dx$.

Calculamos el área de la figura inferior (véase la figura)

$$F = \int_0^l \left(\frac{2h}{l} x - \frac{2h}{l^2} x^2\right) dx = \frac{hl}{3}.$$



Para el problema 3.10

El momento estático del área respecto al eje x es

$$S_x = \int_0^l \frac{2h^2}{l^4}(l - x)\,x^3\,dx = \frac{h^2 l}{10}.$$

Calculamos la ordenada del centro C_1 del área $y_1 = S_x/F = 0{,}3h$.

3.12. 1) Separando una tira elemental de ancho dy paralela a la base a una distancia y de ella, hallamos la longitud de la tira $b(y) = \frac{a}{H}(H - y)$. El área de la tira es igual a $dF = \frac{a}{H}(H - y)\,dy$. Luego calculamos el momento de inercia respecto al eje que pasa por la base del triángulo:

$$J_x = \int_0^h \frac{a}{H}(H - y)\,y^2\,dy = \frac{aH^3}{12}.$$

Trazamos por el centro del área del triángulo un eje paralelo a la base: $y_C = H/3$. Haciendo uso de la fórmula de paso a los ejes paralelos, tenemos

$$J_{x_C} = J_x - \frac{aH^2}{2} \cdot \left(\frac{H}{3}\right)^2 = \frac{aH^3}{36}.$$

3.13. 1) Usando la fórmula para el momento de inercia del rectángulo respecto a su eje central paralelo a la base $J_{x_C} = bH^3/12$ y restando el momento de inercia del rectángulo interior del momento de inercia del exterior, tenemos

$$J_{x_C} = \frac{5a\,(8a)^3}{12} - \frac{3a\,(4a)^3}{12} = \frac{529}{3} a^4.$$

Calculamos análogamente el momento de inercia respecto al eje vertical:

$$J_{y_C} = \frac{223}{3} a^4.$$

3.14. 1) Utilizando el método de áreas negativas y la fórmula de paso de eje x al eje paralelo que pasa por el centro de la sección

$$J_{x_C} = \frac{5a\,(8a)^3}{12} - \left(\frac{\pi \cdot (8a)^4}{64} + \frac{\pi \cdot (3a)^2}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = 193\ a^4.$$

3.15. 3) Hallamos las coordenadas del centro de la sección dividiéndola previamente en dos triángulos

$$x_C = y_C = \frac{3b^3 \cdot 0{,}5b + 2b^3 \cdot 2b}{5b^3} = 1{,}1\ b.$$

Calculamos los momentos de inercia respecto a los ejes que coinciden con los lados exteriores de la figura

$$J_x = J_y = \frac{b\,(3b)^3}{3} + \frac{2b \cdot b^3}{3} = \frac{29}{3}\,b^4,$$

$$J_{xy} = 3b^2 \cdot \frac{3}{2}\,b \cdot \frac{b}{2} + 2b^2 \cdot \frac{b}{2} \cdot 2b = \frac{17}{4}\,b^4.$$

Los momentos de inercia centrales se hallan mediante la fórmula de paso a los ejes paralelos utilizando los valores hallados de las coordenadas del centro:

$$J_{x_C} = J_{y_C} = \frac{29}{3}\,b^4 - 5b^2 \cdot 1{,}1^2 b^2 = 3{,}62b^4,$$

$$J_{x_C y_C} = \frac{17}{4}\,b^4 - 5b^2 \cdot (1{,}1b)^2 = -1{,}8b^4$$

Uno de los ejes principales coincide con el eje de simetría, el otro es perpendicular a éste. El ángulo formado por el eje x_C y los ejes principales es igual a $\alpha = \pm 45°$. Los momentos de inercia principales son: $J_{máx} = 3{,}62b^4 + 1{,}8b^4 = 5{,}42b^4$, $J_{mín} = 3{,}62b^4 - 1{,}8b^4 = 1{,}82b^4$

3.16. 1) Los momentos de inercia centrales se hallan mediante integración (véase el problema 3.12)

$$J_{x_C} = \frac{3}{2}\,a^4, \quad J_{y_C} = \frac{2}{3}\,a^4, \quad J_{x_C y_C} = -\frac{a^4}{2}$$

Las direcciones de los ejes principales se determinan por el ángulo α que se calcula por la fórmula

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{x_C y_C}}{J_{y_C} - J_{x_C}} = \frac{-2 \cdot \frac{a^4}{2}}{\frac{2}{3}\,a^4 - \frac{3}{2}\,a^4}; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = 1{,}2;$$

$$2\alpha \approx 50°, \quad \alpha = 25°$$

Los momentos de inercia principales son:

$$J_{máx,\,mín} = \frac{1}{2}\left[J_{x_C} + J_{y_C} \pm \sqrt{(J_{x_C} - J_{y_C})^2 + 4J^2_{x_C y_C}}\right].$$

Sustituyendo aquí los valores obtenidos más arriba hallamos

$$J_{máx} = 1{,}73a^4, \quad J_{mín} = 0{,}43a^4.$$

3.26. Calculamos las coordenadas del centro de la sección respecto a los ejes que coinciden con los lados exteriores de la figura: $x_C = y_C = \frac{32 \cdot 8 + 28 \cdot 1}{60} =$ $= 4{,}73$ cm. Luego hallamos $F = 60$ cm^2, $J_x = \frac{2 \cdot 16^3 + 14 \cdot 2^3}{3} = 2768$ cm^4, $J_{x_C} = 2768 - 60 \cdot 4{,}73^2 = 1420$ cm^4, $J_{xy} = 32 \cdot 8 \cdot 1 + 28 \cdot 9 \cdot 1 = 508$ cm^4, $J_{x_C y_C} = 508 - 60 \cdot 4{,}73^2 = -834{,}4$ cm^4. Según los datos del surtido de perfiles laminados para el angular $160 \times 160 \times 20$ mm $J_{x_C} = 1425{,}6$ cm^4, $J_{x_C y_C} =$ $= -829{,}5$ cm^4. El error de la solución aproximada no es mayor de un 0,6%.

3.27. Por la fórmula de paso a los ejes paralelos componemos la condición de equilibrio de los momentos de inercia de la sección respecto a los ejes x e y:

$$1840 = 115 + 26{,}8\,(5 + a/2)^2, \quad \text{de donde} \quad a = 6{,}04 \text{ cm}.$$

3.31. Examinamos el área elemental dF cortada de la banda por dos planos verticales situados a una distancia mutua dx. Teniendo en cuenta que $dy/dx = \operatorname{tg}\alpha$, obtendremos $dF = (h/\cos\alpha)\,dx = (h/\operatorname{sen}\alpha)\,dy$, donde α es el ángulo de inclinación de la banda respecto del eje x. Si el ancho h de la banda es pequeño se puede despreciar el momento de inercia propio del elemento dF respecto a su eje central paralelo al eje x. En este caso el momento de inercia incógnito es

$$J_x = \int\limits_{(F)} y^2\,dF = \int\limits_{y_A}^{y_B} y^2\,\frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}\,dy = \frac{h}{3\operatorname{sen}\alpha}\,(y_B^3 - y_A^3).$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}\alpha = (y_B - y_A)/l$, obtendremos

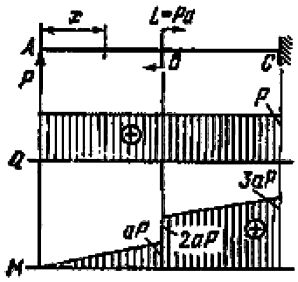
$$J_x = \frac{hl}{3}\,(y_A^2 + y_A y_B + y_B^2).$$

CAPÍTULO 4

TENSIONES EN VIGAS Y ESTRUCTURAS SOMETIDAS A FLEXIÓN

4.1. En el tramo AB tenemos $Q = P$, $M = Px$. De acuerdo con estas ecuaciones están construidos los diagramas Q y M.

En el tramo BC: $Q = P$, $M = Px + L$. Los diagramas correspondientes están representados en la figura.



Para el problema 4.1

4.3. La intensidad de la carga (véase la fig. *a*) es

$$q(u) = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{l} u, \qquad (1)$$

Utilicemos la condición de equilibrio de la viga para lo cual componemos la ecuación de los momentos respecto al punto B:

$$V_A \cdot l - \int_0^l (l-u)\, q(u)\, du = 0,$$

donde $q(u)\,du$ es la carga elemental (de rayado más denso).

Teniendo en cuenta la (1), obtenemos

$$V_A = l\,(2q_1 + q_2)/6.$$

La fuerza cortante en la sección de la viga a la distancia x del apoyo izquierdo es

$$Q(x) = V_A - \int_0^x q(u)\, du = \frac{l}{6}(2q_1 + q_2) - \left(q_1 x + \frac{q_2 - q_1}{l}\frac{x^2}{2}\right). \qquad (2)$$

El momento flector es

$$M(x) = V_A \cdot x - \int_0^x (x-u)\, q(u)\, du = \frac{l}{2}(2q_1 + q_2)\, x -$$

$$- \left(q_1 \frac{x^2}{2} + \frac{q_2 - q_1}{l}\frac{x^3}{6}\right) \qquad (3)$$

De acuerdo con las ecuaciones (1) y (3) pueden ser construidos los diagramas Q y M teniendo dada la relación entre q_1 y q_2.

Igualando la expresión (2) a cero, hallamos el valor de x que corresponde a $M_{máx}$:

$$x_0 = \frac{l}{\eta - 1}\left(\sqrt{\frac{\eta^2 + \eta + 1}{3}} - 1\right), \qquad (4)$$

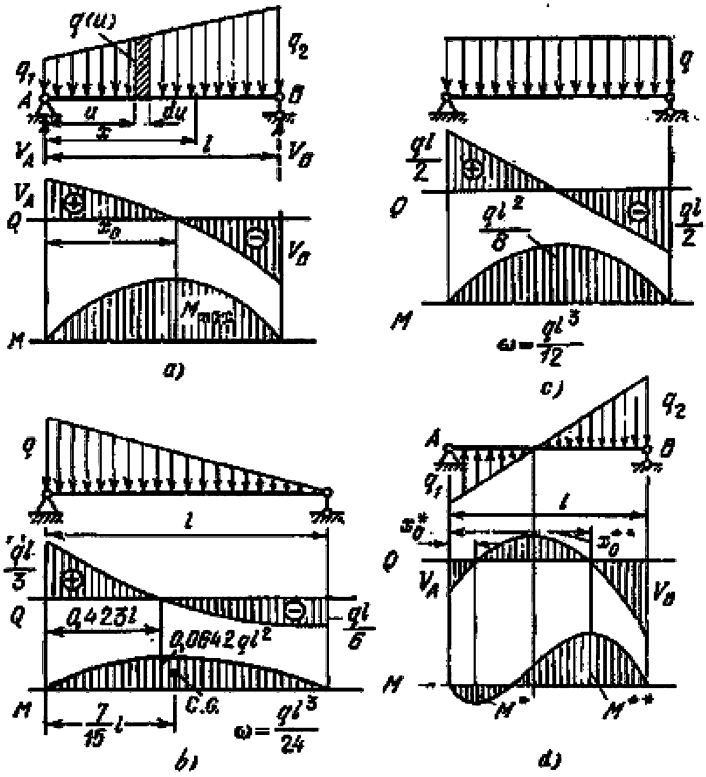
donde $\eta = q_2/q_1$. Sustituyendo en (3) el valor $x = x_0$, hallamos $M_{máx}$. Cuando $\eta = 0$, es decir, cuando $q_2 = 0$ (fig. *b*) de (4) hallamos

$$x_0 = l\,(1 - 1/\sqrt{3}) \approx 0{,}423l$$

y de (3) hallamos la magnitud correspondiente del momento (el subíndice 1 de q está omitido)

$$M_{máx} = ql^2/(9\sqrt{3}) \approx 0{,}0642ql^2.$$

En la figura está dado el valor del área ω del diagrama M y se indica la posición del centro de gravedad.



Para el problema 4.3

Cuando $q_1 = q_2 = q$ (fig. *c*) de (2) y (3) tenemos

$$Q(x) = \frac{ql}{2} - qx, \quad M(x) = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}.$$

de donde el momento máximo (en el punto medio) es

$$M_{máx} = ql^2/8.$$

Cuando $q_1 < 0$ (fig. *d*) en las fórmulas (1) — (3) es preciso cambiar el signo de q_1. Se puede demostrar que en este caso cuando $1/2 < \eta < 2$ el diagrama M

tiene dos tramos de signos diferentes, como está representado en la figura. Obtenemos dos valores de x_0

$$x_0^*,\ x_0^{**}=\frac{l}{\eta+1}\left(1\mp\sqrt{\frac{\eta^2-\eta+1}{3}}\right)$$

y mediante la fórmula (3) hallamos los correspondientes valores extremales M^* y M^{**} del momento flector.

Cuando $\eta \geqslant 2$ todo el diagrama M es positivo, cuando $\eta = 2$

$$M^{**}=\frac{2}{27}\,q_1 l^2 \quad \left(x_0^{**}=\frac{2}{3}\,l\right).$$

Cuando $\eta \leqslant 1/2$ todo el diagrama M es negativo, cuando $\eta=\frac{1}{2}$

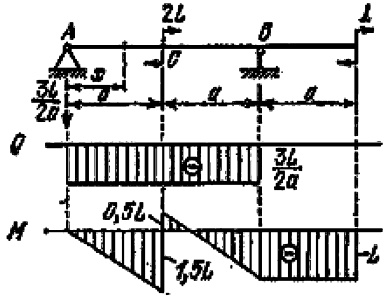
$$M^{*}=-\frac{1}{27}\,q_1 l^2 \quad \left(x_0^{*}=\frac{1}{3}\right).$$

4.6. a) La ecuación de los momentos respecto al punto B es: $V_A \cdot 2a + 2L + L = 0$, de donde $V_A = -\frac{3L}{2a}$.

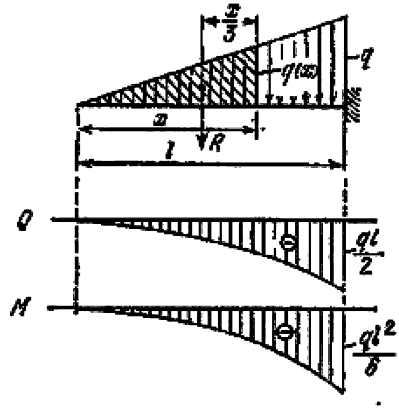
En el tramo AC: $Q = -\frac{3L}{2a}$, $M = \frac{3L}{2a}\,x$. Por estas ecuaciones construimos los diagramas.

En el tramo CB: $Q = -\frac{3L}{2a}$, $M = -\frac{3L}{2a}\,x + 2L$. Por estas ecuaciones construimos los diagramas Q y M para el tramo CB.

Examinamos el equilibrio de la parte derecha cortada del voladizo de la viga. Tenemos $Q = 0$, $M = -L$.



Para el problema 4.6(a)



Para el problema 4.8

4.8. Determinamos la intensidad $q(x)$ de la carga a la distancia x del extremo izquierdo del voladizo:

$$q(x)/q = x/l, \quad \text{es decir,} \quad q(x) = q\cdot\frac{x}{l}.$$

Determinamos la resultante R de la carga que actúa sobre el tramo x (como el área del triángulo rayado densamente)

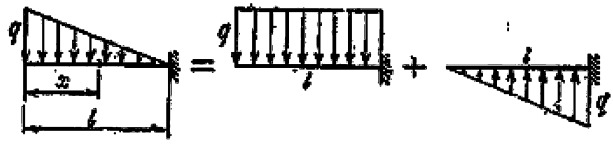
$$R=\frac{1}{2}\,x\cdot q(x)=\frac{qx^2}{2l}.$$

Determinamos Q y M en la sección x del voladizo:

$$Q(x) = -R = -\frac{qx^2}{2l}, \quad M(x) = -R \cdot \frac{x}{3} = -\frac{qx^3}{6l}.$$

Por estas ecuaciones construimos los diagramas Q y M.

4.15. *Indicación.* Representar la carga como la diferencia entre las cargas uniforme y triangular (véase la figura).



Para el problema 4.15

4.16. 11) La carga sobre la viga es igual a $m \cdot 2a$. Componemos la ecuación de los momentos respecto al punto B:

$$V_A \cdot 2a + m \cdot 2a = 0,$$

de aquí $V_A = -m$. Construimos los diagramas Q y M para el tramo AC de la viga (véase la figura).

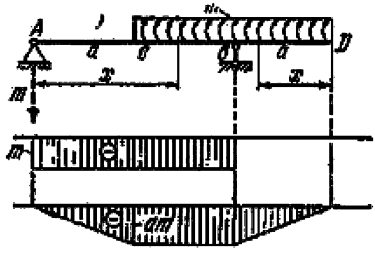
Para el tramo CB tenemos

$$M(x) = -mx + m(x - a) = -ma.$$

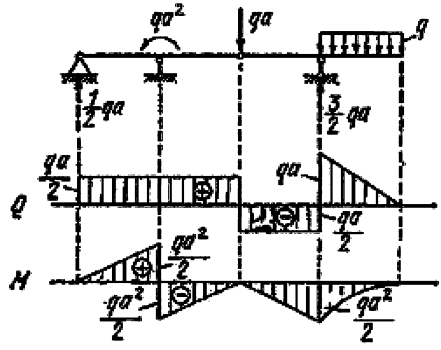
Para el tramo BD

$$M(x) = -mx.$$

La dependencia diferencial $dM/dx = Q + m$ (calculando x de izquierda a derecha) se confirma.



Para el problema 4.16(11)



Para el problema 4.17(2)

4.17. 2) El momento flector en la sección C es igual a cero (porque aquí hay una articulación). Escribimos esta condición para las fuerzas situadas a la derecha de la articulación:

$$M_C = -qa \cdot \frac{3}{2}a + V_D \cdot a = 0;$$

de aquí $V_D = 3qa/2$.

La ecuación de los momentos respecto al punto B es:

$$\sum M_B = V_A \cdot a - L + P \cdot a - V_D \cdot 2a + qa \cdot 2{,}5a = 0.$$

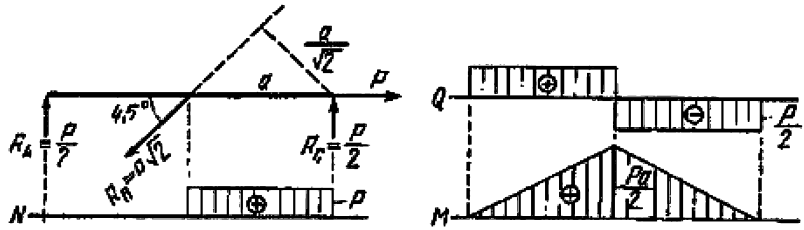
De aquí $V_A = qa/2$.

Ahora se puede construir el diagrama Q: por la izquierda hasta el punto B y luego por la derecha. Puesto que en el diagrama Q no se produce un salto en el punto B concluimos que $V_B = 0$. Luego construimos el diagrama M a partir de cualquier extremo. Los diagramas Q y M están representados en la figura.

4.22. Examinamos el equilibrio de la viga (véase la figura). Componemos la ecuación de las proyecciones de las fuerzas sobre el eje de la viga:

$$\sum X = P - R_B/\sqrt{2} = 0,$$

de aquí $R_B = P\sqrt{2}$.



Para el problema 4.22

La ecuaci n de los momentos respecto al punto C es

$$\sum M_C = R_A \cdot 2a - R_B \cdot a/\sqrt{2} = 0,$$

de aquí $R_A = P/2$.

La ecuación de las proyecciones de las fuerzas sobre la vertical es:

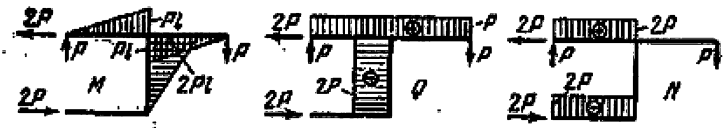
$$\sum Y = R_A - R_B/\sqrt{2} + R_C = 0,$$

de aquí $R_C = P/2$. Los diagramas N, Q y M están representados en la figura.

4.24. 11) Componemos las ecuaciones de los momentos de todas las fuerzas respecto a las charnelas de apoyo y la ecuación de las proyecciones sobre la vertical:

$$\sum M_A = P \cdot 2l - H_B \cdot l = 0, \quad \sum M_B = P \cdot 2l + H_A \cdot l = 0,$$
$$\sum Y = -P + V_A = 0.$$

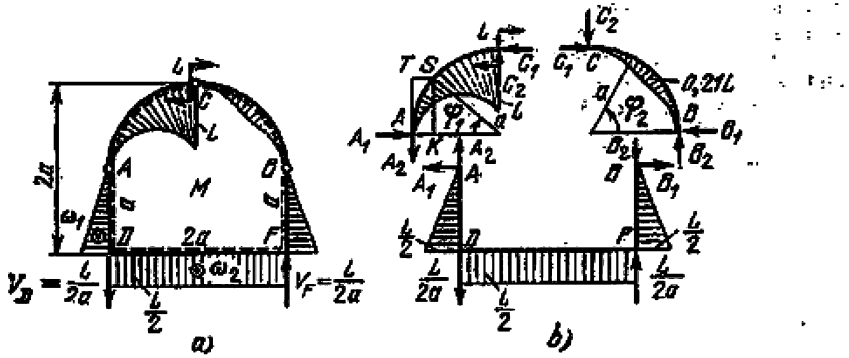
De aquí hallamos las reacciones de apoyo $H_A = -2P$, $H_B = 2P$, $V_A = P$ (véase la figura). Construimos el diagrama M a partir de los extremos A, B



Para el problema 4.24(11)

y B desplazándonos hacia C. El momento flector en las secciones del tramo AC es igual al momento debido a la reacción V_A; el diagrama M tiene la forma de

un triángulo; las ordenadas del diagrama M están trazadas hacia arriba, puesto que las fibras superiores están comprimidas. En el tramo EC el diagrama M es también triangular; aquí se comprimen las fibras inferiores. En el tramo BD el momento flector es igual a cero. En el tramo DC el momento flector es igual al momento debido a la reacción H_B; este momento varía de modo lineal desde $M = 0$ hasta $M = H_B l$ y provoca una compresión de las fibras derechas. Los momentos que actúan sobre el nudo C están en equilibrio. Los diagramas M, Q y N están representadas en la figura.



Para el problema 4.24(12)

12) Determinamos las reacciones en los apoyos. Componiendo la ecuación de los momentos respecto al apoyo D (fig. a):

$$L - V_F \cdot 2a = 0,$$

determinamos la magnitud V_F de la reacción en el apoyo F:

$$V_F = L/(2a).$$

De la ecuación de las proyecciones de todas las fuerzas sobre la vertical hallamos que la proyección vertical de la reacción en el apoyo D es también igual a $L/(2a)$, pero está dirigida hacia abajo. Como se deduce de la ecuación de las proyecciones sobre la horizontal la componente horizontal de la reacción en el apoyo D es igual a cero.

Desmembrando el sistema (fig. b) determinamos las fuerzas A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 de interacción de las partes de la estructura en las articulaciones. Examinemos el equilibrio de la parte $ADFB$. Componiendo la ecuación de los momentos respecto al punto B

$$\frac{L}{2a} \cdot 2a - A_2 \cdot 2a = 0,$$

hallamos $A_2 = L/(2a)$. De las ecuaciones de las proyecciones sobre la vertical obtenemos $B_2 = A_2 = L/(2a)$. Examinemos ahora el equilibrio de la parte BC de la estructura. Componemos la ecuación de los momentos respecto al punto C:

$$B_1 \cdot a - B_2 \cdot a = 0.$$

Hallamos $B_1 = B_2 = L/(2a)$. Las ecuaciones de las proyecciones de la misma parte BC de la estructura nos dan: $C_1 = B_1 = L/(2a)$, $C_2 = B_2 = L/(2a)$.

De este modo quedan determinados los esfuerzos en las articulaciones. Estos resultaron positivos, por consiguiente, sus direcciones supuestas se confirman.

Los diagramas de los momentos flectores M están representados en la misma figura b (y pasados a la figura a).

En la sección S del tramo AC, que se determina por un ángulo arbitrario φ_1, tenemos el momento flector

$$M(\varphi_1) = A_1 \cdot SK + A_2 \cdot ST = A_1 \cdot SK + A_2 \cdot AK = A_1 \cdot a \operatorname{sen} \varphi_1 + A_2 \cdot (a - a \cos \varphi_1) = \frac{L}{2} (\operatorname{sen} \varphi_1 + 1 - \cos \varphi_1). \quad (a)$$

Aquí el momento flector se considera positivo cuando las fibras comprimidas están dispuestas dentro de la estructura. Lo marcamos punteando en la figura *a* para conservar en adelante la regla de los signos adoptada.

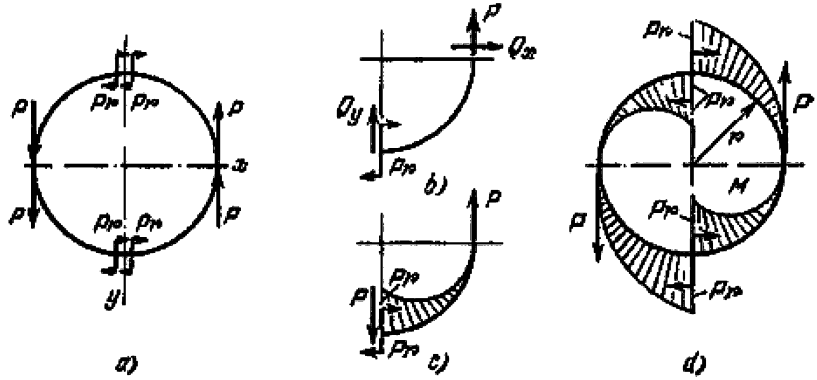
Mediante la ecuación (a) obtenemos $M = 0$, cuando $\varphi_1 = 0$; y $M = L$ cuando $\varphi_1 = 90°$ (fig. *b*).

Para el tramo BC de la estructura hallamos análogamente

$$M(\varphi_2) = B_1 \cdot a \operatorname{sen} \varphi_2 - B_2 \cdot (a - a \cos \varphi_2) = \frac{L}{2} (\operatorname{sen} \varphi_2 - 1 + \cos \varphi_2). \quad (b)$$

En el tramo AD de la estructura construimos el diagrama M a partir del extremo A. El momento máximo se obtiene aquí en el punto D y es igual a $A_1 a = L/2$. En el tramo BF construimos el diagrama a partir del extremo B; el momento máximo (en el punto F) es también igual a $L/2$. Cada vez trazamos el diagrama del lado de las fibras comprimidas. Conociendo los momentos flectores en los nudos D y F, construimos el diagrama en el tramo DF.

13) Para que la antisimetría de la carga quede más clara dividimos cada fuerza y cada momento en dos partes iguales (fig. *a*) considerando, sin embargo, que estas mitades están aplicadas en puntos cercanos uno de otro. La carga obtenida es con toda evidencia equivalente a la dada y sin duda antisimétrica respecto a los ejes x e y. Por consiguiente, en cada sección de la estructura tenemos en el eje de simetría solamente una fuerza cortante. Separando una cuarta parte del aro (fig. *b*), por medio de las condiciones de equilibrio determinamos las fuerzas cortantes $Q_x = 0$, $Q_y = -P$. Luego construimos el diagrama M para la cuarta parte del aro (fig. *c*) y después para todo el aro (véase la fig. *d*).

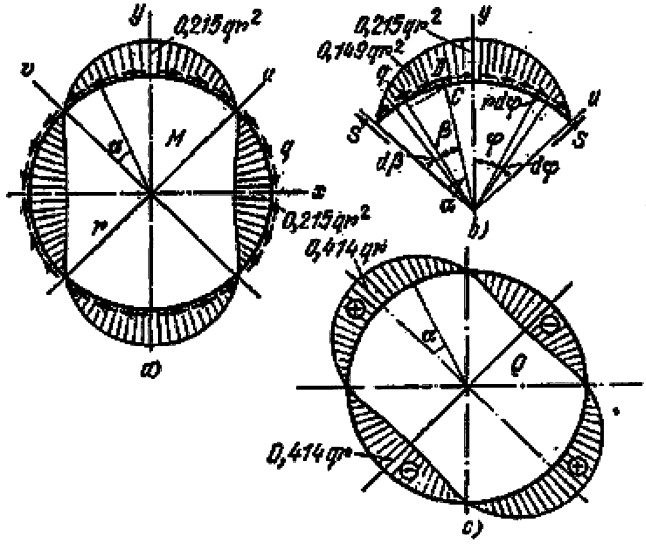


Para el problema 4.24(13)

4.25. 4) Trazamos los ejes de antisimetría u y v de la carga (fig. *a*). En las secciones a lo largo de estos ejes tenemos solamente las fuerzas cortantes S (fig. *b*) que se determinan de la condición de equilibrio. Componemos la ecuación de las proyecciones sobre el eje y.

Tomamos un ángulo arbitrario φ y le damos un incremento $d\varphi$; como resultado obtenemos un arco pequeño $rd\varphi$. La fuerza elemental correspondiente a este arco es igual a $qrd\varphi$. Su proyección sobre el eje y es igual a $qr\,d\varphi \cdot \operatorname{sen} \varphi$. La

proyección de todas las fuerzas tangenciales que actúan sobre la cuarta parte del anillo que examinamos es igual a $2\int_0^{\pi/4} qr \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = 0{,}586qr$. Teniendo también en cuenta las proyecciones de las fuerzas S, obtenemos la ecuación de equilibrio $0{,}586qr - 2S\cos 45° = 0$, de donde $S = 0{,}414qr$.



Para el problema 4.25(4)

Ahora podemos determinar el momento flector en cualquier sección del anillo. Tomamos una sección bajo un ángulo α respecto al eje v. En esta sección el momento flector es

$$M = Sr\operatorname{sen}\alpha - \int_0^{\alpha} CDqr\, d\beta = Sr\operatorname{sen}\alpha - \int_0^{\alpha} (r - r\cos\beta)\, qr\, d\beta = (1{,}414\operatorname{sen}\alpha - \alpha)\, qr^2.$$

De acuerdo con esta ecuación está construido el diagrama M en la fig. b. Construimos análogamente el diagrama M en las otras cuartas partes del anillo (fig. a).

La fuerza cortante en una sección arbitraria del anillo es

$$Q = Q(\alpha) = \frac{dM}{dx} = \frac{1}{r}\frac{dM}{d\alpha} = (1{,}414\cos\alpha - 1)\, qr.$$

El diagrama Q construido mediante esta ecuación está representado en la figura c.

4.28. 1) $W_z = \dfrac{bh^2}{6} = \dfrac{2a(4a)^2}{6} = \dfrac{16}{3}a^3$;

2) $W_z = \dfrac{2}{h}(J_{z,1} - J_{z,2}) = \dfrac{2}{4a}\left(\dfrac{2a(4a)^3}{12} - \dfrac{2a^4}{12}\right) = 5{,}25a^3$;

3) $W_z = \dfrac{2}{4a}\left(\dfrac{2a(4a)^3}{12} - \dfrac{a(2a)^3}{12}\right) = 5a^3$.

Tenemos $W_1 : W_2 : W_3 = 10{,}67 : 10{,}5 : 10$.

4.32. 1) $J_z = \frac{2b\,(4b)^3}{12} - 2\,\frac{b}{2}\,\frac{(2b)^3}{12} = 10b^4$; $W_z = 5b^3$;

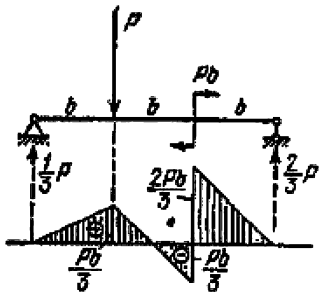
$$J_y = \frac{4b\,(2b)^3}{12} - 2\left(\frac{2b\,(b/2)^3}{12} + 2b \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\,b\right)^2\right) = 1{,}5b^4,$$

$W_y = 1{,}5b^3$;

2) $J_z = \frac{2b\,(4b)^3}{12} - 2\left(\frac{b^4}{12} + b^2\left(\frac{3}{2}\,b\right)^2\right) = 6b^4$; $W_z = 3b^3$;

$$J_y = \frac{4b\,(2b)^3}{12} - \frac{2b \cdot b^3}{12} = 2{,}5b^4; \quad W_y = 2{,}5b^3.$$

4.36. La tensión máxima en la sección transversal de la viga en flexión es $\sigma_{máx} = M/W$, donde W es el módulo resistente de la sección. Para la sección rectangular $W = bh^2/6$.



Para el problema 4.38

4.37. El momento de inercia de la sección es $J = bh^3/12 = 31{,}2$ cm^4. El radio de curvatura es $\rho = EJ/M = 25{,}5$ m. La tensión normal máxima es $\sigma_{máx} = M/W$, donde $W = bh^2/6 = 3 \cdot 5^2/6 = 12{,}5$ cm^3 es el módulo resistente en la flexión de la sección de la viga. Obtenemos $\sigma_{máx} = 206$ MPa.

4.38. Construimos el diagrama M (véase la figura). Hallamos $M_{máx} = 2Pb/3$. Componemos la condición de resistencia: $\sigma_{máx} = M_{máx}/W = [\sigma]$, es decir, $2P_{ad}b/(3W) = [\sigma]$. De aquí $P_{ad} = 3W[\sigma]/(2b)$. En la tabla 7 del anexo hallamos $W = 518$ cm^3 y luego determinamos $P_{ad} = 62$ kN.

4.43. Las tensiones normales máximas (en el centro de la viga) son

$$\sigma_{máx} = M_{máx}/W = 3L/(bh^2);$$

las tensiones tangenciales máximas (en la capa neutra) son

$$\tau_{máx} = \frac{3}{2}\,\frac{Q}{F} = \frac{3}{2}\,\frac{L}{lbh}.$$

4.46. a) La fuerza de cizallamiento lineal entre el ala y el alma de la viga es $q = \frac{Q}{J_z}\,S_z$, donde $J_z = \frac{1 \cdot 80^3}{12} + 19 \cdot 3 \cdot 38{,}5^2 \cdot 2 = 21{,}0 \cdot 10^4$ cm^4 es el momento de inercia de la sección de la viga, $S_z = 20 \cdot 3 \cdot 38{,}5 = 2300$ cm^3 es el momento estático de la sección del ala respecto al eje central z de la sección de la viga.

La condición de resistencia del cordón es $q/(2h) = [\tau]$, de donde $h = q/(2[\tau]) = 3{,}3$ mm.

b) Dos tramos de soldadura están sometidos a la acción de la fuerza qe. La condición de resistencia del cordón es: $qe/(2hl) = [\tau]$. De aquí $e = 2hl[\tau]/q = 12{,}2$ cm.

4.53. La condición de resistencia es: $\frac{M_{máx}}{J} \cdot y_{max} = [\sigma]$. Efectuamos el cálculo para las fibras inferiores (estiradas), es decir, $y_{máx} = h/3$ y $[\sigma] = \sigma_r/n$. Teniendo en cuenta que $M_{máx} = Pl/4$ y $J = bh^3/36$, obtenemos

$$\frac{P_{ad}l}{4} \cdot \frac{36}{bh^3} \cdot \frac{h}{3} = \frac{\sigma_r}{n}$$

De aquí $P_{ad} = \sigma_r b^2/(3nl)$.

4.55. El módulo resistente necesario es $W = M/[\sigma] = 4$ cm³.

1) *La viga maciza de sección rectangular tiene* $W = bh^2/6 = 0{,}377b^3$, de aquí $b = \sqrt[3]{4/0{,}377} = 2{,}21$ cm, $F_1 = bh = 1{,}5b^2 = 7{,}3$ cm².

2) *La viga maciza de sección circular tiene* $W = 0{,}1d^3$, de donde $d = \sqrt[3]{4/0{,}1} = 3{,}42$ cm, $F_2 = \pi d^2/4 = 9{,}1$ cm².

3) *La viga de paredes delgadas de sección circular tiene* $W = \pi r^2 t = 0{,}05\pi r^3$, de donde $r = \sqrt[3]{4/0{,}05\pi} = 2{,}95$ cm, $F_3 = 2\pi rt = 0{,}1\pi r^2 = 2{,}74$ cm².

4) *La viga de paredes delgadas de sección doble T tiene* $J = bt\,(h/2)^2 \cdot 2 = bth^2/2 = 0{,}0167h^4$ (la pared delgada no se cuenta), $W = J/(0{,}5h) = 0{,}0333h^3$ de donde $h = \sqrt[3]{4/0{,}0333} = 4{,}95$ cm, $F_4 = 2bt = 0{,}067h^2 = 1{,}63$ cm².

Este último perfil (el de doble T) resulta el más ventajoso en cuanto al peso: $F_1 = 4{,}5F_4$, $F_2 = 5{,}6F_4$, $F_3 = 1{,}7F_4$.

4.56. a) La fuerza q de cizallamiento entre la banda y el ala de la viga doble T por unidad de longitud es igual a QS/J, de donde $J = 76\,806 + 20 \cdot 1 \cdot 30{,}5^2 \cdot 2 = 114\,000$ cm⁴ es el momento de inercia de la sección de la viga y $S = 20 \cdot 1 \cdot 30{,}5 = 610$ cm³ es el momento estático de la sección de la banda respecto al eje central de la sección de la viga.

En la distancia e entre remaches la fuerza de cizallamiento es igual a qe. Esta fuerza actúa sobre dos remaches.

La condición de resistencia de los remaches al cizallamiento es: $qe/((\pi d^2/4)\,2) = [\tau]$, de donde $e = 31$ cm.

La condición de resistencia al aplastamiento es: $qe/(\delta \cdot d \cdot 2) = [\sigma_{ap}]$, de donde $e = 62$ cm.

Definitivamente $e = 31$ cm.

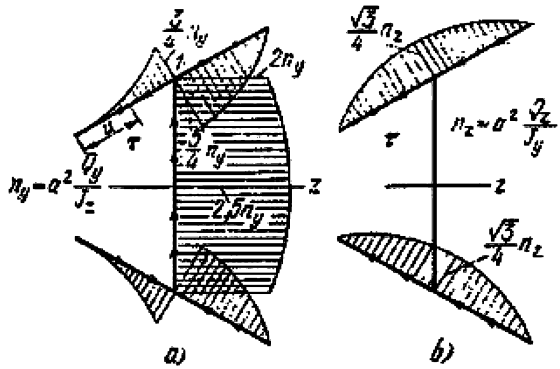
4.58. a) Según los datos $\sigma_{máx} = M/W = 6M/(bh^2) = [\sigma]$. De aquí $b = 6M/(h^2[\sigma])$, donde $|M| = qx^2/2$, es decir, $b = 3qx^2/(h^2[\sigma])$.

4.61. 1) Según la fórmula de Zhuravski $\tau = QS_z/(J_z t)$, donde $J_z = 0{,}5 \cdot 18^3/12 + 10 \cdot 1 \cdot 9{,}5^2 \cdot 2 = 2050$ cm⁴ es el momento de inercia de la sección transversal de la viga respecto al eje central z de la sección.

Construimos el diagrama τ para el ala: el momento estático de la parte seccionada u es igual a $S_z = 1 \cdot u \cdot 9{,}5$ cm³. Esto determina el carácter lineal del diagrama τ. El grosor del ala es igual a $t = 1$ cm.

Construimos el diagrama τ para el alma: el momento estático de la parte seccionada es igual a $S_z = S_z(v) = 10 \cdot 1 \cdot 9{,}5 + v \cdot 0{,}5\,(9 - v/2)$. Tenemos una dependencia cuadrática. El grosor del alma es $t = 0{,}5$ cm.

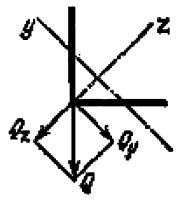
El diagrama τ está dado en la respuesta.



Para el problema 4.61(2)

2) *Durante la flexión en el plano vertical* (la fuerza cortante es Q_y) el momento estático $S_z(u)$ de la parte seccionada u a la izquierda aumenta junto con el crecimiento de u y aumenta también la distancia hasta el eje z (en este caso la

segunda derivada es positiva). A la derecha, junto con el crecimiento de u disminuye la distancia hasta el eje z (la segunda derivada es negativa). En el punto *1* (véase la figura) tenemos a la izquierda $S_z = at\cdot(a - a/4) = 3ta^2/4$ y a la derecha $S_z = 5ta^2/4$; estos dos resultados corresponden a tensiones tangenciales de distintas direcciones a lo largo del ala (como está representado en la figura), por eso los diagramas están trazados a diferentes lados del ala.



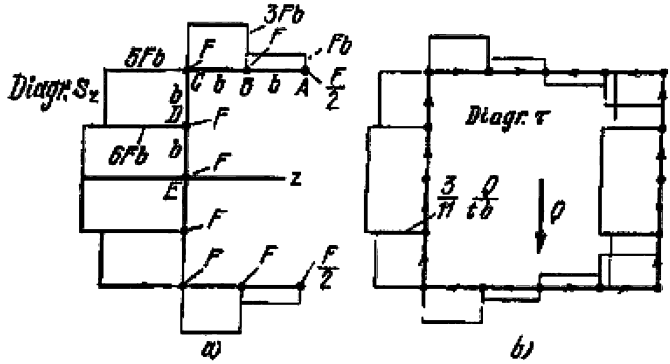
Para el problema 4.63(a)

Durante la flexión en el plano horizontal (la fuerza cortante es Q_z) el momento estático S (u) se calcula respecto al eje y. El diagrama τ está representado en la figura *b*.

4.63. a) *Indicación.* La carga está aplicada en el centro de flexión. Si descomponemos la fuerza P en las direcciones de los ejes principales de inercia de la sección, obtendremos $Q_z = Q_y = P/\sqrt{2}$. Luego utilizamos la fórmula de Zhuravski para cada una de las componentes halladas y sumamos los resultados.

b) Indicación. Puesto que en el plano longitudinal de simetría de la viga, por tener la carga simétrica, no hay tensiones tangenciales, cortamos por este plano la viga en dos partes. Cada parte se examina por separado. En este caso el problema se reduce al problema 4.62.

4.64. *c*) Tal como en el problema 4.63 *b* examinamos una mitad de la viga (véase la fig. *a*). Durante el cálculo del momento estático y del momento de



Para el prblema 4.64(c)

inercia no se toma en consideración el área de la sección del alma. Obtenemos

$$J_z = 2\left[\left(\frac{F}{2} + 2F\right)(2b)^2 + Fb^2\right] = 22Fb^2.$$

El momento estático es:

en el tramo AB, $S_z = (F/2)\cdot 2b = Fb$,
en el tramo BC, $S_z = Fb + F\cdot 2b = 3Fb$,
en el tramo CD, $S_z = 3Fb + F\cdot 2b = 5Fb$,
en el tramo DE, $S_z = 5Fb + Fb = 6Fb$.

El diagrama S_z está representado en la fig. *a*.

Las tensiones tangenciales se determinan por la fórmula de Zhuravski:

$$\tau = \frac{Q}{tJ_z}\cdot S_z.$$

La tensión τ es proporcional a S_z. Por eso la forma del diagrama τ (fig. *b*) es una repetición de la del diagrama S_z.

4.65. La distancia hasta el centro de flexión es D (véase la figura)

$$a = \frac{1}{J_z} 2 \int_{\alpha}^{\pi} rS_z\, ds = \frac{2r^3}{J_z} \int_{\alpha}^{\pi} S_z\, d\varphi, \qquad (1)$$

donde

$$S_z = S_z(\varphi) = \int_{\alpha}^{\varphi} (r \operatorname{sen} \beta)\, tr\, d\beta = r^2 t (\cos\alpha - \cos\varphi) \qquad (2)$$

es el momento estático de la parte cortada de la sección que se determina por el ángulo variable φ,

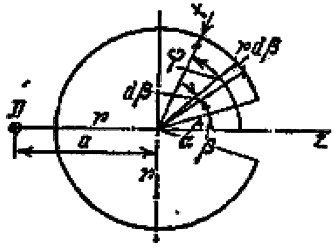
$$J_z = 2 \int_{\alpha}^{\pi} (r \operatorname{sen} \beta)^2\, tr\, d\beta = r^3 t (\pi - \alpha + \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\alpha) \qquad (3)$$

es el momento de inercia de la sección (cuando $\alpha = 0$ la fórmula (3) da la expresión conocida $J_z = \pi r^3 t$).

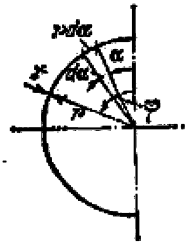
Teniendo en cuenta las fórmulas (2) y (3) obtenemos de la (1)

$$a = 2r \frac{(\pi - \alpha)\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{\pi - \alpha + 0{,}5 \operatorname{sen} 2\alpha}.$$

Cuando $\alpha \to 0$ obtenemos $a = 2r$. Cuando $\alpha \to \pi$, pasando al límite por la regla de L'Hospital, hallamos, tal y como debe ser, $a = r$.



Para el problema 4.65



Para el problema 4.66

4.66. En el plano de simetría de la viga no hay tensiones tangenciales. Por eso examinamos una mitad de la viga (véase la figura). Como en el problema anterior, tenemos un perfil abierto. Hallamos

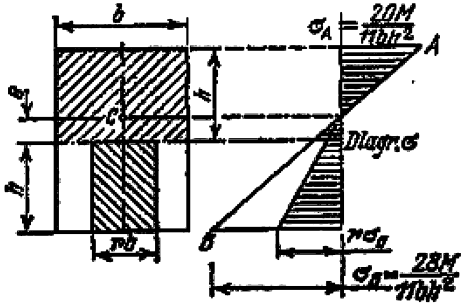
$$S(\varphi) = \int_{0}^{\varphi} (r\cos\alpha)\, tr\, d\alpha = tr^2 \operatorname{sen}\varphi,$$

$$S_{\max} = tr^2, \quad \tau_{\max} = \frac{Q}{2} \frac{S_{\max}}{tJ_z} = \frac{Q}{\pi r t}.$$

4.67. b), c). Véase la indicación para la solución del problema 4.63 b.

4.68. Las tensiones principales son $\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$. En la capa neutral $\sigma = 0$. Por consiguiente, $\sigma_{1,3} = \pm\tau$. Las tensiones tangenciales τ se determinan mediante la fórmula de Zhuravski.

4.71. *a*) Sustituimos el material de la barra inferior por el de la barra superior, conservando la rigidez de toda la viga. En este caso variamos la anchura de la barra inferior en la relación de $E_{inf} : E_{sup} = r$ (coeficiente de reducción) (véase la figura). El centro de gravedad de la sección se desplazará a una magnitud e que en nuestro caso será igual a $h/6$. El diagrama correspondiente de σ está representado por la recta AB. Las tensiones reales en la barra inferior son dos veces menores ($E_{inf} : E_{sup} = r = 0{,}5$). El diagrama de las tensiones reales está rayado.



Para el problema 4.71(a)

4.72. Las tensiones principales son $\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) + \tau^2}$, donde $\sigma = \frac{M}{J_z} \cdot \frac{r}{2}$, $\tau = \frac{Qr^2}{J_z} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ (véase la solución del problema 4.66), $J_z = \pi r^3 t$.

4.73. En el estado límite el área de la sección de la viga se divide en dos partes iguales por el eje neutro, es decir, (véase la figura del problema)

$$\frac{y_0^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{2},$$

de donde $y_0 = a/\sqrt{2}$.

En este caso el momento flector máximo es

$$\frac{q_{11m} l^2}{8} = \sigma_{f1} (S_{comp} + S_{tr}),$$

donde

$$S_{comp} = \frac{y_0^2}{2} \cdot \frac{y_0}{3} = 0{,}059a^3$$

y

$$S_{tr} = \frac{a(a-y_0)^2}{2} - \frac{(a-y_0)^2}{2} \cdot \frac{a-y_0}{3} = 0{,}039a^3$$

son los momentos estáticos de las partes superior (comprimida) e inferior (estirada) de la sección respecto al eje neutro.

Obtenemos $q_{11m} = \frac{8\sigma_{f1}}{l^2} \cdot 0{,}098a^3 = 236$ N/cm.

Determinamos la carga q_{f1}. En este caso el momento flector máximo es

$$\frac{q_{f1} l^2}{8} = \sigma_{f1} J \Big/ \left(\frac{2}{3} a\right),$$

donde $J = a^4/36$ es el momento de inercia de la sección de la viga respecto a su eje central.

De aquí

$$q_{f1} = \frac{8\sigma_{f1}}{l^2} \cdot 0{,}042a^3,$$

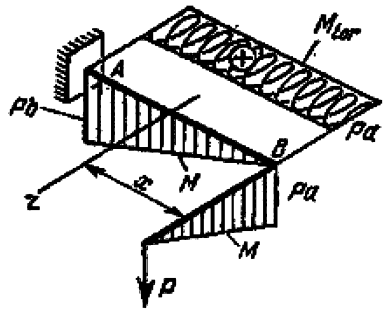
es decir, la carga q_{f1} es en 0,098/0,042 = 2,33 veces menor que la carga límite.

4.74. El momento flector límite $M_{f1} = 2S\sigma_{f1}$, donde S es el momento estático de media sección. Para el perfil doble T N° 20 según la tabla 7 del anexo tenemos $S = 104$ cm³. De aquí $M_{f1} = 5{,}0$ kN·m.

4.75. En el cálculo basado en el estado límite (véase la solución del problema anterior) el momento flector admisible es igual a $[M_{lím}] = M_{f1}/n_{f1} = 5{,}00/1{,}5 = 3{,}33$ kN·m. En el cálculo basado en las tensiones admisibles el momento flector admisible es $[M] = W[\sigma]$, donde $W = 181$ cm³ (de la tabla en la pág. 484) es el módulo resistente de la sección, $[\sigma] = \sigma_{f1}/n_{f1} = 240/1{,}5 = 160$ MPa. Obtenemos $[M] = 2{,}90$ kN·m.

4.77. *Indicación.* En estado límite el eje neutro divide el área de la sección de la viga en dos partes iguales.

4.79. En el tramo AB el momento flector, momento respecto al eje z de la sección, es igual a $P \cdot x$; las fibras comprimidas son las dispuestas abajo. Respectivamente el diagrama en el plano vertical lo trazamos por debajo. El diagrama de los momentos torsores M_{tor} puede ser representado en cualquier plano, poniendo el signo; rayamos este diagrama con una espiral para distinguirlo del diagrama de los momentos flectores M. En todas las secciones la fuerza cortante Q es igual a P.



Para el problema 4.79

4.80. a) Seccionamos la estructura por su centro, dividiendo la carga en dos partes iguales (fig. *a*). Determinamos los momentos flectores M_c. Componemos para eso la ecuación del equilibrio de la mitad de la estructura que es la ecuación de los momentos respecto al eje AB: $(P/2)\,c \cdot 2 - 2M_c = 0$. De aquí hallamos $M_c = Pc/2$.

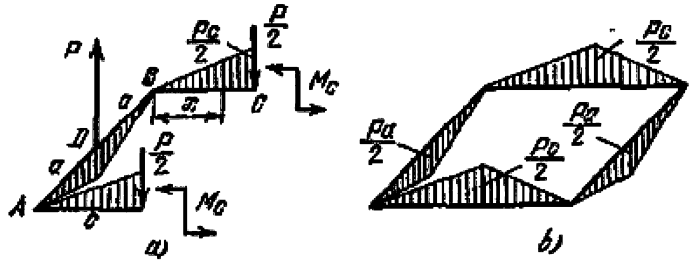
Para construir el diagrama de los momentos flectores en el tramo BC de la estructura componemos la expresión del momento flector en una sección arbitraria que se determina por la distancia variable x hasta el punto B:

$$M = M_c - \frac{P}{2}(c - x) = \frac{Px}{2}.$$

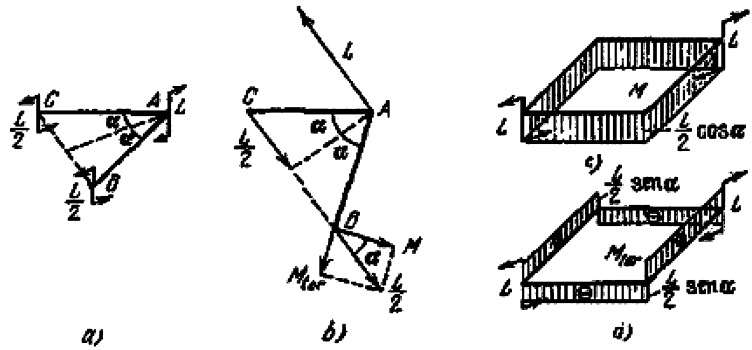
Por medio de esta ecuación obtenemos el diagrama tangencial M representado en la fig. *a*. De modo análogo construimos los diagramas M en las otras partes de la estructura. El diagrama completo de los momentos flectores está representado en la fig. *b*. El momento torsor en el tramo BD (fig. *a*) es $M_{tor} = \frac{P}{2}c - M_0 = 0$. Las barras de la estructura no trabajan a torsión.

b) Cortamos la estructura en el plano transversal a lo largo de la diagonal CB. Este es el plano de simetría de la carga, por eso en las secciones no hay fuerzas interiores antisimétricas. El esquema de equilibrio de la parte cortada de la estructura está representado en la fig. *a*. Descomponemos los momentos interiores $L/2$ en momentos flectores y torsores. La figura *b* muestra esta descomposición en planta, donde los momentos se indican en forma de vectores. Como se ve en

el tramo AB el momento flector $M = (L/2)\cos\alpha$; el momento torsor $M_{tor} = (L/2)\operatorname{sen}\alpha$. En el tramo AC el momento torsor es el mismo, pero de signo contrario. Los diagramas M y M_{tor} están representados en las figuras *c* y *d*.



Para el problema 4.80(a)

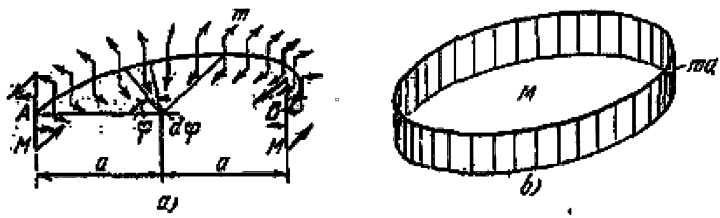


Para el problema 4.80(b)

4.81. Examinando una mitad del anillo (fig. *a*), componemos la ecuación de los momentos respecto al eje AB. El momento de la carga exterior es

$$\int_0^{\pi} ma \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = 2ma.$$

Este momento se equilibra por dos momentos flectores M en las secciones: $2ma = 2M$, de aquí hallamos que $M = ma$.

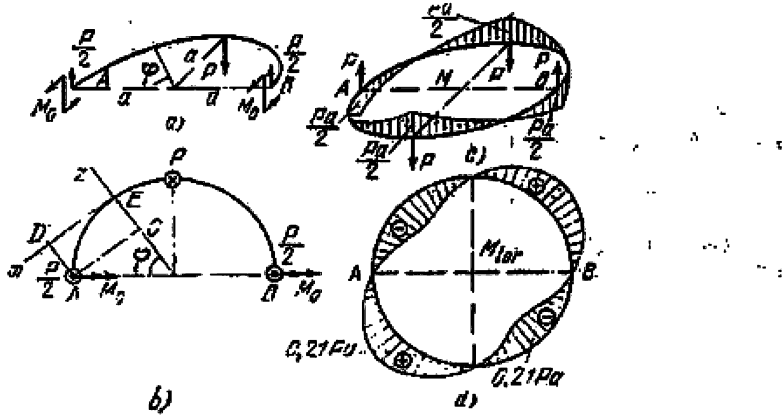


Para el problema 4.81

Puesto que la carga es simétrica respecto al centro del anillo, los momentos flectores son iguales en todas las secciones del anillo. El diagrama está representado en la fig. *b*.

La ausencia de momentos torsores en las secciones se debe a la simetría de la carga respecto al plano de la sección.

4.82. Teniendo en cuenta la simetría, examinamos medio anillo (fig. *a*). Determinamos los momentos flectores M_0 en las secciones por medio de la ecuación de momentos respecto al eje AB: $2M_0 - Pa = 0$. De aquí tenemos $M_0 = Pa/2$.



Para el problema 4.82

Escribimos las expresiones de los momentos flector y torsor en la sección determinada por el ángulo φ (fig. *a* y el plano, fig. *b*). El momento flector (momento respecto al eje transversal z):

$$M = M_0 \cos\varphi - \frac{P}{2} \cdot AC = \frac{Pa}{2} (\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi).$$

El momento torsor (momento respecto al eje longitudinal x):

$$M_{tor} = -M_0 \operatorname{sen}\varphi + \frac{P}{2} \cdot AD = -M_0 \operatorname{sen}\varphi + \frac{P}{2} \cdot CE =$$

$$= -\frac{Pa}{2} \operatorname{sen}\varphi + \frac{P}{2} (a - a\cos\varphi) = \frac{Pa}{2} (-\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi + 1).$$

De acuerdo con las ecuaciones obtenidas construimos los diagramas M y M_{tor} dentro de los límites $0 < \varphi < \pi/2$, es decir, de una cuarta parte del anillo. Luego teniendo en cuenta la simetría construimos los diagramas en las otras partes del anillo. El diagrama M (fig. *c*) está trazado del lado de las fibras comprimidas. El diagrama M_{tor} (fig. *d*) está construido en el plano del anillo. Para determinar el extremo del momento torsor igualamos a cero la primera derivada de M_{tor} por φ: $-\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi = 0$; el valor obtenido de $\varphi = \pi/4$ lo sustituimos en la expresión de M_{tor}. Hallamos

$$M_{tor} = \frac{Pa}{2} \left(-2\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) = -\frac{Pa}{2} (\sqrt{2} - 1) = -0{,}21Pa.$$

4.83. Las reacciones R en los apoyos se determinan a partir de las ecuaciones de las proyecciones de todas las fuerzas sobre la vertical: $2R - 2\pi aq = 0$, $R = \pi aq$. Para determinar los momentos flectores componemos la ecuación de los momentos para el semianillo (fig. *a*) respecto al eje A_1A_2:

$$2M_A + \int_0^{\pi} a \operatorname{sen}\varphi \cdot qa\, d\varphi - \pi aq \cdot a = 0,$$

de donde obtenemos $M_A = 0{,}57qa^2$. Ahora podemos expresar los momentos flector y torsor en la sección del anillo determinada por el ángulo φ:

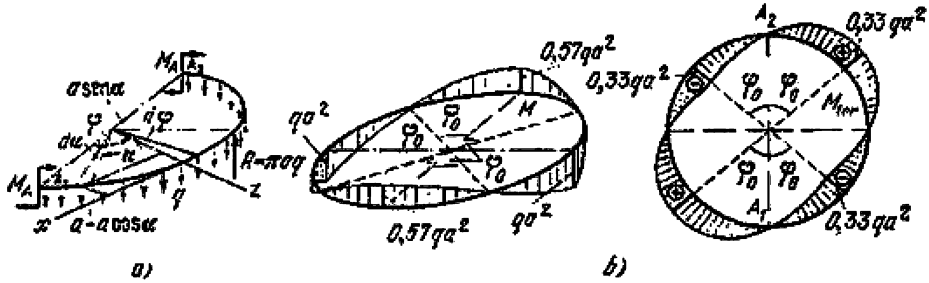
$$M = M_A \cos\varphi - \int_0^{\varphi} a \operatorname{sen}\alpha \cdot qa\, d\alpha = qa^2 (1{,}57\cos\varphi - 1);$$

$$M_{tor} = -M_A \operatorname{sen}\varphi + \int_0^{\varphi} (a - a\cos\varphi) \cdot qa\, d\alpha = qa^2 \left(-\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\varphi + \varphi\right).$$

Para determinar el valor φ_0 del ángulo φ correspondiente al máximo del momento torsor, igualamos a cero la derivada $dM_{tor}/d\varphi$:

$$-1{,}57\cos\varphi_0 + 1 = 0, \quad \cos\varphi_0 = 0{,}638, \quad \varphi_0 = 50°21'.$$

Con este valor de φ obtenemos $M_{tor} = -0{,}33qa^2$ que es la magnitud extremal del momento torsor. Los diagramas M y M_{tor} están representados en la figura *b*.



Para el problema 4.83

4.84. Examinamos el equilibrio de un elemento pequeño de la estructura (véase la figura). En un extremo del elemento están aplicados los momentos flector M y torsor M_{tor} y la fuerza cortante Q. En el otro respectivamente $M + dM$, $M_{tor} + dM_{tor}$, $Q + dQ$.

Componemos la ecuación de los momentos respecto al eje u que pasa por los centros de las secciones extremas del elemento:

$$(M_{tor} + dM_{tor})\cos\frac{d\varphi}{2} - M_{tor}\cos\frac{d\varphi}{2} - (M + dM)\operatorname{sen}\frac{d\varphi}{2} - M\operatorname{sen}\frac{d\varphi}{2} = 0.$$

Considerando $\cos\frac{d\varphi}{2} = 1$ y $\operatorname{sen}\frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}$ tenemos $dM_{tor} - (2M + dM)\frac{d\varphi}{2} = 0$. Rechazando dM, obtenemos $dM_{tor}/d\varphi = M$.

Para el problema 4.84

4.85. El voladizo está representado en la figura *a*. En la figura *b* se da una vista desde arriba; el momento L está aquí representado como un vector (está marcado con dos flechas).

Hacemos una sección en el tramo BC de la barra. La posición de la sección se determina por el ángulo variable φ.

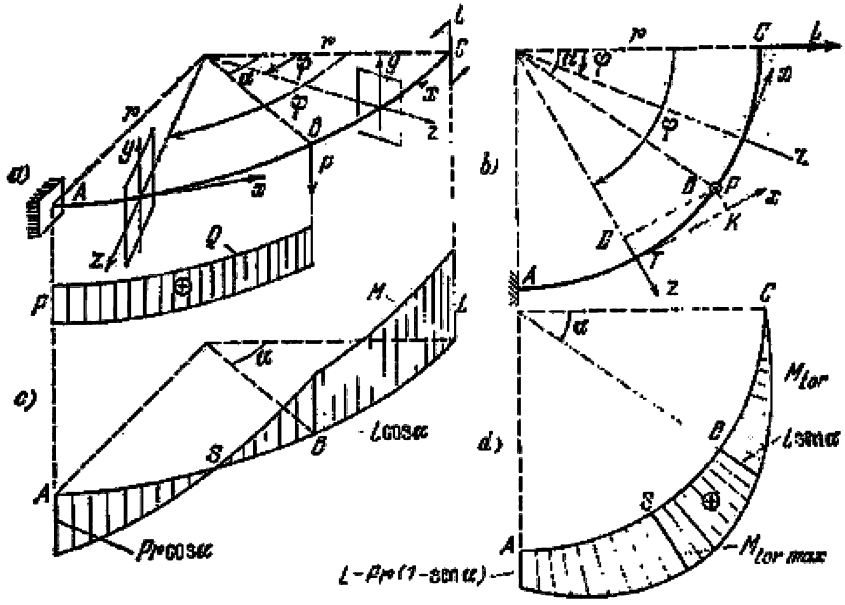
Como se ve el momento flector es

$$M = M_x = L \cos \varphi$$

y el momento torsor,

$$M_{tor} = M_z = L \operatorname{sen} \varphi.$$

Por estas ecuaciones en las figuras *c* y *d* están construidos los diagramas M y M_{tor} del tramo BC de la barra. El diagrama M se construye del lado de las fibras comprimidas, es decir, hacia arriba.



Para el problema 4.85

Cuando $\varphi > \alpha$ (tramo AB) es preciso tener también en cuenta la fuerza P. Las ecuaciones se modifican así (fig. *b*):

$$M = L \cos \varphi - P \cdot BD = L \cos \varphi - P \cdot r \operatorname{sen} (\varphi - \alpha), \qquad (1)$$

$$M_{tor} = L \operatorname{sen} \varphi - P \cdot BK = L \operatorname{sen} \varphi - P \cdot DT =$$
$$= L \operatorname{sen} \varphi - P [r - r \cos (\varphi - \alpha)]. \qquad (2)$$

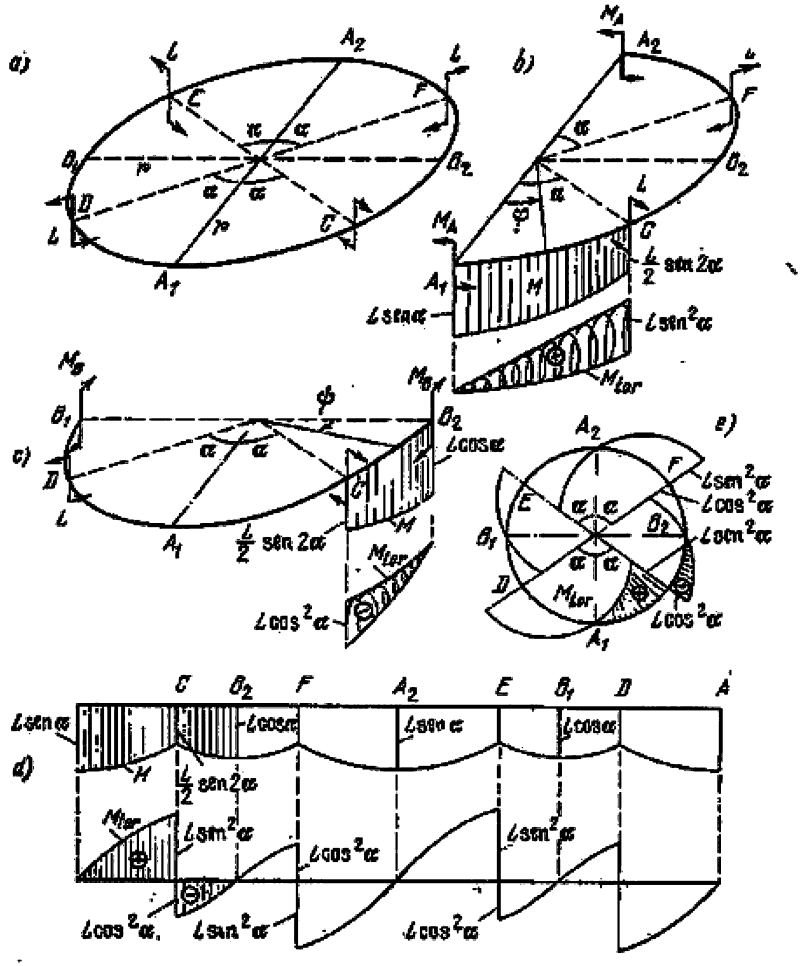
En la sección del tramo AB hay también una fuerza cortante

$$Q = Q_y = P.$$

Por las ecuaciones (1) y (2) pueden ser construidos los diagramas M y M_{tor} del tramo AB de la barra para la relación dada entre L y P. Estos diagramas están esquemáticamente representados en las figuras *c* y *d*. El punto nulo S del diagrama M indica la sección con M_{tor} máx (véase el problema anterior) (fig. *d*). El diagrama Q está construido en la fig. *a*.

Cuando $\varphi = 90°$ (junto al empotramiento) de las ecuaciones (1) y (2) tenemos $M = -Pr \cos \alpha$, $M_{tor} = L - Pr (1 - \operatorname{sen} \alpha)$.

4.86. Cortamos el anillo por el diámetro A_1A_2 (fig. *a*) y examinamos el equilibrio de una de sus mitades (fig. *b*). Para determinar los momentos interiores M_A en las secciones (los momentos torsores y las fuerzas cortantes en las secciones A_1 y A_2 son iguales a cero a causa de la simetría de la carga), componemos la ecuación de los momentos respecto al eje A_1A_2: $2M_A - 2L \operatorname{sen} \alpha = 0$. De aquí hallamos $M_A = L \operatorname{sen} \alpha$.



Para el problema 4.86

Escribimos las expresiones de los momentos flector y torsor en una sección que se determina por el ángulo arbitrario φ. Dentro de los límites $0 \leqslant \varphi < \alpha$ tenemos

$$M = M_A \cos \varphi \quad \text{y} \quad M_{tor} = M_A \operatorname{sen} \varphi,$$

o bien

$$M = L \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \quad \text{y} \quad M_{tor} = L \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi.$$

Por estas ecuaciones construimos los diagramas M y M_{tor} del tramo A_1C del anillo (fig. *b*).

Cortamos ahora el anillo por el diámetro B_1B_2 (fig. *a*) perpendicular al diámetro A_1A_2. Examinando el equilibrio del semianillo (fig. *c*), hallamos de modo análogo al anterior los momentos interiores M_B en las secciones B_1 y B_2: $M_B = L\cos\alpha$ y los momentos torsores y flectores en la sección que determina el ángulo ψ:

$$M = M_B\cos\psi = L\cos\alpha\cos\psi, \quad M_{tor} = -M_B\,\text{sen}\,\psi = -L\cos\alpha\,\text{sen}\,\psi.$$

Por estas ecuaciones construímos los diagramas M y M_{tor} en el tramo B_2C del anillo (fig. *c*).

De este modo están construídos los diagramas para la cuarta parte del anillo A_1CB_2. Mostramos estos diagramas en desarrollo (en la fig. *d* están rayados). Teniendo en cuenta la simetría de la carga, construímos los diagramas para las tres partes restantes del anillo (en la fig. *d* no están rayados). El diagrama M_{tor} también está representado en el plano del anillo (fig. *e*).

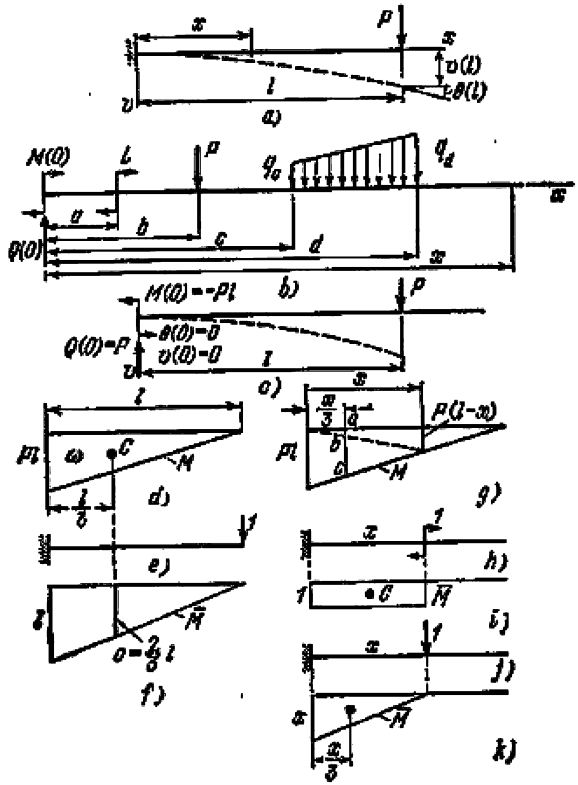
En el ejemplo que se examina las fuerzas cortantes son nulas en todas las secciones.

CAPÍTULO 5

DESPLAZAMIENTOS EN VIGAS Y ESTRUCTURAS SOMETIDAS A FLEXIÓN [1]

5.1. Mostraremos unos cuantos procedimientos para determinar v y θ en una sección arbitraria de la viga 11.

1) *Integración de la ecuación diferencial de la deformada de la viga.*



Para el problema 5.1(11)

La ecuación diferencial de la deformada de una viga de gran rigidez tiene la forma

$$EJ = \frac{d^2v}{dx^2} = -M. \qquad (1)$$

[1] Si no hay restricciones, se supone que la sección transversal de la viga es constante y se tiene solamente en cuenta la deformación por flexión.

Aquí x es la coordenada que se toma a lo largo del eje de la viga, $v = v(x)$ es la flecha de la viga en la sección con la coordenada x (es positiva, si está dirigida hacia abajo), EJ es la rigidez a la flexión de la viga, $M = M(x)$ es el momento flector.

En este caso (véase la fig. *a*) el momento flector es

$$M = -P(l - x) = -Pl + Px.$$

Por consiguiente, $EJv'' = Pl - Px$. De aquí

$$EJv' = Plx - \frac{Px^2}{2} + C_1, \quad EJv = \frac{Plx^2}{2} - \frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2.$$

Cuando $x = 0$ de acuerdo con las condiciones de apoyo de la viga (empotramiento rígido) $v = 0$ y $v' = \theta = 0$, es decir, $C_1 = C_2 = 0$. De este modo las ecuaciones incógnitas tienen la forma

$$\theta = v' = \frac{Pl}{EJ}x - \frac{P}{2EJ}x^2, \quad v = \frac{Pl}{2EJ}x^2 - \frac{P}{6EJ}x^3. \tag{2}$$

El ángulo de giro y la flecha en el extremo del voladizo se hallan mediante estas ecuaciones, considerando $x = l$: $\theta(l) = Pl^2/(2EJ)$, $v(l) = Pl^3/(3EJ)$.

2) *Empleo de las ecuaciones generales del método grafoanalítico.* El ángulo de giro y la flecha de la viga en la sección x se expresan por las fórmulas siguientes:

$$\theta(x) = \theta(0) - \int_0^x \frac{M(u)}{EJ(u)}\,du, \tag{3}$$

$$v(x) = v(0) + \theta(0)\,x - \int_0^x \frac{M(u)}{EJ(u)}(x - u)\,du.$$

Aquí $\theta(0)$ y $v(0)$ son los valores iniciales del ángulo de giro y de la flecha, u es la coordenada variable de la sección que varía desde 0 hasta x.

En nuestro caso $\theta(0) = v(0) = 0$, $M(u) = -P(l - u)$. De (3) obtendremos (2).

3) *Empleo del método de parámetros de origen (ecuaciones universales).* Para los tipos de carga principales (fig. *b*) de las ecuaciones generales (3) obtenemos las fórmulas siguientes:

$$EJ\theta(x) = EJ\theta(0) - M(0)\cdot x - Q(0)\frac{x^2}{2} - L\frac{(x-a)^2}{2} + P\frac{(x-b)^2}{2} + q_c\frac{(x-c)^3}{3!} - q_d\frac{(x-d)^3}{3!} + k\frac{(x-c)^4}{4!} - k\frac{(x-d)^4}{4!}, \tag{4}$$

$$EJv(x) = EJv(0) + EJ\theta(0)\,x - M(0)\frac{x^2}{2} - Q(0)\frac{x^3}{6} - L\frac{(x-a)^3}{3!} + P\frac{(x-b)^3}{3!} + q_c\frac{(x-c)^4}{4!} - q_d\frac{(x-d)^4}{4!} + k\frac{(x-c)^5}{5!} - k\frac{(x-d)^5}{5!}. \tag{5}$$

Aquí

$$k = (q_d - q_c)/(a - c).$$

En caso de varias cargas de un mismo tipo (por ejemplo, de varias fuerzas concentradas P) los sumandos correspondientes en las fórmulas (4) y (5) se repiten.

Al utilizar las fórmulas (4) y (5) se tienen solamente en cuenta los miembros referentes a las cargas dispuestas a la izquierda de la sección que se examina.

En este ejemplo las fuerzas que actúan sobre la viga están indicadas en la figura *c*; a la izquierda están representadas las reacciones en el empotramiento.

Por medio de las fórmulas (4) y (5) obtendremos la (2).

4) *Empleo del método de la carga unitaria (de Mohr)*, utilizando la regla de Vereschaguin o la fórmula de Simpson.

El desplazamiento elástico debido a la flexión de la viga se determina por la fórmula (integral de desplazamientos)

$$\Delta = \int_l \frac{M\overline{M}}{EJ}\, dx, \tag{6}$$

donde una de las magnitudes M o $\overline{M}$ (por ejemplo, M) es el momento flector corriente en la viga debido a la carga dada; $\overline{M}$, el momento flector corriente debido a la fuerza (o al momento) igual a la unidad aplicada a la viga en el lugar y en la dirección de la flecha incógnita (o del ángulo de giro); l, la longitud de la viga; EJ, la rigidez de la viga en el plano de flexión.

Si uno de los diagramas M o $\overline{M}$ (por ejemplo, $\overline{M}$) es rectilíneo (el otro puede ser arbitrario), la integral de desplazamientos, según A. Vereschaguin, se calcula como el producto del área Ω del diagrama reducido arbitrario $(M/(EJ))$ por la ordenada $\overline{M}_c$ del diagrama rectilíneo correspondiente al centro de gravedad del área Ω: $\Delta = \Omega\overline{M}_c$. Si la rigidez EJ es constante,

$$\Delta = \omega\overline{M}_c/(EJ) \quad \text{o} \quad EJ\cdot\Delta = \omega_c, \tag{7}$$

donde ω es el área del diagrama arbitrario; $\overline{M}_c$, la ordenada del diagrama rectilíneo que corresponde al centro de gravedad del área ω, la cual para abreviar se designa con la letra c.

A veces el área ω debe ser dividida en partes más simples. En estos casos en vez de (7) obtendremos

$$EJ\Delta = \sum_i \omega_i c_i, \tag{8}$$

donde ω_i es una parte del área ω y c_i son las ordenadas correspondientes del diagrama rectilíneo.

Las figuras *d*, *e*, *f* muestran la determinación de la flecha en el extremo del voladizo

$$v_{\text{máx}} = \frac{1}{EJ}\,\frac{l}{2}\cdot Pl\cdot\frac{2}{3}\,l = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Para determinar el ángulo $\theta\,(x)$ de giro de la sección x aplicamos aquí un momento igual a la unidad (fig. *h*). El diagrama correspondiente de los momentos flectores está representado en la fig. *i*. El área de este diagrama es $\omega = 1\cdot x = x$. Su centro de gravedad C se encuentra a la distancia $x/2$ del empotramiento. Determinamos la ordenada c del diagrama M (fig. *g*) a la misma distancia del empotramiento. Ella se determina como la longitud de la línea media del trapecio

$$c = [Pl + P\,(l - x)]/2 = Pl - Px/2.$$

Como en las soluciones anteriores el ángulo de giro incógnito $\theta\,(x) = \omega c/(EJ) = Plx/(EJ) - Px^2/(2EJ)$.

Para determinar la flecha $v\,(x)$ aplicamos una fuerza unitaria (fig. *j*). El correspondiente diagrama de momentos está representado en la fig. *k*. El área de este diagrama es $\omega = x^2/2$. Su centro de gravedad C se encuentra a la distancia $x/3$ del empotramiento. Determinamos la ordenada c del diagrama M a la misma

distancia. Esta ordenada se determina como la suma de dos segmentos $ab = \frac{1}{3} P(l-x)$ y $bc = \frac{2}{3} Pl$, es decir, $c = \frac{P}{3}(l-x) + \frac{2}{3} Pl = Pl - \frac{Px}{3}$. La flecha incógnita es $v(x) = \omega c/(EJ) = Plx^2/(2EJ) - Px^3/(6EJ)$.

Mostramos también el cálculo de la flecha $v(x)$ mediante la fórmula de Simpson (véase las figs. g y k):

$$EJv(x) = \int_0^x M\bar{M}\,dx = \frac{x}{6}\left[M(0)\bar{M}(0) + 4M\left(\frac{x}{2}\right)\bar{M}\left(\frac{x}{2}\right) + M(x)\bar{M}(x)\right] =$$

$$= \frac{x}{6}\left[Pl \cdot x + 4\,\frac{Pl + P(l-x)}{2}\,\frac{x}{2} + P(l-x)\cdot 0\right] = \frac{Plx^2}{2} - \frac{Px^3}{6}. \quad (9)$$

5.3. 11) Aprovechamos las fórmulas (4) y (5) (véase la pág. 283). Tenemos $v(0) = 0$. Para hallar $\theta(0)$ expresamos la condición $v(l) = 0$ con ayuda de la fórmula (5). Teniendo en cuenta que $M(0) = 0$ y $Q(0) = V_{izq} = P/2$, obtenemos

$$EJv(l) = EJ\theta(0)\,(l) - \frac{P}{2}\,\frac{l^3}{6} + \frac{P}{6}\left(l - \frac{l}{2}\right)^3 = 0,$$

de donde $\theta(0) = Pl^2/(16EJ)$.

Ahora por las fórmulas (4) y (5) hallamos las expresiones de θ y v. En el primer tramo de la viga

$$\theta = \frac{Pl^2}{16EJ} - \frac{P}{4}\,\frac{x^2}{EJ}, \qquad v = \frac{Pl^2}{16EJ}\,x - \frac{Px^3}{12EJ},$$

de donde, cuando $x = l/2$, tenemos, $v = Pl^3/(48EJ) = v_{máx}$; en el segundo tramo

$$EJ\theta = \frac{Pl^2}{16} - \frac{P}{2}\,\frac{x^2}{2} + \frac{P}{2}\left(x - \frac{l}{2}\right)^2$$

$$EJv = \frac{Pl^2}{16}\,x - \frac{P}{2}\,\frac{x^3}{6} + \frac{P}{6}\left(x - \frac{l}{2}\right)^3.$$

12) Mediante el método grafoanalítico determinamos el ángulo de giro del punto medio de la viga. Como se sabe

$$\theta = Q^f, \qquad v = M^f, \quad (10)$$

donde Q^f y M^f son la fuerza cortante y el momento flector de la viga ficticia correspondiente fijada de acuerdo con las analogías (10) y solicitada por la carga ficticia $q^f = M/(EJ)$.

Si la viga es de sección constante, se toma como carga ficticia $q^f = M$; en este caso

$$\theta = \frac{Q^f}{EJ} \quad \text{y} \quad v = \frac{M^f}{EJ}. \quad (11)$$

Admitiendo que el diagrama de momentos (véase la figura) es la carga, hallamos las reacciones en los apoyos A y B

$$V_A^f = -V_B^f = \left(\frac{L}{2}\,\frac{l}{2}\,\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{3}\right)\frac{1}{l} = \frac{Ll}{24};$$

de aquí

$$EJ\theta_A = Q_A^f = V_A^f = Ll/24, \qquad EJ\theta_B = Q_B^f = -V_B^f = Ll/24.$$

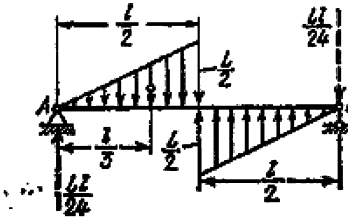
De este modo $\theta_A = \theta_B = Ll/(24EJ)$. El ángulo de giro y la flecha en la sección media de la viga son

$$\theta_{med} = \frac{Q^t_{med}}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{Ll}{24} - \frac{Ll}{8}\right) = -\frac{Ll}{12EJ},$$

$$v_{med} = \frac{M^t_{med}}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{Ll}{24}\,\frac{l}{2} - \frac{Ll}{8}\,\frac{l}{6}\right) = 0.$$

13) Determinamos el ángulo de giro junto al apoyo A por el método de Mohr aprovechando la regla de Vereschaguin. El diagrama de momentos M de la carga dada está representado en la fig. *a*. Su área es

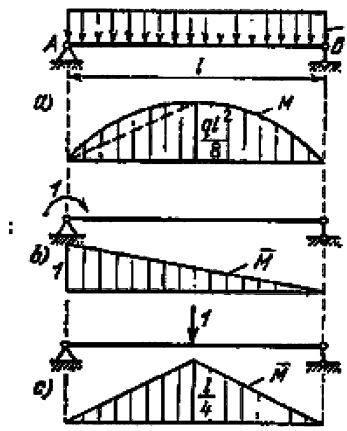
$$\omega = \frac{2l}{3}\,\frac{ql^2}{8} = \frac{ql^3}{12}. \qquad (12)$$



Para el problema 5.3(12)

El diagrama unitario M está representado en la fig. *b*. El ángulo de giro incógnito, según la fórmula (7) (pág. 284), es

$$\theta_A = \frac{\omega c}{EJ} = \frac{ql^3}{12}\,\frac{0{,}5}{EJ} = \frac{ql^3}{24EJ}.$$



Para el problema 5.3(13)

Determinamos la flecha máxima de la viga. El diagrama unitario M está representado en la fig. *c*. Separando el segmento parabólico del diagrama (mostrado en la fig. *a* con línea de trazos), determinamos su área ω_1 mediante la fórmula (12), introduciendo $l/2$ en vez de l. Obtenemos $\omega_1 = ql^3/96$. El área del triángulo es $\omega_2 = ql^3/32$. Por la fórmula (8) (pág. 284) la flecha incógnita es

$$y_{máx} = (\omega_1 c_1 + \omega_2 c_2)\frac{2}{EJ};$$

$$c_1 = \frac{l}{8}, \quad c_2 = \frac{l}{6}, \quad y_{máx} = \frac{5ql^4}{384EJ}.$$

5.7. *Cálculo de la sección según la condición de resistencia.* El momento flector máximo es $M_{máx} = Pl = 1{,}0$ kN·m. El módulo resistente necesario es $W = M_{máx}/[\sigma] = 6{,}25\ cm^3$. Tomamos el perfil Nº 5 cuyos $W = 9{,}1\ cm^3$ y $J = 22{,}8\ cm^4$.

Comprobación de la rigidez. La flecha máxima (véase el problema 5.1, 11) es $f = 2{,}93$ cm.

La flecha relativa $f/l = 2{,}93/400 > 1/400$, es decir, la rigidez es insuficiente.

Cálculo de la sección según la condición de rigidez.

Mediante la fórmula $f = \frac{Pl^3}{3EJ}$ obtenemos

$$\frac{f}{l} = \frac{Pl^2}{3EJ}, \quad J = \frac{Pl^2}{3E(f/l)} = 133\ cm^4.$$

Tomamos el perfil Nº 10 que tiene $J = 174\ cm^4$, $W = 34{,}8\ cm^3$. En este caso la flecha será igual a 0,382 cm $< l/400$. La tensión será $\sigma = M_{máx}/W = 28{,}4$ MPa. La relación de los pesos es 4,8/8,59 = 0,56.

5.10. Sin tener en cuenta el giro del empotramiento (véase el problema 5.1,2°)

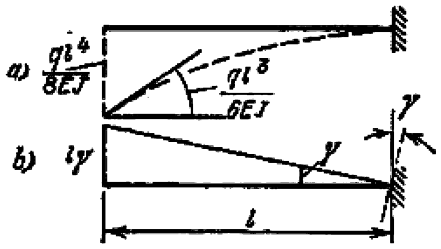
$$v(0)=\frac{ql^4}{8EJ}, \quad \theta(0)=-\frac{ql^3}{6EJ}. \qquad \text{(fig. } a\text{)}$$

El giro del empotramiento nos da (fig. *b*): $v(0) = -l\gamma$, $\theta(0) = \gamma$. Los desplazamientos totales serán: $v(0)=\frac{ql^4}{8EJ}-\gamma l$, $\theta(0)=-\frac{ql^3}{6EJ}+\gamma$.

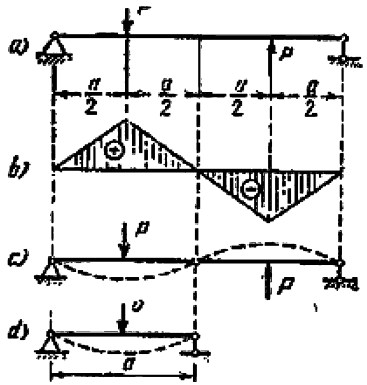
5.11. Los valores corrientes de θ y v se expresan así:

$$\theta(x)=\frac{Ll}{6EJ}\left(1-\frac{3x^2}{l^2}\right), \quad v(x)=\frac{Ll^2}{6EJ}\left(\frac{x}{l}-\frac{x^3}{l^3}\right).$$

La flecha $v(x)$ es la máxima cuando $\theta(x)$ es igual a cero, es decir, cuando $x = l/\sqrt{3}$. Mediante la ecuación para $v(x)$ hallamos $v_{máx}=\frac{Ll^2}{9\sqrt{3}EJ}=0{,}0641\frac{Ll^2}{EJ}$. La flecha en la sección media es $v(0{,}5l)=\frac{Ll^2}{16EJ}=0{,}0625\frac{Ll^2}{EJ}$.



Para el problema 5.10



Para el problema 5.12

5.12. *Indicación.* El diagrama de los momentos flectores está representado en la fig. *b*. El momento flector en la sección media de la viga es igual a cero. Por eso poniendo mentalmente en este lugar una articulación (fig. *c*) no cambiaremos la deformación de la viga; obtenemos dos vigas que se doblan por separado. El problema se reduce a la flexión de la viga por una fuerza aplicada en el punto medio (fig. *d*) (véase el problema 5.3, 11).

5.13. *b*) Resolvemos el problema por el método de Mohr aprovechando la regla de Vereschaguin.

El diagrama de los momentos flectores está representado en la fig. *b*. En el segundo y tercer tramos dividimos el diagrama en componentes simples (fig. *c*). Obtenemos las áreas: $\omega_1 = qa^2/6$, $\omega_2 = q(2a)^2/12$, $\omega_3 = \omega_7 = -qa^2$, $\omega_4 = \omega_5 = qa^2/4$, $\omega_6 = -qa^2$.

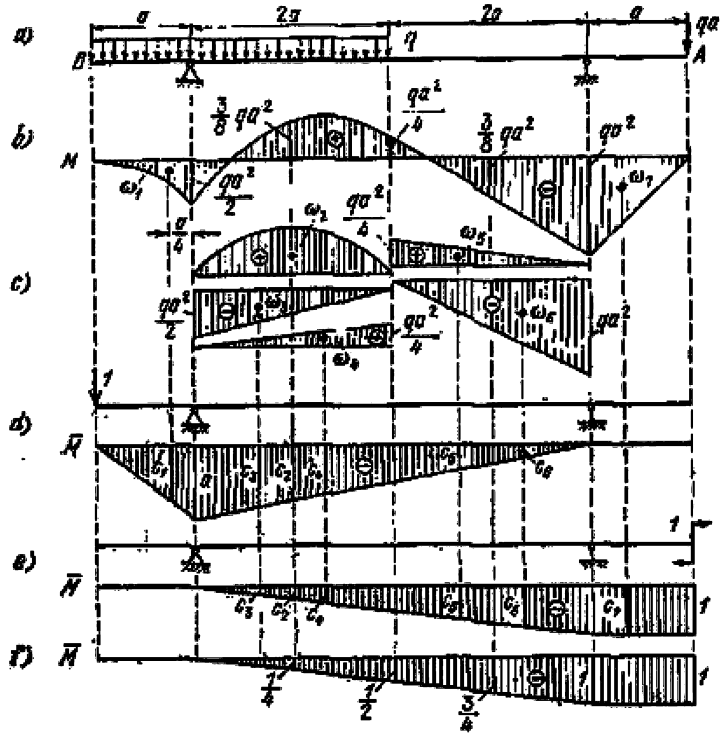
En el punto B aplicamos la fuerza *1* (fig. *d*). El diagrama correspondiente («unitarios») de los momentos $\overline{M}$ está representado en la fig. *d*. Las ordenadas de este diagrama correspondientes a los centros de gravedad de las áreas arriba halladas $\omega_1, \ldots, \omega_6$ tienen los siguientes valores: $c_1 = -3a/4 = c_2$, $c_3 = -5a/6$, $c_4 = -2a/3$, $c_5 = -a/3$, $c_6 = -a/6$.

Según la fórmula (8), la flecha incógnita en el punto B es

$$v_B = (\omega_1 c_1 + \omega_2 c_2 + \ldots + \omega_6 c_6)/(EJ).$$

Es más cómodo efectuar estos cálculos en forma de tabla.

	ω	c	ωc
1	$-\frac{1}{3}a\frac{qa^2}{2}$	$-\frac{3}{4}a$	$\frac{1}{8}qa^4$
2	$\frac{1}{12}q(2a)^3$	$-\frac{3}{4}a$	$-\frac{1}{2}qa^4$
3	$-\frac{1}{2}2a\frac{qa^2}{2}$	$-\frac{5}{6}a$	$\frac{5}{12}qa^4$
4	$\frac{1}{2}2a\frac{qa^2}{4}$	$-\frac{2}{3}a$	$-\frac{1}{6}qa^4$
5	$\frac{1}{2}2a\frac{qa^2}{4}$	$-\frac{1}{3}a$	$-\frac{1}{12}qa^4$
6	$-\frac{1}{2}2a\cdot qa^2$	$-\frac{1}{6}a$	$\frac{1}{6}qa^4$
			$-\frac{1}{24}qa^4$



Para el problema 5.18(b)

Obtenemos $v_B = -qa^4/(12EJ)$. El signo menos en el resultado significa que el punto B no se desplaza hacia abajo, como está dirigida la fuerza 1, sino hacia arriba.

Para determinar el ángulo de giro en el punto A aplicamos en este punto un momento igual a 1 (fig. *e*) y construimos el diagrama correspondiente de los momentos flectores $\overline{M}$.

Obtenemos $c_1 = -1/4$, $c_2 = -1/6$, $c_3 = 1/3$, $c_4 = -2/3$, $c_5 = -5/6$, $c_7 = -1$. El ángulo de giro incógnito $\theta_A = (\omega_1 c_1 + \ldots + \omega_7 c_7)/(EJ) = qa^3/(EJ)$. El signo más en el resultado obtenido significa que el giro del eje de la barra en el punto A se efectúa en el mismo sentido en que actúa el momento aplicado 1, es decir, en el sentido de las agujas del reloj.

Mostremos también el cálculo de θ_A mediante la fórmula de Simpson:

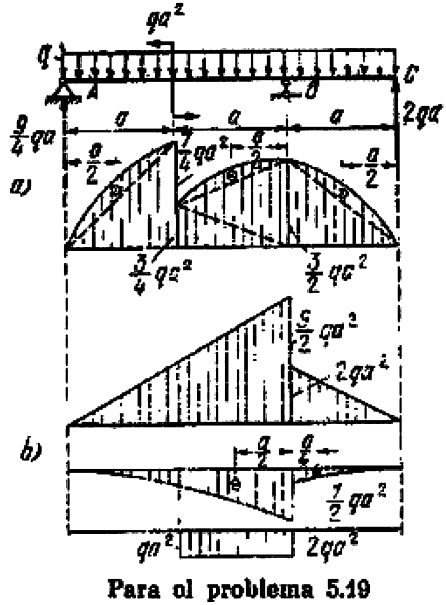
$$EJ\theta_A = \sum \left[M(0)\cdot\overline{M}(0) + 4M\left(\frac{l}{2}\right)\cdot\overline{M}\left(\frac{l}{2}\right) + M(l)\cdot\overline{M}(l)\right] l/6. \quad (15)$$

La suma es válida para todos los tramos de la viga (l es la longitud de un tramo). Calculando (véanse las figuras *b* y *f*), hallamos

$$EJ\theta_A = \left[-\frac{qa^2}{2}\cdot 0 + 4\cdot\frac{3}{8}qa^2\left(-\frac{1}{4}\right) + q\frac{a^2}{4}\cdot\frac{1}{2}\right]\frac{2a}{6} +$$
$$+\left[\frac{qa^2}{4}\cdot\frac{1}{2} + 4\left(-\frac{3}{8}qa^2\right)\left(-\frac{3}{4}\right) + (-qa^2)(-1)\right]\frac{2a}{6} +$$
$$+\left[(-qa^2)(-1) + 4\left(-\frac{qa^2}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + 0\cdot 1\right]\frac{a}{6} = qa^3.$$

5.19. *Indicación.* El diagrama de los momentos flectores está representado en la fig. *a*, donde se indica la división aconsejable del diagrama, al utilizar la regla de Vereschaguin. El área de cada segmento parabólico es igual a $qa^3/12$. El centro de gravedad del segmento se encuentra siempre en la sección media.

En la fig. *b* está mostrado otro método de dividir el diagrama llamado separación (respecto a la sección B) por las cargas. A la izquierda están construidos por separado los diagramas debidos a la reacción $R_A = 9qa/4$, debido a la carga q y al momento concentrado qa^2; a la derecha, los debidos a la fuerza concentrada $2qa$ y a la carga q. El área de cada diagrama parabólico es igual a un tercio del producto de la base por la altura.



Para el problema 5.19

5.22. *Indicación.* Para determinar el ángulo θ_{AB} es necesario en el estado unitario de la viga según Mohr aplicar en las secciones A y B momentos iguales a la unidad dirigidos al encuentro uno del otro.

5.24. *Indicación.* Para simplificar la solución hace falta examinar la deformación de la viga obtenida, sustituyendo el voladizo por el momento correspondiente. En este caso es cómodo aprovechar las soluciones de los problemas 5.3 y 5.1.

Para determinar el desplazamiento del voladizo es necesario actuar como está indicado en la solución del problema 5.10, teniendo en cuenta el ángulo de giro en el comienzo del voladizo.

5.32. Para determinar los parámetros iniciales incógnitos $\theta(0)$ y $v(0)$ se examinan las condiciones en el extremo derecho de la viga: $\theta(l)=0$, $v(l)=0$. Sustituyendo en la ecuación (4) (pág. 283) el valor de $x=l=6$ m y las otras magnitudes numéricas obtenemos

$$0=EJ\theta=-8\cdot 6-\frac{1\cdot 6^2}{2}-2(6-1)+\frac{6}{2}(6-2)^2+\frac{2}{6}(6-3)^3+\frac{3}{24}(6-4)^4,$$

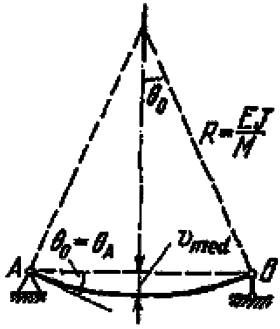
de donde $EJ\theta(0)=17{,}00$ kN·m².

De la ecuación (5), cuando $x=l=6$ m, hallamos $0=EJv(0)+17{,}00\cdot 6-\frac{8}{6}\cdot 6^3-\frac{1}{6}\cdot 6^3-\frac{2}{2}(6-1)^3+\frac{6}{6}(6-2)^3+\frac{2}{24}(6-3)^4+\frac{3}{120}(6-4)^5$, o $EJv(0)=31{,}50$ kN·m².

Conociendo los valores de $EJ\theta(0)$ y $EJv(0)$ podemos mediante las ecuaciones (4) y (5) escribir las ecuaciones incógnitas de los diagramas $\theta(x)$ y $v(x)$ para cada tramo de la viga (véase la respuesta). Los diagramas $\theta(x)$ y $v(x)$ se dan en la respuesta. En los diagramas están indicados los valores de $\theta(x)$ y $v(x)$ multiplicados por $EJ=8\cdot 10^4$ kN·m². El ángulo de giro inicial y la flecha inicial son:

$$\theta(0)=17{,}00/(8\cdot 10^4)=0{,}000212,$$

$$v(0)=31{,}50/(8\cdot 10^4)\text{ m}=0{,}0394\text{ cm}.$$



Para el problema 5.48

5.34. Las condiciones para determinar las constantes son: 1) cuando $x=0$ $v=0$, 2) cuando $x=l$ $v=\lambda$, donde $\lambda=0{,}5ql\cdot h/(E_2F)$ es el alargamiento de la barra de acero.

5.47. La curvatura $1/R$ del eje de la barra doblada es igual a $M/(EJ)$. Pero $2\pi R=l$, por consiguiente, $M/(EJ)=2\pi/l$, de donde $M=2\pi EJ/l$.

5.48. La *solución aproximada* (mediante la ecuación $d^2v/dx^2=M/(EJ)$) es: $v_{med}=l\alpha/2$, $\theta_A=-\theta_B=2\alpha$, de donde $\alpha=Ml/(EJ)$ (véase la respuesta para el problema 5.3, 2).

El desplazamiento del apoyo se halla por medio de la expresión

$$\Delta=\frac{1}{2}\int_0^l (v')^2\,dx=\frac{1}{2E^2J^2}\int_0^l\left(\frac{Ml}{2}-Mx\right)^2 dx=\frac{M^2l^3}{24E^2J^2}=\frac{2}{3}l\alpha^2.$$

La *solución exacta* (mediante la ecuación $d\theta/ds=1/R=M/(EJ)$). Como se ve en la figura $v_{med}=R-R\cos\theta_0=R\cdot 2\operatorname{sen}^2(\theta_0/2)$, pero $\theta_0=\frac{l/2}{R}=\frac{Ml}{2EJ}$, por consiguiente, $v_{med}=\frac{EJ}{M}2\operatorname{sen}^2\frac{Ml}{2EJ}=\frac{l}{2\alpha}\operatorname{sen}^2\alpha$. El desplazamiento del apoyo es

$$\Delta=l-2R\operatorname{sen}\theta_0=l-2\frac{EJ}{M}\operatorname{sen}\frac{Ml}{2EJ}=l\left(1-\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2\alpha}\right).$$

5.52. El ángulo de giro mutuo de secciones infinitamente cercanas es $d\theta=\alpha t\,dx/h$ (véase la fig. *a*). De aquí la integral de Mohr tendrá la forma

$$\int\frac{M\overline{M}\,dx}{EJ}=\int\overline{M}\,d\theta=\frac{\alpha t}{h}\int\overline{M}\,dx \qquad (13)$$

Para determinar el ángulo de giro θ_A en el apoyo A el diagrama unitario $\overline{M}$ tiene la forma indicada en la fig. b: $\overline{M} = x/l$. Según la fórmula (13) obtenemos

$$\theta_A = \frac{\alpha t}{h} \int_0^l \frac{1}{l} x\, dx = \frac{\alpha t l}{2h}.$$

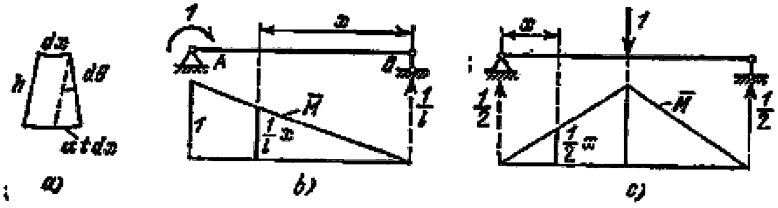
El diagrama unitario $\overline{M}$ necesario para determinar la flecha f está representado en la fig. c: $\overline{M} = x/2$. Según la fórmula (13) obtenemos

$$f = \frac{\alpha t}{h} 2 \int_0^{l/2} \frac{x}{2}\, dx = \frac{\alpha t l^2}{8h}.$$

5.55. 11) La ecuación diferencial de la flexión de la viga al calentar ésta de manera desigual por arriba y por abajo, tiene la forma

$$v'' = -t\alpha/h, \qquad (14)$$

donde t es la diferencia de temperaturas de las fibras superiores e inferiores; α, el coeficiente de dilatación calorífica del material; h, la altura de la sección transversal de la viga.



Para el problema 5.52

Haciendo la integración, obtenemos $\theta = v' = -t\alpha x/h + C_1$. Hallamos la constante de integración a partir de la condición $\theta = 0$ cuando $x = l/2$. Tenemos $C_1 = \frac{t\alpha l}{2h}$.

Efectuando la integración una vez más, obtenemos $v = -\frac{t\alpha x^2}{2h} + \frac{t\alpha l x}{2h} + C_2$.

Puesto que cuando $x = 0$, $v = 0$, entonces $C_2 = 0$.

5.56. 11) Aprovechamos el método grafoanalítico (véanse las fórmulas (10) en la pág. 285). En la figura está representado el diagrama $\frac{M}{EJ}$ considerado como carga ficticia. Obtenemos

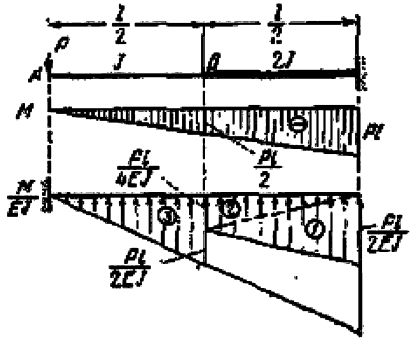
$$\theta_A = Q_A^l = -\Omega_1 - \Omega_2 - \Omega_3 = -\frac{5Pl^2}{16EJ},$$

$$v_A = M_A^l = \Omega_1 \left(\frac{l}{2} + \frac{2}{3}\frac{l}{2}\right) + \Omega_2 \left(\frac{l}{2} + \frac{1}{3}\frac{l}{2}\right) + \Omega_3 \frac{2}{3}\frac{l}{2} = \frac{3Pl^3}{16EJ}.$$

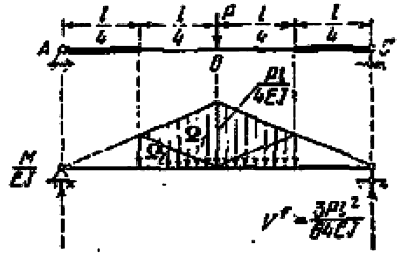
Aquí Ω_1, Ω_2, Ω_3 son las áreas de los triángulos *1*, *2* y *3* que componen el diagrama $M/(EJ)$ (véase la figura). Por ejemplo, $\Omega_1 = \frac{1}{2}\frac{l}{2}\frac{Pl}{2EJ}$.

12) Construimos el diagrama $M/(EJ)$ (véase la figura). Para los tramos absolutamente rígidos de la viga las ordenadas de este diagrama son iguales a cero. El área del diagrama es $\Omega = 2\Omega_1 + 2\Omega_2$, donde $\Omega_1 = \frac{Pl}{4EJ}\frac{l}{4}\frac{1}{2} = \frac{Pl^2}{32EJ}$, $\Omega_2 = \frac{Pl^2}{64EJ}$. Obtenemos $\Omega = \frac{3Pl^2}{32EJ}$. De aquí los ángulos de giro en los apoyos son $\theta_A = \theta_C = \frac{\Omega}{2} = \frac{3Pl^2}{64EJ}$ y la flecha en la sección media es

$$f_{med} = \frac{\Omega}{2}\frac{l}{2} - \Omega_2\frac{2}{3}\frac{l}{4} - \Omega_1\frac{1}{3}\frac{l}{4} = \frac{7}{384}\frac{Pl^3}{EJ}.$$



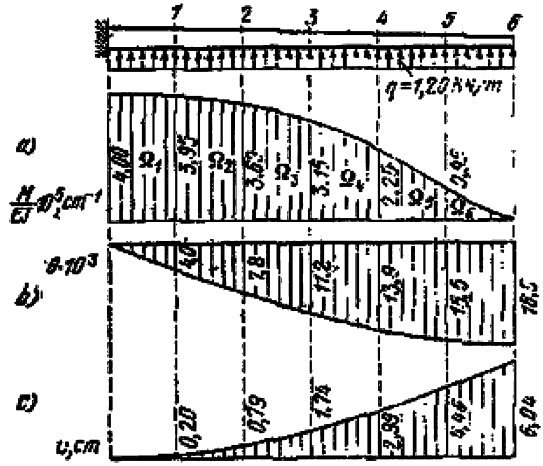
Para el problema 5.56(11)



Para el problema 5.56(12)

5.58. Utilicemos las ecuaciones generales (3) (pág. 283).

El momento flector $M(x) = q(l-x)^2/2$. Los valores de M, calculados mediante esta fórmula, y los valores de $M/(EJ)$ están indicados en las columnas 5



Para el problema 5.58

y 6 de la tabla para las secciones 1, 2, . . ., 6 con intervalos $s = 100$ cm a lo largo de la viga. El diagrama $M/(EJ)$ está representado en la fig. *a*. En la columna 7 de la tabla se dan las áreas Ω de los tramos del diagrama $M/(EJ)$ entre

las secciones. Estas áreas están determinadas aproximadamente, como áreas de trapecios; ellas dan los valores

$$\int_{x}^{x+s} \frac{M}{EJ}\, du.$$

Como la viga está empotrada rigidamente, $\theta(0) = v(0) = 0$; por consiguiente, para cualquier sección n

$$\theta_n = -\sum_{i=1}^{n} \Omega_i$$

y

$$v_n = -\int_{0}^{x} \frac{M}{EJ}(x-u)\, du = v_{n-1} - s \sum_{i=1}^{n-1} \Omega_i - \frac{s}{2}\Omega_n.$$

Por estas fórmulas precisamente ha sido efectuado el cálculo de las ordenadas de los diagramas θ y v en las 4 últimas columnas de la tabla. Los diagramas θ y v están representados en las figuras b y c (el diagrama v está trazado en el sentido de la flecha real).

n (secciones)	i (intervalos)	x, cm	$J \cdot 10^{-3}$, cm^4	M, kN·cm	$\frac{M}{EJ} \cdot 10^3$, cm^{-1}	$\Omega \cdot 10^3$	$\theta_n = -\sum_{i=1}^{n} \Omega_i$	Cálculo de v		
								$\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{n-1} \Omega_i$	$50\Omega_n$, cm	$v_n = v_{n-1} - (16) - (17)$, cm
0		0	54,0	2160	4,00		0	—	—	0
	1					3,97				
1		100	38,0	1500	3,95		−3,97·10⁻³	0	0,198	−0,198
	2					3,82				
2		200	26,0	960	3,69		−7,79·10⁻³	0,397	0,191	−0,786
	3					3,42				
3		300	17,1	540	3,16		−11,22·10⁻³	0,779	0,171	−1,736
	4					2,70				
4		400	10,7	240	2,25		−13,91·10⁻³	1,121	0,135	−2,992
	5					1,61				
5		500	5,6	60	0,96		−15,52·10⁻³	1,391	0,080	−4,463
	6					0,48				
6		600	3,4	0	0		−16,00·10⁻³	1,552	0,024	−6,039

5.61. 2) La ley de variación del diámetro se ha tomado por la variante 6: $d(x) = d_0(1 + \sqrt[3]{x/l})$. La integral de Mohr para determinar la flecha en el punto K es:

$$y_K = \int_{0}^{l} \frac{M\bar{M}}{EJ}\, dx,$$

donde $M = -qx^2/2$ es el momento flector corriente debido a la carga dada; $\bar{M} = -1 \cdot x$, el momento flector debido a la fuerza unitaria aplicada en el pun-

to K; $J = \pi d^4(x)/64$, el momento de inercia de la sección corriente. Después de la sustitución obtenemos

$$y_K = \frac{32ql^4}{\pi E d_0^4} c, \quad \text{donde} \quad c = \int_0^1 \frac{t^2}{(1+\frac{4}{7}t)^4}\, dt.$$

Admitimos las siguientes designaciones:

	q	l	E	d_0	t	función subintegral	valor de la integral	flecha y_K
identificador	Q	AL	E	D	T	FUN	C	YK

Al componer el programa en el idioma fortrán es conveniente aprovechar el subprograma estándar de cálculo de la integral definida de la biblioteca en el sistema OCEC, por ejemplo, el programa QG4 o cualquier otro programa existente en el suministro matemático del ordenador dado. Se puede componer un subprograma propio.

Aprovechamos el subprograma llamado GINT que permite calcular la integral definida mediante el método de Gauss con una exactitud dada. El subprograma GINT puede ser escrito en la máquina como un programa estándar o incluido en el programa fundamental (como está hecho más abajo). Este subprograma comienza por el operador FUNCTION GINT (EXT, A, B, EPS), donde EXT es el nombre de la función subintegral (arriba está designada como FUN), A y B son los límites de integración (en nuestro caso $A = 0$, $B = 1$), EPS es el error relativo dado (nos limitamos al cálculo de la integral con una exactitud de hasta un 1%, es decir, consideramos que EPS = 0,01).

Más abajo está escrita la variante posible del programa

```
1234567
      EXTERNAL FUN
      C = GINT (FUN, Ø., 1., Ø. Ø1)
      READ (5.1 Ø) Q, AL, D, E
      YK = 32*Q*AL**4/(3.14*E*D**4)*C
1Ø    FORMAT (3F6.4. E8.2, 'Q, L, D, E')
      WRITE (6.2 Ø) Q, AL, D, E, C, YK
2Ø    FORMAT (25X, E1Ø.3, 'Q, L, D, E, C, YK')
      STOP
      END
      FUNCTION (FUN(T))
      FUN = T**3/(1 + T**(1./4.))**4
      RETURN
      END
      FUNCTION GINT (EXT, A, B, EPS)
      DIMENSION U(4), W(4)
      DATA M/4/,
*U/.8611363116,.339981Ø436,—.339981Ø436,—.8611363116/,
*W/.3478548451,.6521451549,.6521451549,.3478548451/
      N = 1
      OTB = Ø
1     Y = OTB
      OTB = Ø
      D = (B — A)/N*Ø.5
      DO 2 I = 1,N
      DO 2 K = 1,M
2     OTB = OTB + W (K)*EXT (A + D*(2*I — 1 — U (K)))*D
      N = N + N
```

```
      IF (ABS (OTB — Y).GT.ABS (EPS*OTB)) GO TO 1
      GINT = OTB
      RETURN
      END
```

Durante la formación de las tarjetas perforadas con los datos iniciales es necesario escribir previamente los valores de q, l, d_0 y E en newtones y metros: $q = 0{,}0021$ N/m, $l = 1{,}53$ m, $d_0 = 0{,}024$ m, $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ N/m^2. Es cómodo escribir los primeros tres números en la especificación F destinando a ellos seis posiciones, cuatro de las cuales se destinan para los quebrados. Para eso los números 1,53 y 0,024 deben ser escritos como 1,5300 y 0,0240. El módulo de elasticidad es cómodo escribirlo en la especificación E, es decir, representar este número en la forma $0{,}21E + 12$. De acuerdo con esto está escrito FORMAT con una marca 10.

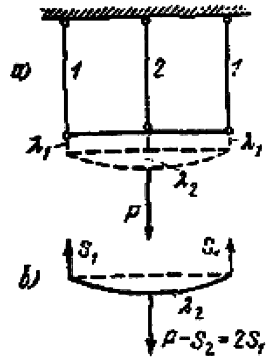
La tarjeta perforada con los datos iniciales tiene el siguiente aspecto:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Ø	•	Ø	Ø	2	1	1	-	5	3	Ø	Ø	Ø	•	Ø	2	4	Ø	Ø	•	2	1	E	+	1	2

El FORMAT con la marca 20 sacá para la impresión en columna con espacios de 25 posiciones, los valores de los datos iniciales q l, d_0, E y de las magnitudes calculadas de c e y_K en la forma E, con tres cifras en la parte fraccionaria.

El conjunto de las tarjetas perforadas deben incluir también las directoras (guías); el juego de estas últimas depende del tipo de ordenador.

De los datos impresos obtenemos $y_K = 2{,}99$ cm. Si la sección es constante el cálculo nos da $y_K = 42{,}1$ cm, cuando $d = d_0$, e $y_K = 2{,}63$ cm, cuando $d = 2d_0$.



Para el problema 5.64

5.64. Designamos los esfuerzos en los tirantes extremo y medio por S_1 y S_2 (fig. *a*). En este caso

$$\lambda_1 = \frac{S_1 h}{E_{ac} F}, \quad \lambda_2 = \frac{S_2 h}{E_{ac} F} = (P - 2S_1) \frac{h}{E_{ac}} F.$$

La flecha de la viga es igual a $\lambda_2 - \lambda_1$. Por otro lado esta flecha puede ser expresada como para una viga cargada por la fuerza en la sección media (fig. *b*), de tal modo: $\frac{2S_1 l^3}{48 E_{dur} J}$ (véase el problema 5.8,11). Por consiguiente,

$$\frac{(P - 2S_1) h}{E_{ac} F} - \frac{S_1 h}{E_{ac} F} = \frac{2S_1 l^3}{48 E_{dur} J}.$$

De aquí $S_1 = P/(3 + \beta)$, donde $\beta = l^3 E_{ac} F/(24 h E_{dur} J)$. Sustituyendo los datos numéricos, hallamos $\beta = 3{,}60$, $S_1 = 0{,}76$ kN, $S_2 = P - 2S_1 = 3{,}48$ kN. La tensión máxima en la viga es $\sigma = \frac{S_1 (l/2)}{2W} = 38{,}6$ MPa.

5.65. Despreciando la deformación de la viga, es decir, considerando que $J = \infty$, obtenemos $\beta = 0$ y $S_1 = P/3$. Despreciando la deformación de los tirantes, es decir, considerando que $F = \infty$, hallamos $\beta = \infty$ y $S_1 = 0$.

5.67. a) *Indicación.* Usando la respuesta del problema 5.66 se puede escribir: $M_B = -4EJ\theta_B/l$, $M_A = -M_B/2 = 2EJ\theta_B/l$.

5.70. 11) Presentamos cuatro métodos de solución.

1) Haciendo uso de la ecuación de los tres momentos (véase la solución del problema 5.79), obtendremos

$$2M(0)\, l = -6 \frac{l}{2} \frac{Pl}{4} \frac{1}{2},$$

de donde hallamos $M(0) = -3Pl/16$. Luego con ayuda de la ecuación del equilibrio hallamos $Q(0) = 11P/16$.

Conociendo $Q(0)$ y $M(0)$ calculamos por medio de las fórmulas (4) y (5) los desplazamientos incógnitos.

Véase el diagrama M en la respuesta.

2) Con ayuda de la fórmula (5) expresamos la condición de igualdad a cero de la flecha en el extremo derecho de la viga:

$$-M(0)\frac{l^2}{2} - Q(0)\frac{l^3}{6} + P\frac{(l-l/2)^3}{6} = 0.$$

Resolviendo esta ecuación junto con la ecuación de equilibrio $M(0) + Q(0)\,l - P(l/2) = 0$, hallamos los valores de $Q(0)$ y $M(0)$ y luego mediante las fórmulas (4) y (5) determinamos los desplazamientos incógnitos.

3) Sustituimos el apoyo derecho por su reacción X. La flecha en el extremo del voladizo debida a la fuerza X es igual a $f_X = -\frac{Xl^3}{8EJ}$ (véase el problema 5.1, 11). La flecha debida a la carga (véase el problema 5.1, 3) es $f_P = \left(-\frac{Pl^3}{24EJ}\right) \times \left(3l - \frac{l}{2}\right) = \frac{5Pl^3}{48EJ}$. Según los datos del problema la suma de f_X y f_P es igual a cero, de aquí $X = 5P/16$. De esta manera eliminamos la hiperestaticidad de la viga. Luego se determinan las reacciones en el apoyo izquierdo y mediante las ecuaciones (4) y (5) se hallan los desplazamientos incógnitos.

4) La última solución puede ser también escrita en la forma canónica del método de fuerzas: $X_1\delta_{11} + \Delta_{1P} = 0$. Suponiendo que X_1 es la reacción en el apoyo derecho tenemos

$$\Delta_{1P} = \frac{5Pl^3}{48EJ} \text{ y } \delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}.$$

Obtenemos de nuevo $X_1 = \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{5P}{16}$.

5.78. Supongamos que la viga superior soporta la acción de una parte de la carga P igual a P_1 y que la viga inferior soporta P_2. En este caso

$$P_1 + P_2 = P. \tag{15}$$

Las flechas de ambas vigas en sus secciones medias son iguales. La flecha de la primera viga (véase el problema 5.3, *a*) es $\frac{P_1 l^3}{48EJ_1}$, la flecha de la segunda viga es $\frac{P_2 l^3}{48EJ_2}$. Por consiguiente,

$$\frac{P_1 l^3}{48EJ_1} = \frac{P_2 l^3}{48EJ_2}. \tag{16}$$

Resolviendo conjuntamente las ecuaciones (15) y (16) obtenemos las incógnitas P_1 y P_2.

5.79. Incógnitas son los tres momentos de apoyo (fig. *a*): M_1, M_2 y M_3 ($M_3 = -40 \cdot 0{,}5 = -20$ kN·m). Componemos tres ecuaciones de los tres momentos.

La ecuación de los tres momentos en la forma general para la viga de sección constante es la siguiente:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6V\frac{l}{a_n}$$

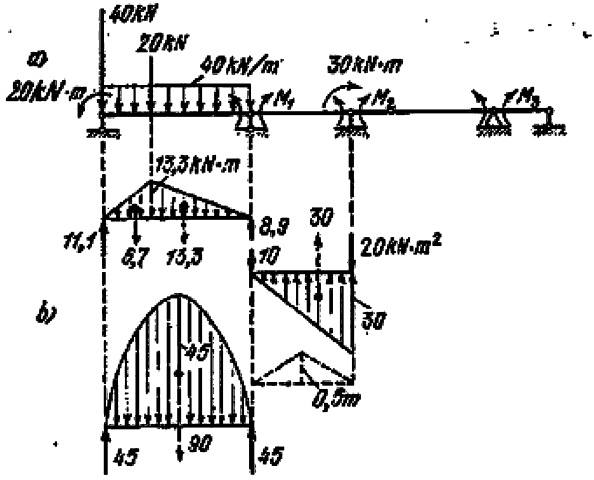
donde $V_n^f = \omega_n a_n/l_n + \omega_{n+1} b_{n+1}/l_{n+1}$ es la reacción ficticia en el apoyo debida a las luces contiguas. En el caso presente escribiremos:

$$\begin{aligned} M_0 l_1 + 2M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 &= -6V_1^f, \\ M_1 l_2 + 2M_2 (l_2 + l_3) + M_3 l_3 &= -6V_2^f, \\ M_2 l_3 + 2M_3 l_3 &= -6V_3^f. \end{aligned} \qquad (17)$$

Hallamos las reacciones ficticias V^f, considerando los diagramas de los momentos como cargas para las diversas luces (fig. *b*) (el momento exterior igual a 30 kN·m lo referimos a la segunda luz):

$$V_1^f = 8{,}9 + 45{,}0 - 10{,}0 = 43{,}9 \text{ kN·m}^2, \quad V_2^f = -20 \text{ kN·m}^2, \quad V_3^f = 0.$$

Después de sustituir los valores numéricos y resolver el sistema (17) hallaremos $M_1 = -24{,}3$ kN·m, $M_2 = 19{,}9$ kN·m, $M_3 = 9{,}95$ kN·m.



Para el problema 5.79

Los diagramas M y Q se dan en la respuesta (trazamos previamente las ordenadas M_0, M_1, M_2 y M_3 y añadimos al diagrama obtenido debido a los momentos de apoyo los diagramas construidos antes (fig. *b*).

Las reacciones de los apoyos son:

$$V_0 = 40 + 20/3 + 20 \cdot 2/3 + 40 \cdot 3/2 - 24{,}3/3 = 111{,}9 \text{ kN},$$

$$V_1 = -20/3 + 20 \cdot 1/3 + 40 \cdot 3/2 + 24{,}3/3 + 24{,}3/2 - 30/2 + 19{,}9/2 = 75{,}2 \text{ kN}.$$

Hallamos análogamente $V_2 = -17{,}0$ kN y $V_3 = 9{,}0$ kN.

A 1,30 m de distancia del apoyo O el diagrama Q tiene un punto cero. Por consiguiente, en esta sección el momento flector tiene su valor máximo. Este se calcula así:

$$M_{máx} = (111{,}9 - 40) \cdot 1{,}30 - 20 - 40 \cdot 1{,}30^2/2 - 20 \cdot 0{,}30 = 33{,}4 \text{ kN·m}.$$

Hallamos la sección de la viga, $W_{neces} = M_{máx}/[\sigma] = 240$ cm³.

Seleccionamos la viga en doble T N° 22 a, cuyo módulo resistente es $W = 254$ cm³.

Para determinar la flecha v_{1-2}^{med} en la sección media de la luz $1-2$ construimos el diagrama unitario de momentos de dicha luz (está representado en la fig. *b* en la parte baja con línea de puntos). Multiplicando (según Vereschaguin) el área $0{,}5 \cdot 2/2 = 0{,}5$ m² de este diagrama por la ordenada media $-(24{,}30 + 10{,}1)/2 = -17{,}2$ kN·m del diagrama M y dividiendo el resultado por $EJ = 5{,}58 \cdot 10^3$ kN·m², obtendremos $v_{1-2}^{med} = -1{,}54 \cdot 10^{-3}$ m. El signo menos significa que la flecha está dirigida hacia arriba (en sentido contrario a la dirección de la fuerza 1).

5.82. Si la viga soporta un calentamiento desigual por arriba y por abajo, la ecuación de los tres momentos tiene la forma

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -3\frac{EJ}{h}\alpha(t_n l_n + t_{n+1}l_{n+1}), \quad (18)$$

donde t_n es la diferencia entre las temperaturas de las fibras inferiores y superiores de la n-ésima luz, t_{n+1} es lo mismo, pero en la luz $(n+1)$, α es el coeficiente de dilatación térmica del material, h es la altura de la sección transversal de la viga.

5.83. a) Según la ecuación (18) (véase la indicación para el problema 5.82) obtenemos $2M_1 l = -\frac{3EJ\alpha t l}{h}$, de donde $M_1 = -\frac{3EJ\alpha t}{2h}$ y $\sigma_{máx} = \frac{M_1}{W} = \frac{3E\alpha t}{4}$. Determinamos las reacciones en los apoyos: $R_1 = -R_2 = \frac{3EJ\alpha t}{2hl}$. Teniendo en cuenta la ecuación (14) (pág. 291), escribimos la ecuación diferencial de la línea elástica de la viga

$$v'' = -\frac{M}{EJ} - \frac{\alpha t}{h} = -\frac{M_1 + R_1 x}{EJ} - \frac{\alpha t}{h} = \frac{\alpha t}{2h} - \frac{3}{2}\frac{\alpha t}{hl}x.$$

Haciendo la integración doble de esta ecuación teniendo en cuenta los datos iniciales ($v = 0$ y $v' = 0$) obtenemos $v = -\frac{\alpha t x^3}{4hl} + \frac{\alpha t x^2}{4h}$.

Cuando $x = \frac{2l}{3}$ tenemos la flecha máxima $\frac{\alpha t l^2}{27h}$.

b) A partir de la simetría del sistema respecto al apoyo medio reducimos el problema al caso examinado arriba.

5.87. b) La ecuación de los cinco momentos para una viga que descansa sobre apoyos elásticos tiene la forma

$$M_{n-2}\zeta_{n,\,n-2} + M_{n-1}\zeta_{n,\,n-1} + M_n\zeta_{n,\,n} + M_{n+1}\zeta_{n,\,n+1} + M_{n+2}\zeta_{n,\,n+2} + \zeta_{n,P} = 0, \quad (19)$$

donde

$$\zeta_{n,\,n-2} = \frac{\varepsilon_{n-1}}{l_{n-1}l_n}, \quad \zeta_{n,\,n-1} = \frac{l_n}{6EJ_n} - \left[\frac{\varepsilon_{n-1}}{l_n}\left(\frac{1}{l_{n-1}} + \frac{1}{l_n}\right) + \frac{\varepsilon_n}{l_n} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}}\right)\right].$$

$$\zeta_{n,\,n} = \frac{l_n}{3EJ_n} + \frac{l_{n+1}}{3EJ_{n+1}} + \left[\frac{\varepsilon_{n-1}}{l_n^2} + \varepsilon_n\left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}}\right)^2 + \frac{\varepsilon_{n+1}}{l_{n+1}^2}\right],$$

$$\zeta_{n,\,n+1} = \frac{l_{n+1}}{6EJ_{n+1}} - \left[\frac{\varepsilon_n}{l_{n+1}}\left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}}\right) + \frac{\varepsilon_{n+1}}{l_{n+1}}\left(\frac{1}{l_{n+1}} + \frac{1}{l_{n+2}}\right)\right],$$

$$\zeta_{n,\,n+2} = \frac{\varepsilon_{n+1}}{l_{n+1}l_{n+2}},$$

$$\zeta_{n,\,p} = [\tau_B^n] + [\tau_A^{n+1}] + V_{n-1}^0\frac{\varepsilon_{n-1}}{l_n} - V_n^0\varepsilon_n\left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}}\right) + V_{n+1}^0\frac{\varepsilon_{n+1}}{l_{n+1}},$$

donde ε_n es la elasticidad del apoyo n, V_n^k es la carga sobre el apoyo n (se supone que los apoyos son articulados), $[\tau_B^n]$ es el ángulo de giro del extremo derecho del vano n como de una viga con apoyos articulados debido a la carga dada, de una torcedura térmica o inicial, $[\tau_A^{n+1}]$ es lo mismo, pero del extremo izquierdo de la luz $n+1$.

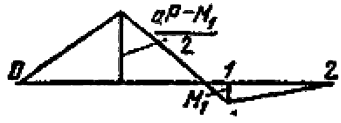
En nuestro caso obtenemos

$$\zeta_{1,1}=\frac{2a}{3EJ}+\frac{a}{3EJ}+\left[\frac{\varepsilon}{4a^2}+\varepsilon\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{\varepsilon}{a^2}\right]=\frac{2a^3+7\varepsilon EJ}{2a^2EJ},$$

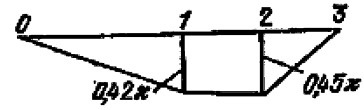
$$\zeta_{1,P}=\frac{1}{4}\frac{Pa^2}{EJ}+\frac{P}{2}\frac{\varepsilon}{2a}-\frac{P}{2}\varepsilon\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{a}\right)=\frac{P}{2}\frac{a^3-2\varepsilon EJ}{2aEJ},$$

$$M_1=\frac{\zeta_{1,P}}{\zeta_{1,1}}=-\frac{Pa}{2}\frac{a^3-2\varepsilon EJ}{2a^3+7\varepsilon EJ};$$

cuando $a^3>2\varepsilon EJ$ el diagrama M tiene la forma representada en la figura; cuando $a^3<2\varepsilon EJ$ el momento M_1 es positivo y el diagrama M tiene un mismo signo en toda su longitud.



Para el problema 5.87(b)



Para el problema 5.87(c)

c) Componemos un sistema de dos ecuaciones de los cinco momentos (19) (véase la solución del problema 5.87, *b*):

$$M_1\zeta_{1,1}+M_2\zeta_{1,2}+\zeta_{1,P}=0,\quad M_1\zeta_{2,1}+M_2\zeta_{2,2}+\zeta_{2,P}=0,$$

$$\zeta_{1,1}=\frac{2a}{3EJ}+\frac{a}{3EJ}+\left[\frac{\varepsilon}{4a^2}+\varepsilon\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{\varepsilon}{a^2}\right]=1{,}35\frac{a}{EJ},$$

$$\zeta_{1,2}=\frac{a}{6EJ}-\left[\frac{\varepsilon}{a}\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{a}\right)+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)\right]=-0{,}183\frac{a}{EJ}.$$

$\zeta_{1,P}=\frac{\alpha ta}{2h}$ (h es la altura de la sección de la viga, α es el coeficiente de dilatación lineal del material),

$$\zeta_{2,1}=\frac{a}{6EJ}-\frac{\varepsilon}{a}\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)=-0{,}183\frac{a}{EJ},$$

$$\zeta_{2,2}=\frac{a}{3EJ}+\frac{a}{3EJ}+\left[\frac{\varepsilon}{a^2}+\varepsilon\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{\varepsilon}{a^2}\right]=\frac{1.267a}{EJ},$$

$$\zeta_{2,P}=\frac{\alpha ta}{2h}.$$

Resolviendo el sistema, obtenemos $M_1=-0{,}42\varkappa$, $M_2=-0{,}45\varkappa$ (véase la figura), donde $\varkappa=\alpha tEJ/h$.

5.88. a) Cuando el momento sobre el apoyo medio es igual a cero (aquí se puede introducir mentalmente una articulación) la reacción en este apoyo es igual a $ql/2$. En este caso la flecha en la sección media de la viga es

$$v_{med}=\frac{5ql^4}{384EJ}-\frac{ql}{2}\frac{l^3}{48EJ}=\frac{ql^4}{384EJ}.$$

Igualando esta flecha con el asiento del apoyo $\frac{ql}{3}\varepsilon$, obtenemos $\varepsilon = \frac{l^3}{192EJ} = 3{,}68 \cdot 10^{-6}$ m/N.

5.89. La ecuación de los tres momentos considerando los asientos de los apoyos tiene la forma

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6\left(\frac{\Omega_n a_n}{l_n} + \frac{\Omega_{n+1}b_{n+1}}{l_{n+1}} - 6EJ\left(\frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n}{l_{n+1}} - \frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{l_n}\right)\right). \quad (20)$$

En nuestro caso obtenemos dos ecuaciones:

$$2M_1 \cdot 2l + M_2 l = -6 \cdot \frac{1}{2} l \frac{Pl}{4} \frac{1}{2} - 6EJ\left(-\frac{\Delta_1}{l} - \frac{\Delta_1}{l}\right),$$

$$M_1 l + 2M_2 \cdot 2l = -6EJ\frac{\Delta_1}{l},$$

de donde $M_2 = 0$, $M_1 = -6EJ\Delta_1/l^2$.

5.90. Al retirar el apoyo B obtenemos la flecha δ_2 en el punto B bajo la acción de la fuerza P. Esta flecha se anula por la acción de la reacción X en el apoyo B. Esta reacción provoca una flecha opuesta δ_X.

De la solución del problema 5.56, 11 tenemos $\delta_X = \frac{3Xl^3}{16EJ}$. Del mismo modo determinamos $\delta_P = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{Pl}{2} \cdot \frac{1}{2EI} \cdot \frac{5}{6} l = \frac{5}{96} \frac{Pl^3}{EJ}$.

De la condición $\delta_P = \delta_X = 0$ hallamos

$$X = \frac{5}{18} P.$$

El diagrama M está representado en la respuesta.

El caso 5.90 b es análogo al examinado.

5.91. Es cómodo utilizar la ecuación de los tres momentos (véase la solución del problema 5.79), pero en este caso de diferentes rigideces en las luces la ecuación tiene la forma

$$M_{n-1}\frac{l_n}{J_n} + 2M_n\left(\frac{l_n}{J_n} + \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}}\right) + M_{n+1}\frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} = -6\left(\frac{\omega_n a_n}{J_n l_n} + \frac{\omega_{n+1}b_{n+1}}{J_{n+1}l_{n+1}}\right).$$

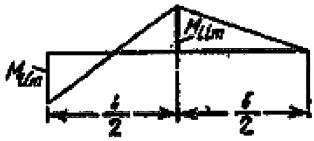
5.93. a) El diagrama de los momentos flectores en el estado límite está representado en la figura. Escribimos las condiciones de la formación de M_{1lm} en las secciones A y C:

$$M_A = R_B l - P_{1lm} l/2 = -M_{1lm}, \quad M_C = R_B l/2 = M_{1lm}. \quad (21)$$

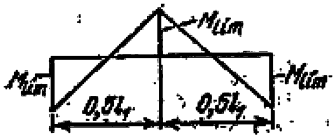
Aquí $M_{1lm} = \sigma_{fl}(S_{comp} + S_{tr}) = \sigma_{fl} W k_{1lm}$ es el valor límite del momento flector (véase la solución del problema 4.73); el coeficiente k_{1lm} para la sección rectangular es igual a 2,5; para la sección circular es igual 1,7 (véase la respuesta

del problema 4.76) para la sección rómbica es igual a 2; W es el módulo resistente; σ_{t1} es el límite de fluencia.

De la ecuación (21) hallamos $R_B = 2M_{1lm}/l$, $P_{1lm} = 6M_{1lm}/l$.



Para el problema 5.93(a)

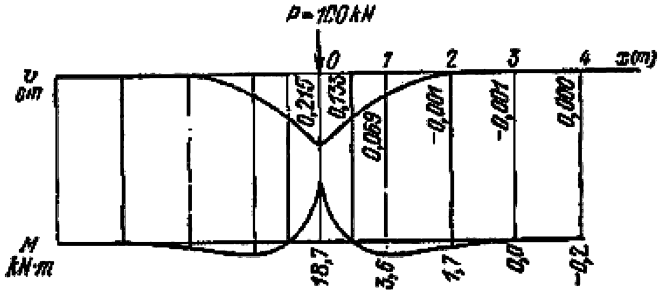


Para el problema 5.96

5.96. El diagrama de los momentos flectores en el vano 1—2 en el estado límite está representado en la figura. Tenemos $M_{1lm} = P_{1lm}l_1/8$. De aquí $P_{1lm} = 8M_{1lm}/l_1$.

5.98. Calculamos la característica de la viga

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = \sqrt{\frac{30}{4 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1229}} = \frac{1}{75}\ \frac{1}{\text{cm}}.$$



Para el problema 5.98

La longitud reducida de la viga es $\beta l = 1500/75 = 20 > 6$. Por consiguiente, el cálculo puede efectuarse como para una viga infinitamente larga. La flecha y el

x, cm	$\beta x = \frac{x}{75}$	$\eta(x)$	$\eta_1(x)$	$v(x) = 0{,}215\eta(x)$, cm	$M(x) = 18{,}7\eta_1(x)$, kN·m
0	0	1	1	0,215	18,7
25	0,333	0,91	0,44	0,195	8,2
50	0,667	0,62	0,08	0,133	1,5
75	1,000	0,51	−0,11	0,110	−2,1
100	1,333	0,32	−0,19	0,069	−3,6
150	2,000	0,07	−0,18	0,001	−3,4
200	2,667	−0,03	−0,09	−0,001	−1,7
300	4,000	−0,03	0,00	−0,001	0,0
400	5,333	0,00	0,01	0,000	0,2
500	6,667	0,00	0,00	0,000	0,0

momento flector se expresan así:

$$v(x)=\frac{P}{8EJ\beta^3}\,e^{-\beta x}(\operatorname{sen}\beta x+\cos\beta x)=\frac{P}{8EJ\beta^3}\,\eta(x)=0{,}215\beta(x)\ [\text{cm}],$$

$$M(x)=\frac{P}{4\beta}\,e^{-\beta x}(\cos\beta x-\operatorname{sen}\beta x)=\frac{P}{4\beta}\,\eta_1(x)=18{,}7\eta_1(x)\ [\text{kN}\cdot\text{m}].$$

Los cálculos según estas fórmulas se dan en la tabla (los valores de $\eta(x)$ y $\eta_1(x)$ son tomados de la tabla 1 del anexo).

Los diagramas v y M están representados en la figura.

La flecha máxima $v(0)=\frac{P}{8EJ\beta^3}=0{,}215$ cm. El momento flector máximo $M(0)=\frac{P}{4\beta}=18{,}7$ kN·m.

5.99. Suponemos que el origen de coordenadas se encuentra debajo de la rueda media. En este caso el momento flector en la sección bajo dicha rueda se expresará así:

$$M=\sum\frac{P}{4\beta}\eta_1=\frac{1}{4\beta}\sum P\eta_1.$$

La distancia x desde esta sección hasta cada una de las ruedas es igual a: $x^{\text{I}}=289$ cm, $x^{\text{II}}=143$ cm, $x^{\text{III}}=0$, $x^{\text{IV}}=154$ cm, $x^{\text{V}}=289$ cm. Las magnitudes correspondientes de βx son:

$$\beta x^{\text{I}}=289/75=3{,}85;\quad \beta x^{\text{II}}=143/75=1{,}90;$$

$$\beta x^{\text{III}}=0;\qquad \beta x^{\text{IV}}=1{,}90;\quad \beta x^{\text{V}}=3{,}85.$$

Los coeficientes η_1 de la influencia de las ruedas (de la tabla 1 del anexo) son:

$$\eta_1^{\text{I}}=\eta_1^{\text{V}}=-0{,}0024,\quad \eta_1^{\text{II}}=\eta_1^{\text{IV}}=-0{,}190,\quad \eta_1^{\text{III}}=1.$$

El momento flector es

$$M=\frac{75}{4}[(80{,}3+89{,}4)(-0{,}0024)+(80{,}5+87{,}2)(-0{,}190)+89{,}0\cdot 1]=$$

$$=1060\ \text{kN}\cdot\text{cm}=10{,}6\ \text{kN}\cdot\text{m}.$$

La influencia de las ruedas vecinas disminuye el momento flector debajo de la rueda media aproximadamente en un 36%.

La tensión es $\sigma=M/W=58{,}8$ MPa.

5.100. Tenemos solamente en cuenta la influencia de las ruedas III, IV y V. El momento flector es

$$M=\frac{75}{4}[89{,}0(-0{,}0024)+87{,}2(-0{,}190)+89{,}4\cdot 1]=1370\ \text{kN}\cdot\text{cm}=13{,}7\ \text{kN}\cdot\text{m}.$$

La tensión es $\sigma=M/W=77.0$ MPa.

5.101. Determinamos la rigidez de la base elástica $k=\gamma B=30$ kPa. La característica es

$$\beta=\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}=\frac{1}{2270}\,\frac{1}{\text{cm}}.$$

La longitud reducida de la viga es $\beta l=1000/2270<0{,}8$. Por consiguiente, el pontón puede ser calculado como una viga sumamente rígida. Supongamos que el calado de la proa es igual a v_1 y el de la popa es v_2. En la figura está representado el diagrama de presiones del agua sobre el pontón. Para determinar v_1 y v_2 componemos las ecuaciones de equilibrio: la ecuación de las proyecciones es

$$P-\frac{v_1+v_2}{2}lB\gamma=0$$

y la ecuación de los momentos (respecto al extremo izquierdo) es

$$Pa - \frac{v_1 \gamma B l^2}{2} - \frac{(v_2 - v_1)\gamma B l}{2} \frac{2}{3} l = 0.$$

De las ecuaciones obtenemos $v_1 = C\,(2l/3 - a)$, $v_2 = C\,(a - l/3)$, donde $C = 6P/(\gamma B l^2)$ y después de sustituir los valores numéricos $v_1 = 27$ cm, $v_2 = 107$ cm.

Conociendo el calado del pontón obtenemos la intensidad de la presión del agua sobre éste $q = [v_1 + (v_2 - v_1)\, x/l]\gamma B$.

El momento flector en el tramo I del pontón (véase la figura) es

$$M_I(x) = \int_0^x (x - u)\, q\, du = \frac{P}{l^3} x^2 \left[2l - 3a + \left(\frac{2a}{l} - 1\right) x\right].$$

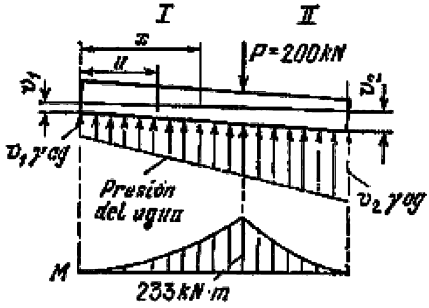
En el tramo II es

$$M_{II}(x) = M_I(x) - P(x - a) = \frac{P}{l^3} x^2 \left[2l - 3a + \left(\frac{2a}{l} - 1\right) x\right] - P(x - a).$$

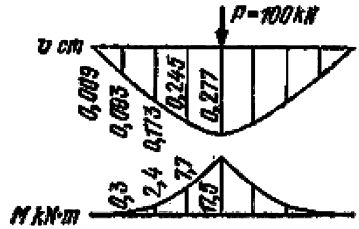
Por estas ecuaciones está construido el diagrama de los momentos flectores. El momento máximo (cuando $x = a$) es

$$M_{máx} = \frac{2Pa^3}{l^2}\left(\frac{l}{a} + \frac{a}{l} - 2\right) = 233\ \text{kN·m}.$$

5.102. La longitud reducida de la viga es $\beta l = 200/65{,}6 = 3{,}05$.



Para el problema 5.101



Para el problema 5.102

Como $1{,}2 < 3{,}05 < 4$, la viga debe calcularse como una viga corta. Utilizamos el método de los parámetros de origen

$$\begin{aligned}
v_x &= v_0 A_x + \theta_0 \frac{B_x}{\beta} - M_0 \frac{C_x}{EJ\beta^2} - Q_0 \frac{D_x}{EJ\beta^3} + [v_x],\\
\theta_x &= \theta_0 A_x - M_0 \frac{B_x}{EJ\beta} - Q_0 \frac{C_x}{EJ\beta^2} - v_0 4 D_x \beta + [\theta_x], \qquad (22)\\
M_x &= M_0 A_x + Q_0 \frac{B_x}{\beta} + v_0 \frac{kC_x}{\beta^2} + \theta_0 \frac{kD_x}{\beta^3} + [M_x],\\
Q_x &= Q_0 A_x + v_0 \frac{kB_x}{\beta} + \theta_0 \frac{kC_x}{\beta^2} - M_0 4 D_x \beta + [Q_x],
\end{aligned}$$

donde

$$A_x = \operatorname{ch}\xi\cos\xi, \quad B_x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\xi\operatorname{sen}\xi + \operatorname{sh}\xi\cos\xi),$$

$$C_x = \frac{1}{2}\operatorname{sh}\xi\operatorname{sen}\xi, \quad D_x = \frac{1}{4}(\operatorname{ch}\xi\operatorname{sen}\xi - \operatorname{sh}\xi\cos\xi)$$

al mismo tiempo $\xi = \beta x$ (abscisa reducida). $[v_x]$, $[\theta_x]$, $[M_x]$ y $[Q_x]$ son los miembros debidos a la carga. Las cargas concentradas se tienen en cuenta como los parámetros de origen M_0 y Q_0, pero con una corrección respecto a la abscisa; por ejemplo, la fuerza concentrada P aplicada a una distancia a del origen da para v_x en el tramo $x > a$ un miembro $PD_{x-a}/(EJ\beta^3)$ (como el miembro debido a Q_0).

x, cm	0	25	50	75	100
βx	0	0,38	0,76	1,14	1,52
A_x	1	0,9965	0,9444	0,7196	0,1216
B_x	0	0,3797	0,74055	1,07595	1,25145
C_x	0	0,0722	0,28775	0,6370	1,0870
D_x	0	0,00915	0,0730	0,2449	0,5705
0,00936 A_x	0,009	0,009	0,009	0,007	0,00124
0,221 B_x	0	0,084	0,164	0,238	0,276
v_x, cm	0,009	0,093	0,173	0,245	0,277
121 C_x	0	8,75	34,8	77	132
2830 D_x	0	25,30	206,0	692	1620
M_x, kN·cm	0	34,65	240,8	769	1752

En nuestro caso tenemos

$$v_x = v_0 A_x + \theta_0 \frac{B_x}{\beta}, \quad M_x = v_0 \frac{kC_x}{\beta^2} + \theta_0 \frac{kD_x}{\beta^3}.$$

De la tabla de los valores A_x, B_x, C_x y D_x hallamos

$$B_l = B\,(3{,}05) = -4{,}76105, \quad C_l = 0{,}4817, \quad D_l = 2{,}86442,$$

$$A_{0,8l} = A\,(1{,}52) = 0{,}1216, \quad B_{0,8l} = 1{,}25145, \quad C_{0,8l} = 1{,}0870,$$

$$D_{0,8l} = 0{,}5705.$$

De las condiciones del problema $v_l = 0$ y $M_l = 0$ hallamos $v_0 = 9{,}36 \cdot 10^{-3}$ cm, $\theta_0 = 3{,}37 \cdot 10^{-3}$. De (22) obtenemos

$$v_x = 0{,}00936A_x + 0{,}221B_x, \quad M_x = 12C_x + 2830D_x.$$

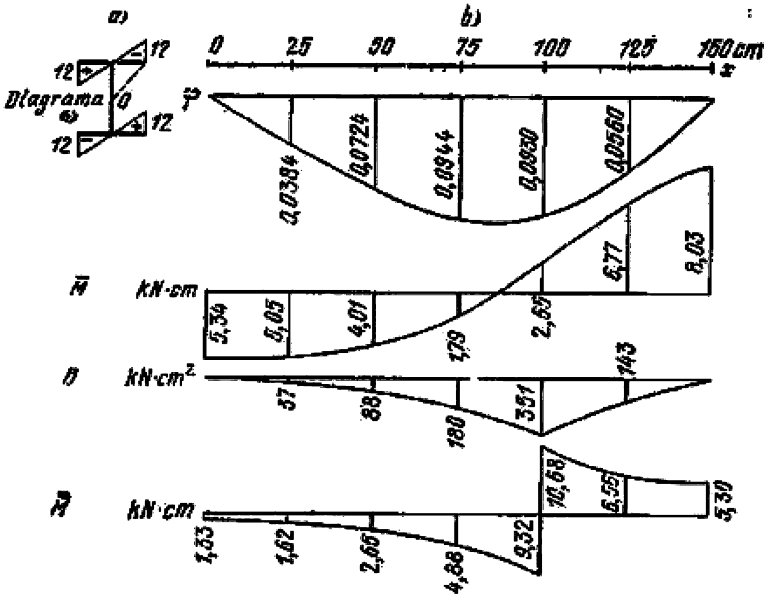
Los cálculos de las ordenadas de los diagramas v_x y M_x están dados en la tabla. Los diagramas están representados en la figura.

5.103. Calculamos $J_{tor} = \frac{1}{3}\sum st^3 = \frac{1}{3}(8 + 2 \cdot 6)\,0{,}4^3 = 0{,}425$ cm^4. Construimos el diagrama de las áreas dobles sectoriales ω (fig. *a*).

Por el diagrama hallamos, de acuerdo con la regla de Vereschaguin, el momento sectorial de inercia

$$J_\omega = \int t\omega^2\,ds = t\int \omega^2\,ds = 0{,}4\cdot 4\,\frac{12\cdot 3}{2}\cdot\frac{2}{3}\,12 = 231\ \text{cm}^6,$$

y luego determinamos la característica de la sección $\alpha = \sqrt{GJ_{tor}/(EJ_\omega)} = 0{,}0264\ \text{cm}^{-1}$.



Para el problema 5.103

De acuerdo con el método de los parámetros de origen las expresiones de φ, $\overline{M}$, B y $\overline{\overline{M}}$ son

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{\overline{M}(0)}{GJ_{tor}}\,x - \frac{B(0)}{GJ_{tor}}(\operatorname{ch}\alpha x - 1) - \frac{\overline{\overline{M}}(0)}{GJ_{tor}\alpha}(\operatorname{sh}\alpha x - \alpha x) + [\varphi(x)],$$

$$\overline{M}(x) = \overline{M}(0) - B(0)\,\alpha\operatorname{sh}\alpha x - \overline{\overline{M}}(0)(\operatorname{ch}\alpha x - 1) + [\overline{M}(x)], \qquad (23)$$

$$B(x) = B(0)\operatorname{ch}\alpha x + \frac{\overline{\overline{M}}(0)}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha x + [B(x)],$$

$$\overline{\overline{M}}(x) = \overline{\overline{M}}(0)\operatorname{ch}\alpha x + B(0)\,\alpha\operatorname{sh}\alpha x + [\overline{\overline{M}}(x)],$$

donde en este caso los factores de carga $[\varphi(x)]$, $[\overline{M}(x)]$, $[B(x)]$ y $[\overline{\overline{M}}(x)]$ tienen los valores siguientes:

$$[\varphi(x)] = -\frac{L}{GJ_{tor}\alpha}[\operatorname{sh}\alpha(x-a) - \alpha(x-a)],$$

$$[\overline{M}(x)] = -L[\operatorname{ch}\alpha(x-a) - 1], \qquad (24)$$

$$[B(x)] = \frac{L}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha(x-a),$$

$$[\overline{\overline{M}}(x)] = L\operatorname{ch}\alpha(x-a).$$

Los factores de carga (24) se tienen solamente en cuenta cuando $x > a$.

De acuerdo con las condiciones de fijación del extremo izquierdo de la barra $\varphi(0) = B(0) = 0$. Los parámetros de origen restantes $\overline{M}(0)$ y $\overline{\overline{M}}(0)$ se hallan de las condiciones en el extremo derecho: $\varphi(l) = B(l) = 0$. De acuerdo con el primer y tercer renglones de las fórmulas (23) y teniendo en cuenta las (24) escribimos:

$$0 = \frac{\overline{M}(0)}{GJ_{tor}} l - \frac{\overline{\overline{M}}(0)}{GJ_{tor}\alpha}(\operatorname{sh}\alpha l - \alpha l) - \frac{L}{GJ_{tor}\alpha}(\operatorname{sh}\alpha a' - \alpha a'),$$

$$0 = \frac{\overline{\overline{M}}(0)}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha l + \frac{L}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha a' \quad (a' = l - a),$$

de donde

$$\overline{\overline{M}}(0) = -L\frac{\operatorname{sh}\alpha a'}{\operatorname{sh}\alpha l} = -1{,}33\ \text{kN}\cdot\text{cm},$$

$$\overline{M}(0) = -L\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha a'}{\operatorname{sh}\alpha l} - \frac{a'}{l}\right) = -5.34\ \text{kN}\cdot\text{cm}.$$

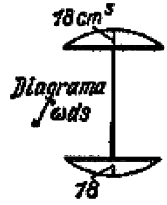
Los diagramas φ, $\overline{M}$, B y $\overline{\overline{M}}$ están representados en la fig. *b*.

5.104. La tensión normal máxima se encuentra en la sección $x = a$ junto al borde del ala (véase el diagrama ω en la figura en la solución del problema 5.103)

$$\sigma_{máx} = \frac{B_{máx}}{J_\omega}\omega_{máx} = 183{,}0\ \text{MPa}$$

la tensión tangencial máxima en la torsión libre junto al extremo derecho de la barra es

$$\tau_{máx} = \frac{\overline{M}_{máx}}{J_{tor}}t = 75{,}5\ \text{MPa}.$$



Para el problema 5.104

La tensión tangencial en la torsión restringida es

$$\tilde{\tau} = \frac{\overline{\overline{M}}}{J_\omega}\frac{S_\omega}{t} = \frac{\overline{\overline{M}}}{J_\omega}\frac{\int \omega t\, ds}{t}.$$

Puesto que $t = \text{const}$

$$\tilde{\tau} = \frac{\overline{\overline{M}}}{J_\omega}\int \omega ds.$$

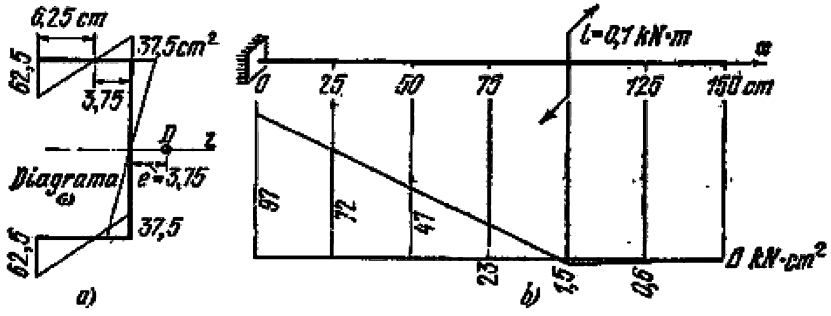
Del diagrama $\overline{\overline{M}}$ hallamos $\overline{\overline{M}}_{máx} = 10{,}68\ \text{kN}\cdot\text{cm}$ en la sección $x = a$. Haciendo uso del diagrama ω construimos el diagrama $\int \omega\, ds$ (véase la figura). Obtenemos $\left(\int \omega\, ds\right)_{máx} \approx 18\ \text{cm}^3$ en el centro del ala. El diagrama $\tilde{\tau}$ tiene la misma expresión. La tensión máxima es $\tilde{\tau}_{máx} = 8{,}3\ \text{MPa}$.

5.105. *Indicación.* En este caso $\varphi(0) = \overline{M}(0) = 0$. Para determinar $B(0)$ y $\overline{\overline{M}}(0)$ es necesario utilizar condiciones análogas en el extremo derecho: $\varphi(l) = \overline{M}(l) = 0$. Los diagramas están representados en la respuesta.

5.106. Determinamos la posición del centro de flexión

$$e = \frac{b^2h^2t}{4J_z} = \frac{3b^3}{6b+h} = \frac{3\cdot 10^3}{6\cdot 10+20} = 3{,}75 \text{ cm}.$$

Construimos el diagrama de las áreas sectoriales dobles ω (véase la fig. *a*). Luego calculamos el momento de inercia sectorial $J_\omega = \int \omega^2 t\, ds$. Aquí s es la coorde-



Para el problema 5.106

nada corriente de la sección. Del diagrama ω obtenemos mediante la regla de Vereschaguin

$$J_\omega = t\int \omega^2\, ds = 0{,}185\left(\frac{37{,}5\cdot 10}{2}\,\frac{2}{3}\,37{,}5\cdot 2 + \right.$$
$$\left. + \frac{37{,}5\cdot 3{,}75}{2}\,\frac{2}{3}\,37{,}5\cdot 2 + \frac{62{,}5\cdot 6{,}25}{2}\,\frac{2}{3}\,62{,}5\cdot 2\right) = 5400 \text{ cm}^6.$$

El «momento de inercia» de la sección en el caso de torsión libre es

$$J_{tor} = \frac{1}{3}\sum st^3 = \frac{1}{3}\,t^3(h+2b) = \frac{1}{3}\,0{,}185^3\,(20+2\cdot 10) = 0{,}085 \text{ cm}^4.$$

La característica de la sección es

$$\alpha = \sqrt{GJ_{tor}/(EJ_\omega)} = \sqrt{2{,}9\cdot 10^4\cdot 0{,}85/(7{,}6\cdot 10^4\cdot 5400)} = 2{,}4\cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}.$$

El bimomento B (x) se calcula por el tercer renglón de las fórmulas (23) (pág. 305):

$$B(x) = B(0)\operatorname{ch}\alpha x + \overline{\overline{M}}(0)\,\frac{1}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha x + \left[\frac{L}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha(x-a)\right]. \qquad (25)$$

El valor inicial $\overline{\overline{M}}$ (0) del momento de la torsión restringida en el caso presente de empotramiento rígido es igual al momento torsor total: $\overline{\overline{M}}(0) = -L$. Para determinar el otro parámetro de origen, B (0), partimos de la condición en el extremo derecho de la barra $B(l) = 0$; de la ecuación (25) obtenemos

$$B(0) = \frac{L}{\alpha}\,\frac{\operatorname{sh}\alpha l - \operatorname{sh}\alpha a'}{\operatorname{ch}\alpha l}.$$

El diagrama de los bimomentos B (x) está representado en la fig. *b*. La tensión máxima es

$$\sigma_{máx} = \frac{B_{máx}}{J_\omega}\,\omega_{máx} = 111 \text{ MPa}.$$

5.107. Construimos los diagramas $\overline{M}$ y $\overline{\overline{M}}$ de las componentes del momento torsor correspondientes a las torsiones libre y restringida. Considerando $\overline{M}(0) = \overline{\overline{M}}(0) = 0$, obtenemos por medio de las fórmulas (23) y tomando en consideración las ecuaciones (24)

$$\overline{M}(x) = -LA\,\mathrm{sh}\alpha x + L(\mathrm{ch}\alpha x - 1) - L[\mathrm{ch}\alpha(x-a) - 1],$$

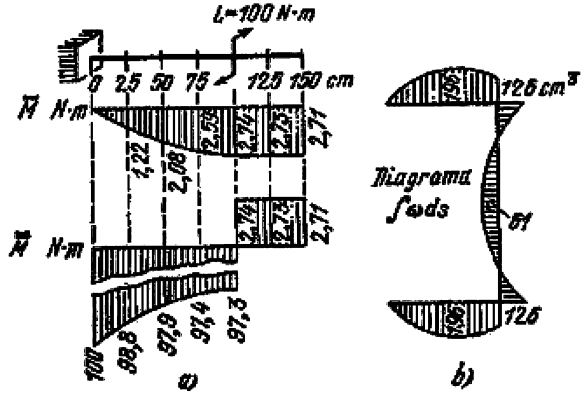
$$\overline{\overline{M}}(x) = -L\,\mathrm{ch}\alpha x + LA\,\mathrm{sh}\alpha x + L[\mathrm{ch}\alpha(x-a)],$$

donde

$$A = \frac{\mathrm{sh}\,\alpha l - \mathrm{sh}\,\alpha a'}{\mathrm{ch}\,\alpha l}.$$

Los miembros que tienen corchetes se toman en consideración solamente cuando $x > 100$ cm.

Los diagramas $\overline{M}(x)$ y $\overline{\overline{M}}(x)$ están representados en la fig. *a*. La tensión máxima en la torsión libre es $\tau_{máx} = \overline{M}_{máx} t/J_{tor} = 6{,}0$ MPa.



Para el problema 5.107

Luego utilizando el diagrama ω (fig. *a* de la solución del problema 5.106) construimos el diagrama $\int \omega ds$ (fig. *b*). El diagrama $\overline{\overline{\tau}} = \frac{\overline{\overline{M}}}{J_\omega}\int \omega ds$ tiene la misma expresión, $\overline{\overline{\tau}}_{máx} = \frac{\overline{\overline{M}}_{máx}}{J_\omega}\left(\int \omega\, ds\right)_{máx} = 3{,}6$ MPa.

5.108. Por las fórmulas (23) (pág. 305) la expresión del bimomento tiene la forma: $B(x) = B(0) + \overline{\overline{M}}(0)x + [L(x-a)]$, donde $B(0) = La$, $\overline{\overline{M}}(0) = -L$. Por consiguiente, $B(x) = La - Lx + [L(x-a)]$. Como se ve, cuando $x > a$ $B(x) = 0$. El diagrama $B(x)$ tiene la forma de un triángulo con base a, es decir, obtenemos casi lo mismo que lo obtenido en la solución exacta (fig. *b* para la solución del problema 5.106).

La tensión máxima es $\sigma_{máx} = \frac{B_{máx}}{J_\omega}\omega_{máx} = 115$ MPa. Este valor supera la tensión obtenida en la solución (111 MPa) solamente en un 4%.

5.110. Aplicamos en el punto C una fuerza vertical igual a 1 (véase la figura). Determinando las reacciones en los apoyos y luego las fuerzas de interacción en las articulaciones A, B y C (véase la solución del problema 4.24, 12), construimos el diagrama $\overline{M}$ «unitario». En este caso las expresiones de $\overline{M}$ en los tramos AC y BC de la estructura tienen respectivamente la forma

$$\overline{M}(\varphi_1)=\frac{a}{2}(\operatorname{sen}\varphi_1-1+\cos\varphi_1),$$
$$\overline{M}(\varphi_2)=\frac{a}{2}(\operatorname{sen}\varphi_2-1+\cos\varphi_2). \qquad (26)$$

Empleamos la fórmula de Mohr. En los tramos $ADFB$ efectuamos el cálculo según Vereschaguin. Obtenemos

$$EJ\cdot y_C=\int_0^{\pi/2} M(\varphi_1)\cdot\overline{M}(\varphi_1)\cdot a\,d\varphi_1+\int_0^{\pi/2} M(\varphi_2)\cdot\overline{M}(\varphi_2)\,ad\varphi_2+\omega_1c_1\cdot 2+\omega_2c_2.$$

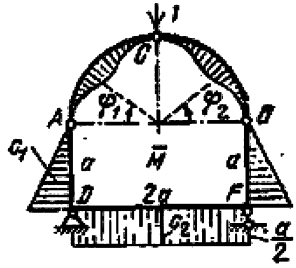
Aquí ω_1 y ω_2 son las áreas del diagrama M (véase la fig. b en la solución del problema 4.24, 12):

$$\omega_1=\frac{1}{2}\frac{L}{2}a=\frac{La}{4},\quad \omega_2=\frac{L}{2}2a=La,$$

y $c_1=\frac{2}{3}\frac{a}{2}=\frac{a}{3}$, $c_2=a/2$ son las ordenadas correspondientes del diagrama $\overline{M}$ (véase la figura).

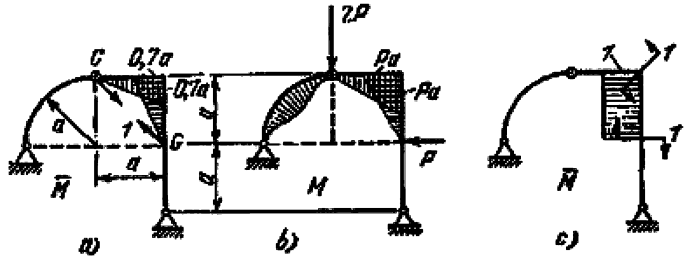
Considerando las expresiones (a), (b) (en la solución del problema 4.24, 12) y las ecuaciones (26) hallamos $y_C=0{,}310La^2/(EJ)$.

Hallamos análogamente la componente horizontal x_C del desplazamiento del punto C. En este caso la fuerza I se aplica en sentido horizontal. Obtenemos $x_C=0{,}0725La^2/(EJ)$ (hacia la izquierda). El desplazamiento total es $\delta_C=\sqrt{y_C^2+x_C^2}=0{,}320La^2/(EJ)$.



Para el problema 5.110

5.111. a) En vez de determinar por separado los desplazamientos de los puntos C y G es cómodo, en nuestro caso, aplicar una carga unitaria en forma de dos fuerzas, como está indicado en la fig. a. En la misma figura está representado el diagrama de momentos correspondiente. «Multiplicando» este diagrama por el diagrama debido a la carga (fig. b) obtenemos el acercamiento incógnito de los



Para el problema 5.111

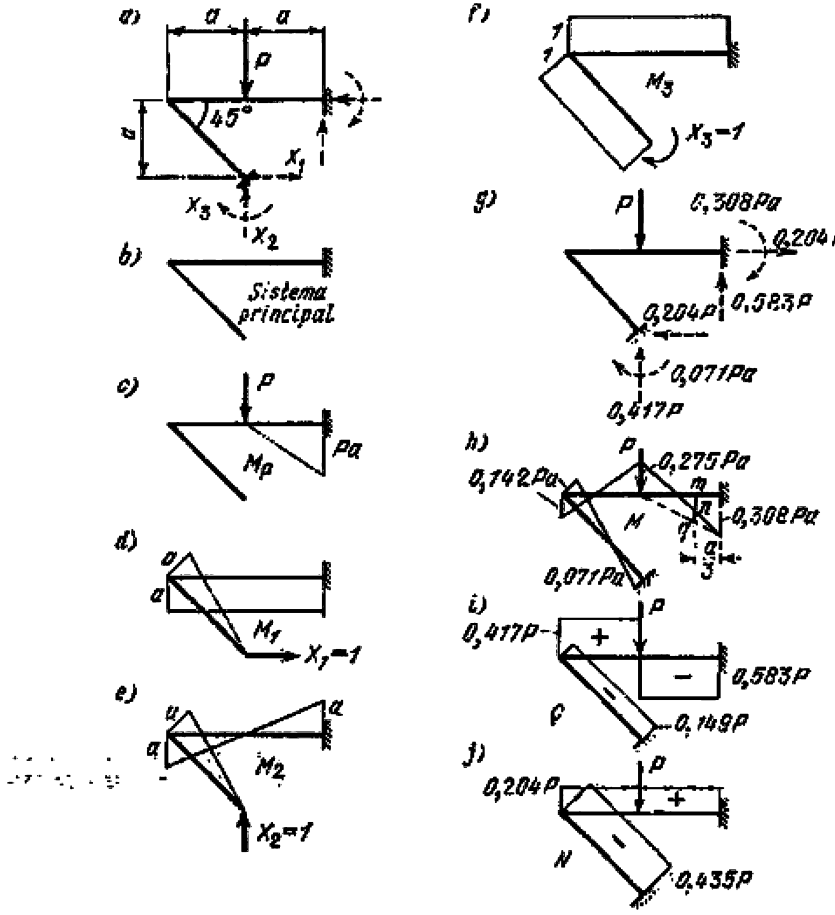
puntos C y G producido por la acción de la carga

$$\delta_{CG} = \left(\frac{1}{2} Pa \cdot a\right)\left(\frac{2}{3} 0{,}7a\right) 2 \frac{1}{EJ} = \frac{0{,}47Pa^3}{EJ}.$$

b) Del mismo modo se determina el ángulo de giro mutuo, pero en vez de fuerzas iguales a 1 se aplican momentos iguales a 1. El estado «unitario» está representado en la fig. *c*. Multiplicando el diagrama unitario por el diagrama debido a la carga (fig. *b*) obtendremos el ángulo de giro incógnito

$$\theta_{GD} = \left(\frac{1}{2} Pa \cdot a\right) 1 \frac{1}{EJ} = \frac{Pa^2}{2EJ}.$$

5.118. Trazamos las reacciones en los apoyos tomando sus direcciones arbitrariamente (fig. *a*). Tenemos seis incógnitas, por consiguiente, el sistema es



Para el problema 5.118

tres veces estáticamente indeterminado. Escribimos el sistema de ecuaciones canónicas correspondiente

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \Delta_{1P} &= 0, \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \Delta_{2P} &= 0, \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \Delta_{3P} &= 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Los coeficientes δ_{ik} y los miembros libres Δ_{iP} de las ecuaciones canónicas se calculan por la fórmula de Mohr:

$$\delta_{ik} = \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_k\, dx}{EJ}, \quad \Delta_{iP} = \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_P\, dx}{EJ}, \tag{28}$$

donde $\overline{M}_i$ es el momento flector corriente en el sistema principal debido a $X_i = 1$, $\overline{M}_k$ es el momento flector corriente en el sistema principal debido a $X_k = 1$, M_P es el momento flector corriente en el sistema principal debido a la carga dada.

Suponemos que las incógnitas sobrantes son las reacciones en el apoyo izquierdo: las fuerzas X_1, X_2 y el momento X_3. Al rechazar las ligaduras correspondientes a las incógnitas de más, obtendremos el sistema principal (fig. *b*).

Aplicamos al sistema principal la carga dada P (fig. *c*), así como las cargas unitarias (figs. *d*, *e*, *f*) y construimos los diagramas M_P, $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ y $\overline{M}_3$; luego calculamos los coeficientes y los miembros libres de las ecuaciones canónicas (véase las fórmulas (28)). Obtenemos, por ejemplo, $\Delta_{1P} = \int \frac{\overline{M}_1 M_P\, dx}{EJ}$. El cálculo se efectúa según Vereschaguin. «Multiplicando» entre sí los diagramas $\overline{M}_1$ y $\overline{M}_P$, obtenemos

$$EJ\Delta_{1P} = -\frac{1}{2} aPa \cdot a = \frac{Pa^3}{2}.$$

«Multiplicando» el diagrama $\overline{M}_1$ por sí mismo, hallamos

$$EJ\delta_{11} = \int \overline{M}_1^2\, ds = \frac{1}{2}(a\sqrt{2})\, a \cdot \frac{2}{3} a + 2a^2 \cdot a = 2{,}47\, a^3.$$

Por analogía obtenemos $\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{0{,}472a^3}{EJ}$, $\delta_{13} = \delta_{31} = -\frac{2{,}71a^2}{EJ}$, $\delta_{23} = \delta_{32} = -\frac{0{,}707a^2}{EJ}$, $\delta_{22} = \frac{1{,}14a^3}{EJ}$, $\delta_{33} = \frac{3{,}41a}{EJ}$; $\Delta_{2P} = -\frac{Pa^2}{3EJ}$, $\Delta_{3P} = -\frac{Pa^2}{2EJ}$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones canónicas (27) determinamos las magnitudes de las incógnitas sobrantes $X_1 = -0{,}204P$, $X_2 = 0{,}417P$, $X_3 = 0{,}071Pa$. La dirección de X_1 es contraria a la supuesta.

Ahora mediante las ecuaciones de equilibrio hallamos las reacciones en el apoyo derecho. Todas las reacciones están representadas en la fig. *g*. Luego a partir de los apoyos construimos los diagramas M, Q y N (figs. *h*, *i*, *j*).

5.119. Según el número de reacciones en los apoyos el sistema es una vez estáticamente indeterminado. Consideramos que la incógnita libre X_1 es la reacción horizontal en el apoyo izquierdo (véase la fig. *a*). Por consiguiente, el sistema principal (fig. *b*) posee aquí un apoyo móvil.

Aplicando al sistema principal la carga dada q determinamos las reacciones en los apoyos y construimos el diagrama M_P (fig. *c*). La magnitud $M_P = M_P(\varphi)$ en una sección arbitraria C de la parte curvilínea de la estructura, que se determina por el ángulo variable φ, es igual a

$$M_P = (qa/4) \cdot CD = (qa/4)\,(a - a\cos\varphi).$$

De este modo consideramos positivo el momento flector que provoca compresión de las fibras de la estructura dispuestas por su lado exterior (lo indicamos en la fig. *a* con línea de trazas).

Si cargamos el sistema principal con una fuerza unitaria $X_1 = 1$ (fig. *d*), se obtiene $M_1(\varphi) = -1 \cdot a \operatorname{sen}\varphi$; ahora están comprimidas las fibras del lado

interior de la estructura, por eso ponemos el signo menos. Según las fórmulas (28) se calcula el miembro libre Δ_{1P} y el coeficiente δ_{11} de la ecuación canónica

$$X_1\delta_{11} + \Delta_{1P} = 0.$$

Para la parte curvilínea de la estructura hacemos analíticamente la integración, en las otras partes empleamos la regla de Vereschaguin. Empleando la división mostrada en la fig. *c* con línea de puntos, obtenemos

$$EJ\cdot\Delta_{1P} = \int M_1 M_P\, ds = \int_0^{\pi/2} (-a\operatorname{sen}\varphi)\left(\frac{qa}{4}\right)(a - a\cos\varphi)\times$$

$$\times\, a\,d\varphi - a\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{qa^2}{4}+\frac{qa^2}{2}\right)a - \frac{a}{2}\,\frac{qa^2}{2}\,\frac{2}{3}\,a - \frac{qa^3}{12}\,\frac{a}{2} = -0{,}709qa^4;$$

$$EJ\cdot\delta_{11} = \int (M_1)^2\, ds = \int_0^{\pi/2} (-a\operatorname{sen}\varphi)^2\, a\,d\varphi + a^2 a + \frac{a^2}{2}\,\frac{2}{3}\,a = 2{,}12a^3.$$

De aquí $X_1 = -\Delta_{1P}/\delta_{11} = 0{,}335\ qa$.

De la condición de equilibrio de la estructura hallamos la segunda reacción horizontal $0{,}665qa$ (fig. *c*) y las dos reacciones verticales.

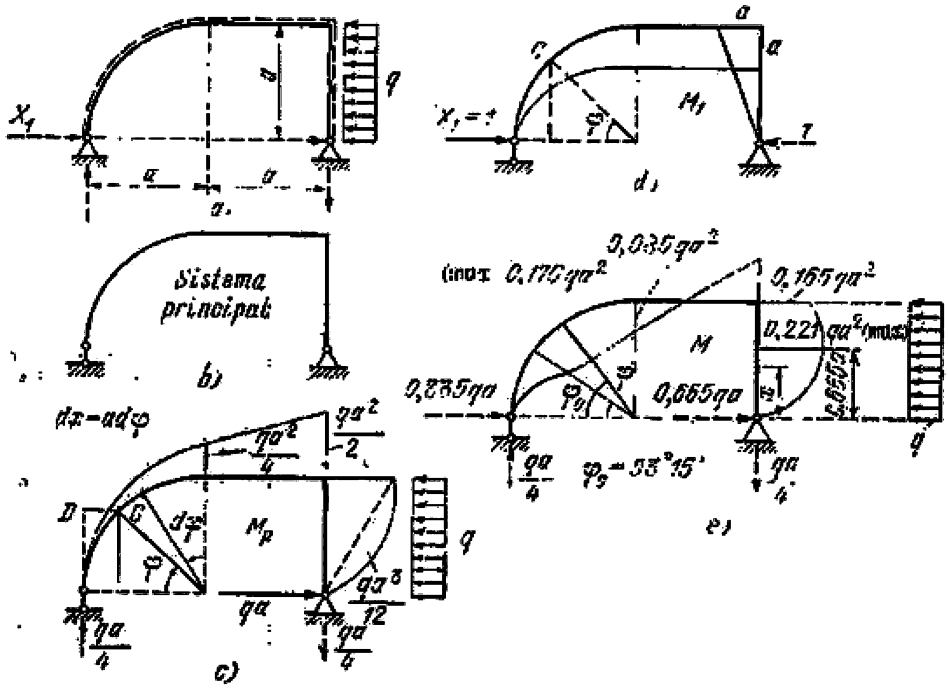
Componemos la expresión definitiva del momento flector:

para la estructura curvilínea

$$M(\varphi) = (qa/4)(a - a\cos\varphi) - 0{,}335\ qa\cdot a\operatorname{sen}\varphi;$$

para el puntal derecho $M(x) = 0{,}665qa\cdot x - qx^2/2$.

Por estas ecuaciones está construido el diagrama M (fig. *e*).

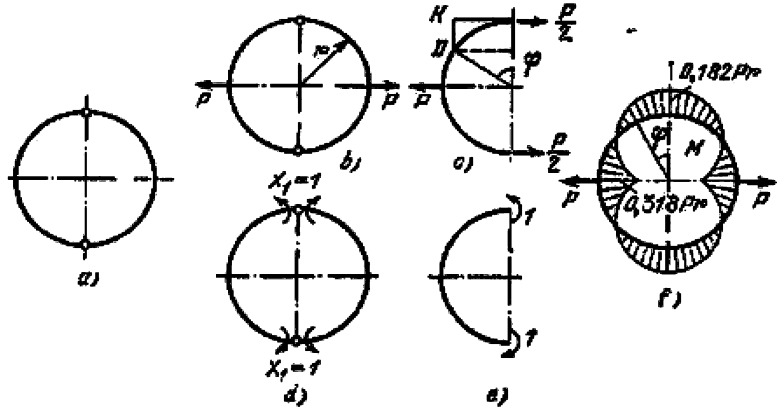


Para el problema 5.119

5.120. Admitimos el sistema principal simétrico de dos articulaciones (fig. *a*). Este sistema posee una ligadura libre, pero con esta carga bisimétrica (simétrica respecto a dos ejes) es, como veremos más adelante, estáticamente determinado. De este modo tomamos como incógnitas los momentos flectores en las secciones medias A y B de la estructura. A causa de la simetría estos momentos son iguales, es decir, tenemos solamente una incógnita libre. Para su determinación componemos la ecuación canónica

$$X_1\delta_{11} + \Delta_{1P} = 0.$$

Es preciso remarcar que aquí nos encontramos con la llamada incógnita de grupo. Pero esto no influye al proceso de la solución. La magnitud Δ_{1P} es la suma de los ángulos de giro mutuos en ambas articulaciones que surgen bajo la acción de la carga exterior; δ_{11} es lo mismo, pero surgidos como resultado de la acción de los momentos unitarios $X_1 = 1$.



Para el problema 5.120

Aplicamos las fuerzas P sobre el sistema principal (fig. *b*). Examinando una mitad del anillo (fig. *c*), escribimos el momento flector en la sección arbitraria D del anillo

$$M_P(\varphi) = (P/2)\cdot DK = (P/2)\ (r - r\cos\varphi).$$

Esta ecuación es justa dentro de los límites $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

Después cargamos el sistema principal con la carga unitaria $X_1 = 1$ (fig. *d*). Examinando la mitad del anillo (fig. *e*) vemos que las reacciones en las articulaciones son iguales a cero, las cargas se autoequilibran. Por consiguiente, el momento flector $\overline{M}_1$ es en todas las secciones igual a -1. Introducimos el signo menos, porque el signo de $\overline{M}_1$ es contrario al de M_P, tomado más arriba como positivo.

Mediante las fórmulas (28) (pág. 311) hallamos

$$\delta_{11} = \int \frac{\overline{M}_1^2\,dx}{EJ} = \int_0^{2\pi} \frac{(-1)^2\,r\,d\varphi}{EJ} = \frac{2\pi\varphi}{EJ},$$

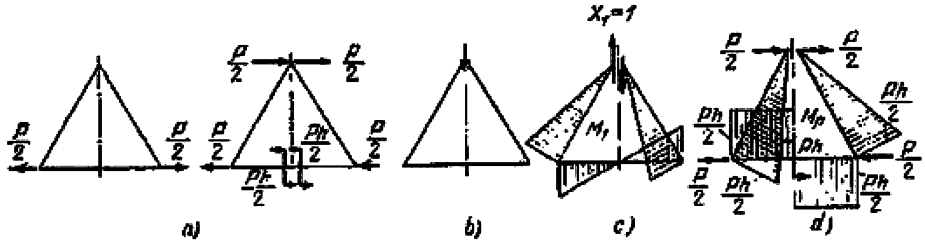
$$\Delta_{1P} = \int \frac{\overline{M}_1 M_P\,dx}{EJ} = 4\int_0^{\pi/2} \frac{(-1)\,(P/2)\,(r - r\cos\varphi)\cdot r\,d\varphi}{EJ} = -1{,}14\frac{Pr^2}{EJ}.$$

En la segunda expresión efectuamos la integración para una cuarta parte del anillo, pero el resultado se multiplica por cuatro.

Mediante la ecuación canónica obtenemos $X_1 = -\Delta_{1P}/\delta_{11} = 0{,}182Pr$.

Podemos construir ahora el diagrama definitivo $M = M_P + \overline{M}_1 X_1$. Sustituyendo aquí los valores de M_P, $\overline{M}_1$ y de X_1, obtenemos $M = 0{,}318Pr - (Pr/2)\cos\varphi$. Por esta ecuación construimos el diagrama M para una cuarta parte del anillo desde $\varphi = 0$ hasta $\varphi = 90°$ (fig. *f*). Las otras partes del diagrama las construimos simétricamente.

5.121. Dividimos la carga en simétrica y antisimétrica (fig. *a*) de tal modo que la suma de estas cargas sea igual a la dada. La primera carga, la simétrica, provoca solamente tracción en la barra inferior de la estructura (la flexión de la estructura, como resultado del alargamiento de esta barra, se desprecia). La segunda, la antisimétrica, conduce a un problema una vez estáticamente indeterminado.



Para el problema 5.121

Tomamos el sistema principal simétrico con un corte vertical en el eje de simetría por arriba (fig. *b*). En esta sección tenemos solamente la fuerza antisimétrica X_1 (fig. *c*). Suponiendo que esta fuerza es igual a 1, construimos el diagrama M_1 (fig. *c*). El diagrama M_P debido a la carga dada está representado en la fig. *d*. Calculamos Δ_{1P} y δ_{11} (véase las fórmulas (28) en la pág. 311) con ayuda de la regla de Vereschaguin:

$$EJ\Delta_{1P} = -\frac{1}{2}\,a\,\frac{Ph}{2}\cdot\frac{2}{3}\,\frac{a}{2}\cdot 2 - \frac{a}{2}\,\frac{Ph}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{a}{2}\cdot 2 = -\frac{7}{24}\,Pa^2h;$$

$$EJ\delta_{11} = \frac{1}{2}\,a\,\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{3}\,\frac{a}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\,\frac{a}{2}\,\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{3}\,\frac{a}{2}\cdot 2 = \frac{1}{4}\,a^3.$$

De la ecuación canónica obtenemos $X_1 = -\Delta_{1P}/\delta_{11} = 1{,}01\,P$.

Construimos el diagrama definitivo de momentos M aplicando al sistema principal la carga exterior y la fuerza hallada $X_1 = 1{,}01P$ (véase la respuesta).

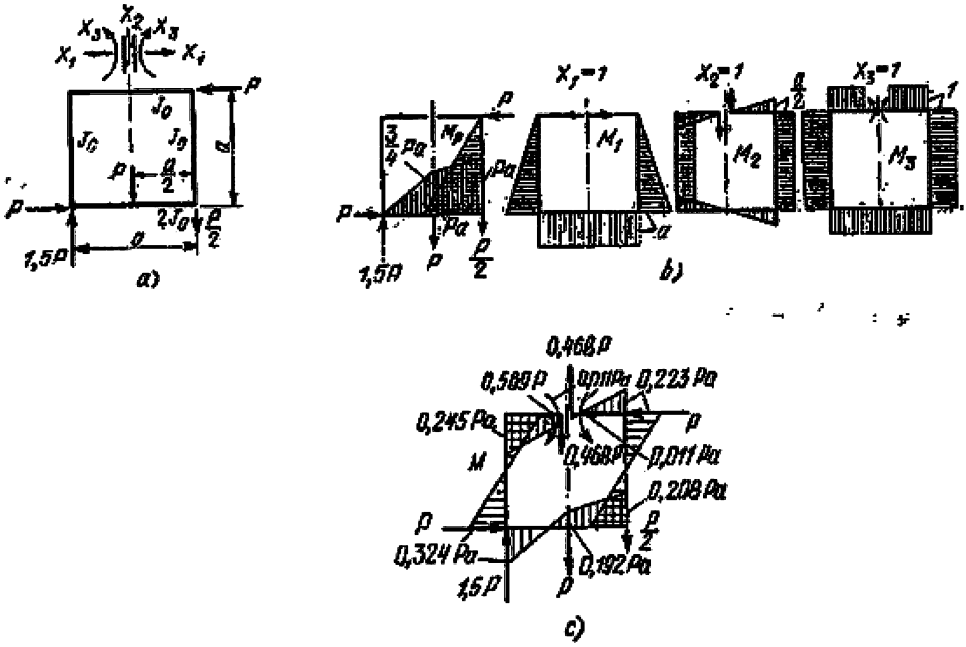
5.122. Tomamos el sistema principal simétrico, cortando la estructura arriba en la parte media. Por consiguiente, tomamos como incógnitas adicionales los esfuerzos en esta sección (fig. *a*). El diagrama debido a la carga M_P y los diagramas unitarios M_1, M_2, y M_3 para el sistema principal están representados en la fig. *b*.

Al «multiplicar» los diagramas tendremos en cuenta la magnitud del momento de inercia. Calculamos, por ejemplo, δ_{11}:

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2\,dx}{EJ} = \frac{a^3}{2}\cdot\frac{2}{3}\,a\cdot\frac{1}{EJ_0}\cdot 2 + a^2\cdot a\cdot\frac{1}{E\cdot 2J_0} = \frac{7}{6}\,\frac{a^3}{EJ_0}.$$

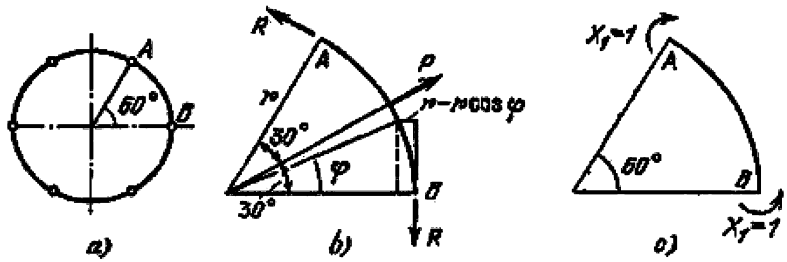
Calculamos análogamente los otros coeficientes. Hace falta remarcar que en este caso $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$. Resolviendo el sistema de ecuaciones canó-

nicas, hallamos $X_1 = 0{,}569P$, $X_2 = 0{,}468P$, $X_3 = -0{,}011Pa$. El diagrama de momentos flectores definitivo lo obtendremos cargando el sistema principal con la carga exterior y las magnitudes halladas de X_1, X_2 y X_3 (fig. *c*).



Para el problema 5.122

5.123. Admitiendo el sistema principal articulado (fig. *a*) [1]), examinamos uno de sus elementos sometido a la acción de la carga (fig. *b*). Determinamos las reacciones R en las articulaciones mediante la ecuación de las proyecciones sobre la dirección de la fuerza P: $P - 2R\cos 60° = 0$, de donde $R = P$.



Para el problema 5.123

El momento flector M_P en una sección arbitraria es $M_P(\varphi) = R(r - r\cos\varphi) = Pr(1 - \cos\varphi)$. En el estado unitario (fig. *c*) el momento flector es $\overline{M}_1 = -1$ en todas las secciones.

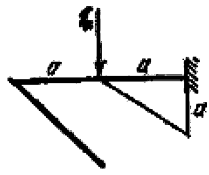
[1]) El sistema es móvil, pero capaz de percibir estáticamente la carga dada.

Mediante la fórmula de Mohr calculamos Δ_{1P} y δ_{11} (dentro de los límites de 30°):

$$EJ\Delta_{1P} = \int \overline{M}_1 M_P\, dx = \int_0^{\pi/6} (-1)\, Pr\,(1-\cos\varphi)\, r d\varphi = -0{,}0236 Pr^2,$$

$$EJ\delta_{11} = \int \overline{M}_1^2\, dx = \int_0^{\pi/6} 1^2\, r d\varphi = \frac{\pi r}{6}.$$

De la ecuación canónica obtenemos el momento flector incógnito en las secciones A, B, . . ., $X_1 = -\Delta_{1P}/\delta_{11} = 0{,}045Pr$. Escribimos ahora la expresión del momento flector en una sección arbitraria $M = M_P + \overline{M}_1 X_1 = Pr\,(1-\cos\varphi) + (-1)\cdot 0{,}045Pr = (0{,}955 - \cos\varphi)\, Pr$. Según esta ecuación, cuando $\varphi = 0$, $M = -0{,}045Pr$; cuando $\varphi = 30°$, $M = 0{,}089Pr$. El diagrama M está representado en la respuesta.



Para el problema 5.127

5.126. б) *Indicación.* Descomponer la carga en la simétrica y la antisimétrica.

5.127. Aplicamos la fuerza 1 en la dirección del desplazamiento incógnito al sistema principal elegido en la forma representada en la figura; con este sistema principal obtenemos un diagrama simple $\overline{M}$, un solo triángulo. «Multiplicando» este diagrama por el de M debido a la carga exterior aplicada a la estructura dada (véase la fig. *h* en la solución del problema 5.118), hallamos

$$EJ\delta = \int M\overline{M}\, dx = \frac{1}{2} a^2 \cdot mn = \frac{1}{2} a^2 (mq - qn) =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \left(\frac{2}{3} 0{,}308 - \frac{1}{3} 0{,}275\right) Pa = 0{,}0565\, Pa^3.$$

5.131. Expresamos los ángulos θ_A y θ_B (con el signo $+$ en el sentido de las agujas del reloj) por medio de las cargas y de los desplazamientos de los extremos. Tenemos para una viga simple[1])

$$\theta_A = \frac{M_A l}{3EJ} + \frac{M_B l}{6EJ} + \frac{\omega b}{EJl} + \frac{\Delta_B - \Delta_A}{l},$$

$$-\theta_B = \frac{M_A l}{6EJ} + \frac{M_B l}{3EJ} + \frac{\omega a}{EJl} - \frac{\Delta_B - \Delta_A}{l}.$$

Resolviendo estas ecuaciones respecto a M_A y M_B, hallamos

$$M_A = 2EJ\,(2\theta_A + \theta_B - 3\psi)/l - 2\omega\,(2b - a)/l^2, \qquad (29)$$

$$M_B = 2EJ\,(2\theta_B + \theta_A - 3\psi)/l - 2\omega\,(2a - b)/l^2.$$

Aquí ψ es el ángulo de oblicuidad igual a $\psi = (\Delta_B - \Delta_A)/l$, ω es el área del diagrama M debido a la carga dada de la viga dispuesta sobre apoyos articulados, a y b son las distancias entre el centro de gravedad de este diagrama y los apoyos (véase la figura del problema).

En la sección x la fuerza cortante es

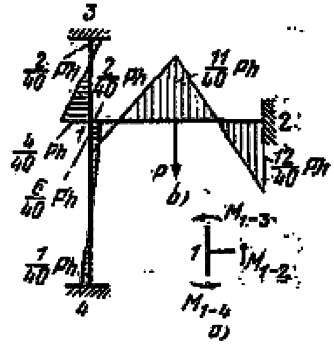
$$Q(x) = Q^0(x) + \frac{M_B - M_A}{l} = Q^0(x) - \frac{6\omega}{l^2}(a-b) - \frac{6EJ}{l^2}(\theta_A + \theta_B - 2\psi),$$

[1]) Llámase viga simple a una viga con apoyos articulados en sus extremos.

donde $Q^0(x)$ es la fuerza cortante de la viga que descansa sobre apoyos articulados.

5.132. Componemos la ecuación de equilibrio de nudo 1 (véase la fig. *a*). Expresamos previamente los momentos en los apoyos de las barras contiguas a través de los desplazamientos por medio de las fórmulas (29)[1]. En el caso dado hay un solo desplazamiento incógnito, el ángulo θ_1 de giro del nudo 1. Tenemos

$$M_{1-2} = M_A = 2 \cdot 2 \cdot 2\theta_1/(2h) - 2\,(Ph^2/2)\,(2h - h)/(2h)^2 = 4\theta_1/h - Ph/4,$$
$$M_{1-3} = M_B = -2 \cdot 1 \cdot 2\theta_1/h,$$
$$M_{1-4} = M_A = 2 \cdot 1 \cdot 2\theta_1/(2h) = 2\theta_1/h.$$



Para el problema 5.132

En la ecuación de equilibrio del nudo 1 introducimos los momentos M_A con el signo más, los momentos M_B, con el signo menos: $M_{1-2} - M_{1-3} + M_{1-4} = 0$ ó $4\theta_1/h - Ph/4 + 4\theta_1/h + 2\theta_1/h = 0$. De aquí $\theta_1 = Ph^2/40$ (cuando $EJ_1 = 1$).

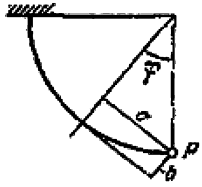
Sustituyendo nuevamente este valor de θ_1 en las expresiones de los momentos, hallamos $M_{1-2} = -6Ph/40$, $M_{1-3} = -4Ph/40$, $M_{1-4} = 2Ph/40$. Los momentos en los extremos contrarios de las barras son $M_{2-1} = -12Ph/40$, $M_{3-1} = 2Ph/40$, $M_{4-1} = -Ph/40$. Los diagramas M están representados en la fig. *b*.

5.133. Con ayuda de la fórmula de Mohr determinamos la flecha

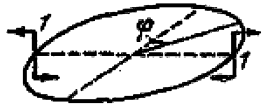
$$\delta = \int \frac{M\overline{M}\,dx}{EJ} + \int \frac{M_{tor}\overline{M}_{tor}\,dx}{GJ_{tor}}. \qquad (30)$$

x es la coordenada a lo largo del eje de la barra. El momento flector (véase la figura) es $M = Pa = Pr \operatorname{sen} \varphi$. El momento torsor es $M_{tor} = Pb = P(r - r\cos\varphi)$.

En el caso de cargas unitarias los momentos se determinan del mismo modo, $\overline{M} = 1 \cdot r \operatorname{sen} \varphi$, $\overline{M}_{tor} = 1 \cdot (r - r\cos\varphi)$. Considerando $dx = rd\varphi$ después de efectuar la integración obtenemos $\delta = \dfrac{0{,}78Pr^3}{EJ} + \dfrac{0{,}35Pr^3}{GJ_{tor}}$. Si el voladizo es de sección circular $J_{tor} = 2J$. Cuando $G = 0{,}4E$ obtenemos en este caso $\delta = 1{,}22Pr^3/(EJ)$.



Para el problema 5.133



Para el problema 5.136

5.136. En la figura del problema está representado un anillo de sección transversal rectangular, aunque se supone que la forma de la sección es arbitraria. En el problema 4.81 hemos obtenido $M = ma$, $M_{tor} = 0$. Utilizando el

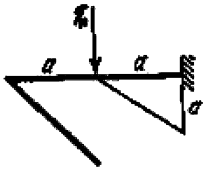
[1] Este método se llama método de desplazamientos.

Mediante la fórmula de Mohr calculamos Δ_{1P} y δ_{11} (dentro de los límites de 30°):

$$EJ\Delta_{1P} = \int \overline{M}_1 M_P\, dx = \int_0^{\pi/6} (-1)\, Pr\,(1-\cos\varphi)\, r\,d\varphi = -0{,}0236\,Pr^2,$$

$$EJ\delta_{11} = \int \overline{M}_1^2\, dx = \int_0^{\pi/6} 1^2\, r\,d\varphi = \frac{\pi r}{6}.$$

De la ecuación canónica obtenemos el momento flector incógnito en las secciones A, B, ..., $X_1 = -\Delta_{1P}/\delta_{11} = 0{,}045Pr$. Escribimos ahora la expresión del momento flector en una sección arbitraria $M = M_P + \overline{M}_1 X_1 = Pr\,(1-\cos\varphi) + (-1)\cdot 0{,}045Pr = (0{,}955 - \cos\varphi)\,Pr$. Según esta ecuación, cuando $\varphi = 0$, $M = -0{,}045Pr$; cuando $\varphi = 30°$, $M = 0{,}089Pr$. El diagrama M está representado en la respuesta.



Para el problema 5.127

5.126. 6) *Indicación.* Descomponer la carga en la simétrica y la antisimétrica.

5.127. Aplicamos la fuerza 1 en la dirección del desplazamiento incógnito al sistema principal elegido en la forma representada en la figura; con este sistema principal obtenemos un diagrama simple $\overline{M}$, un solo triángulo. Multiplicando este diagrama por el de M debido a la carga exterior aplicada a la estructura dada (véase la fig. *h* en la solución del problema 5.118), hallamos

$$EJ\delta = \int M\overline{M}\, dx = \frac{1}{2}\, a^2 \cdot mn = \frac{1}{2}\, a^2\,(mq - qn) =$$

$$= \frac{1}{2}\, a^2 \left(\frac{2}{3}\, 0{,}308 - \frac{1}{3}\, 0{,}275\right) Pa = 0{,}0565\, Pa^3.$$

5.131. Expresamos los ángulos θ_A y θ_B (con el signo + en el sentido de las agujas del reloj) por medio de las cargas y de los desplazamientos de los extremos. Tenemos para una viga simple[1])

$$\theta_A = \frac{M_A l}{3EJ} + \frac{M_B l}{6EJ} + \frac{\omega b}{EJl} + \frac{\Delta_B - \Delta_A}{l},$$

$$-\theta_B = \frac{M_A l}{6EJ} + \frac{M_B l}{3EJ} + \frac{\omega a}{EJl} - \frac{\Delta_B - \Delta_A}{l}.$$

Resolviendo estas ecuaciones respecto a M_A y M_B, hallamos

$$M_A = 2EJ\,(2\theta_A + \theta_B - 3\psi)/l - 2\omega\,(2b - a)/l^2, \qquad (29)$$

$$M_B = 2EJ\,(2\theta_B + \theta_A - 3\psi)/l - 2\omega\,(2a - b)/l^2.$$

Aquí ψ es el ángulo de oblicuidad igual a $\psi = (\Delta_B - \Delta_A)/l$, ω es el área del diagrama M debido a la carga dada de la viga dispuesta sobre apoyos articulados, a y b son las distancias entre el centro de gravedad de este diagrama y los apoyos (véase la figura del problema).

En la sección x la fuerza cortante es

$$Q(x) = Q^0(x) + \frac{M_B - M_A}{l} = Q^0(x) - \frac{6\omega}{l^2}\,(a-b) - \frac{6EJ}{l^2}\,(\theta_A + \theta_B - 2\psi),$$

[1]) Llámase viga simple a una viga con apoyos articulados en sus extremos.

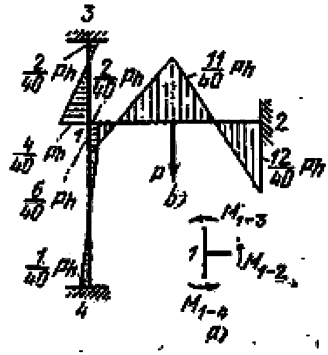
donde $Q^0(x)$ es la fuerza cortante de la viga que descansa sobre apoyos articulados.

5.132. Componemos la ecuación de equilibrio de nudo 1 (véase la fig. a). Expresamos previamente los momentos en los apoyos de las barras contiguas a través de los desplazamientos por medio de las fórmulas (29)[1]. En el caso dado hay un solo desplazamiento incógnito, el ángulo θ_1 de giro del nudo 1. Tenemos

$$M_{1-2} = M_A = 2 \cdot 2 \cdot 2\theta_1/(2h) - 2\,(Ph^2/2)\,(2h - h)/(2h)^2 = 4\theta_1/h - Ph/4,$$

$$M_{1-3} = M_B = -2 \cdot 1 \cdot 2\theta_1/h,$$

$$M_{1-4} = M_A = 2 \cdot 1 \cdot 2\theta_1/(2h) = 2\theta_1/h.$$



Para el problema 5.132

En la ecuación de equilibrio del nudo 1 introducimos los momentos M_A con el signo más, los momentos M_B con el signo menos: $M_{1-2} - M_{1-3} + M_{1-4} = 0$ ó $4\theta_1/h - Ph/4 + 4\theta_1/h + 2\theta_1/h = 0$. De aquí $\theta_1 = Ph^2/40$ (cuando $EJ_1 = 1$).

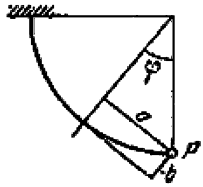
Sustituyendo nuevamente este valor de θ_1 en las expresiones de los momentos, hallamos $M_{1-2} = -6Ph/40$, $M_{1-3} = -4Ph/40$, $M_{1-4} = 2Ph/40$. Los momentos en los extremos contrarios de las barras son $M_{2-1} = -12Ph/40$, $M_{3-1} = 2Ph/40$, $M_{4-1} = -Ph/40$. Los diagramas M están representados en la fig. b.

5.133. Con ayuda de la fórmula de Mohr determinamos la flecha

$$\delta = \int \frac{M\overline{M}\,dx}{EJ} + \int \frac{M_{tor}\overline{M}_{tor}\,dx}{GJ_{tor}}, \qquad (30)$$

x es la coordenada a lo largo del eje de la barra. El momento flector (véase la figura) es $M = Pa = Pr \operatorname{sen} \varphi$. El momento torsor es $M_{tor} = Pb = P(r - r\cos\varphi)$.

En el caso de cargas unitarias los momentos se determinan del mismo modo, $\overline{M} = 1 \cdot r \operatorname{sen} \varphi$, $\overline{M}_{tor} = 1 \cdot (r - r\cos\varphi)$. Considerando $dx = rd\varphi$ después de efectuar la integración obtenemos $\delta = \dfrac{0{,}78Pr^3}{EJ} + \dfrac{0{,}35Pr^3}{GJ_{tor}}$. Si el voladizo es de sección circular $J_{tor} = 2J$. Cuando $G = 0{,}4E$ obtenemos en este caso $\delta = 1{,}22Pr^3/(EJ)$.



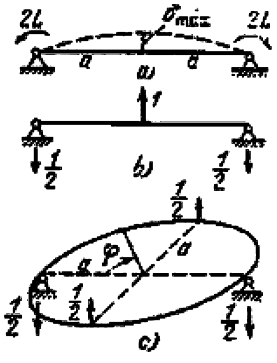
Para el problema 5.133

Para el problema 5.136

5.136. En la figura del problema está representado un anillo de sección transversal rectangular, aunque se supone que la forma de la sección es arbitraria. En el problema 4.81 hemos obtenido $M = ma$, $M_{tor} = 0$. Utilizando el

[1]) Este método se llama método de desplazamientos.

método de Mohr, aplicamos al anillo dos momentos unitarios (véase la figura). Al aplicar la carga unitaria, las expresiones de los momentos flector y torsor tienen la forma $\overline{M} = 0{,}5 \cos \varphi$, $\overline{M}_{tor} = -0{,}5 \operatorname{sen} \varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$.



Para el problema 5.137

El ángulo 2θ se determina mediante la fórmula de Mohr (30) (véase la solución del problema 5.133).

Las integrales deben ser tomadas por toda la longitud del anillo. Puesto que los diagramas son bisimétricos la integración puede efectuarse por una cuarta parte del anillo y multiplicar el resultado por 4. Ya que $M_{tor} = 0$, el segundo miembro de la fórmula de Mohr se convierte en cero. Obtenemos

$$2\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{ma \cdot 0{,}5 \cos \varphi \cdot a d\varphi}{EJ} = \frac{2ma^2}{EJ},$$

por consiguiente, $\theta = ma^2/(EJ)$.

5.137. En la fig. *a* el aro está mostrado de lado, en proyección ortogonal sobre el plano perpendicular al plano del aro. Con línea de rayas está indicada la deformada del aro. Consideramos que los puntos de aplicación de los momentos exteriores son fijos, es decir, suponemos que en ellos se encuentran los apoyos. Determinamos la flecha máxima $\delta_{máx}$ del aro respecto a la línea de apoyos. Utilizando el método de Mohr, aplicamos en el punto medio del aro la fuerza 1 (fig. *b*). Obtenemos las reacciones en los apoyos iguales a 1/2. En la proyección axonométrica la carga unitaria está mostrada en la fig. *c*. La fuerza aplicada 1 está compuesta de dos fuerzas iguales a 1/2 cada una.

Los momentos flector y torsor debidos a la carga dada se expresan así: $M = L \operatorname{sen} \varphi$, $M_{tor} = L \cos \varphi$. Los momentos debidos a la carga unitaria (véase la solución del problema 4.82) son: $\overline{M} = -(a/4)(\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi)$, $\overline{M}_{tor} = -(a/4)(-\operatorname{sen} \varphi - \cos \varphi + 1)$.

Según la fórmula (30) (pág. 317) obtenemos

$$\delta_{máx} = \frac{4}{EJ} \int_0^{\pi/2} -L \operatorname{sen} \varphi \frac{a}{4} (\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi) \cdot a d\varphi + \frac{4}{GJ_{tor}} \int_0^{\pi/2} -(L \cos \varphi) \frac{a}{4} \times$$

$$\times (-\operatorname{sen} \varphi - \cos \varphi + 1) a \, d\varphi = 0{,}285 La^2 \left(\frac{1}{EJ} + \frac{1}{GJ_{tor}} \right).$$

Cuando $G = 0{,}4E$ y $J_{tor} = 2J$ (por ejemplo, cuando la sección es circular) $\delta_{máx} = 0{,}64La^2/(EJ)$.

5.139. La flecha en el extremo del voladizo debida a la flexión de éste es igual a $\frac{Pl^3}{3EJ}$ (véase el problema 5.1, 11). Pero la flecha debida a la torsión de la parte de viga es igual al producto del ángulo de giro $\frac{Pl \cdot l}{GJ_{tor}}$ por la longitud del voladizo. De este modo la flecha total incógnita es $v = \frac{Pl^3}{3EJ} + \frac{Pl^3}{GJ_{tor}}$

Teniendo en cuenta que $G = 0{,}4E$, $J = a^4/12$ y $J_{tor} = \alpha a^4 = 0{,}14a^4$ (el valor de $\alpha = 0{,}14$ fue tomado de los datos de la tabla para la torsión de barras de sección rectangular), obtenemos

$$v = \frac{Pl^3}{Ea^4} (4 + 17{,}8) = \frac{21{,}8Pl^3}{Ea^4}.$$

5.140. La carga es simétrica. Por consiguiente, si el sistema principal es simétrico, el problema tiene un grado de hiperestaticidad. Descomponemos la fuerza P en dos fuerzas iguales (fig. *a*) con un espacio pequeño entre los puntos de aplicación de las mismas. En las secciones A y B entre las fuerzas se pueden suponer solamente momentos flectores. Aquí los momentos torsores y las fuerzas cortantes son iguales a cero a causa de la simetría de la carga respecto a la línea AB. Consideramos que los momentos torsores en las secciones A y B como incógnita adicional X_1 del problema (fig. *b*); a causa de la antisimetría de la carga respecto a la línea CD, estos momentos son también antisimétricos. Los diagramas $\overline{M}_1$, $\overline{M}_{1\text{tor}}$ y M_P, $M_{P\text{tor}}$ están respectivamente representados en las figs. *b* y *c*. «Multiplicando» los diagramas, obtenemos

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{2}\,\frac{Pb}{2}\cdot b\cdot 1\cdot\frac{1}{EJ}\cdot 4 - 2a\,\frac{Pb}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{GJ_{\text{tor}}}\cdot 2 = -Pb^2\left(\frac{b}{EJ}+\frac{2a}{GJ_{\text{tor}}}\right).$$

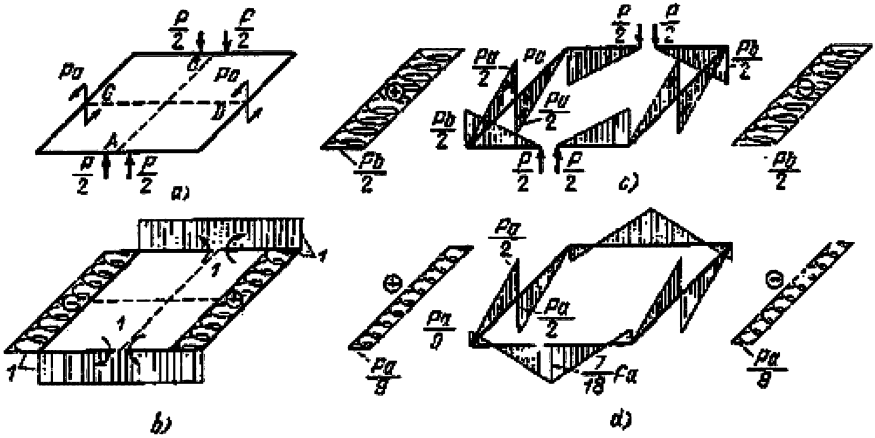
De la fig. *b* hallamos

$$\delta_{11} = 2b\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{EJ}\cdot 2 + 2a\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{GJ_{\text{tor}}}\cdot 2 = 4\left(\frac{b}{EJ}+\frac{a}{GJ_{\text{tor}}}\right)$$

y después

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{Pb}{4}\,\frac{b\alpha+2a}{b\alpha+a},$$

donde $\alpha = GJ_{\text{tor}}/(EJ)$. En la fig. *d* están representados los diagramas M y M_{tor} para el caso cuando $b = a$ y $\alpha = 0{,}8$.



Para el problema 5.140

5.141. A causa de la carga antisimétrica en las secciones medias A y B los momentos flectores son iguales a cero. Suponemos que las incógnitas adicionales X_1 son las fuerzas cortantes S en estas secciones (fig. *a*). Designamos los momentos torsores en las mismas secciones por T. De la ecuación de equilibrio $S\cdot 2a - 2T = 0$ hallamos $T = Sa = X_1 a$.

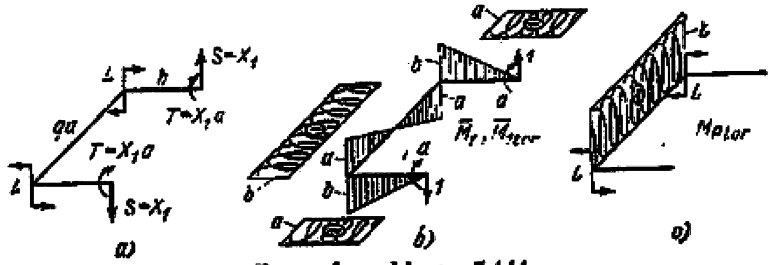
De este modo el problema se reduce a una incógnita X_1. Suponiendo que $X_1 = 1$ (fig. *b*) construimos los diagramas $\overline{M}_1$ y $\overline{M}_{1\text{tor}}$ (para una mitad del sistema principal). El diagrama $M_{P\text{tor}}$ está representado en la fig. *c*. La magnitud M_P en

todas las secciones es igual a cero. «Multiplicando» los diagramas, obtenemos

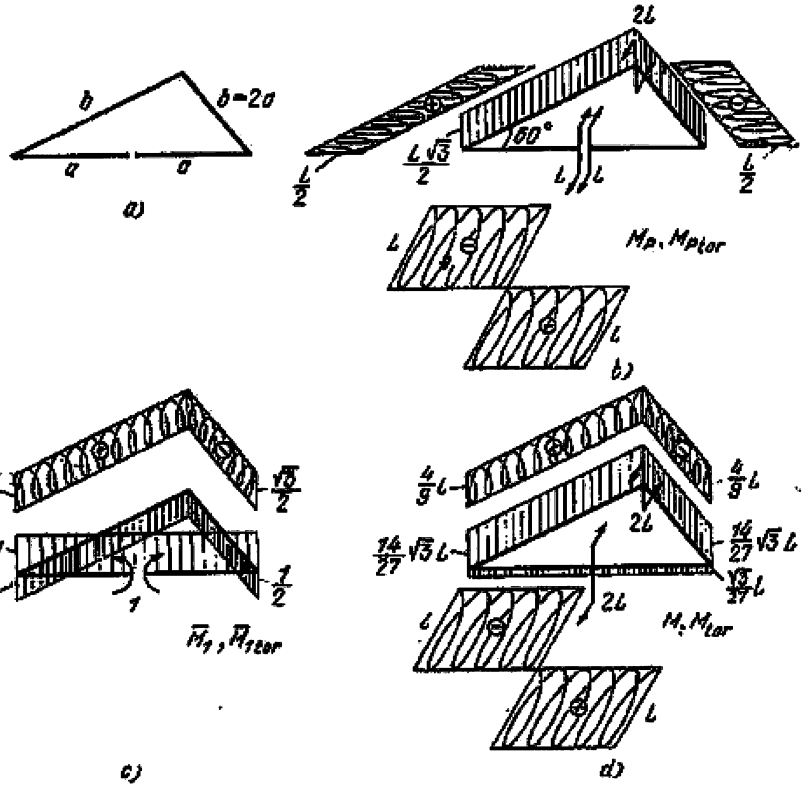
$$\Delta_{1P} = -\frac{2aL \cdot b \cdot 2}{GJ_{tor}} = \frac{4Lab}{GJ_{tor}},$$

$$\delta_{11} = \left(\frac{1}{2} bb \cdot \frac{2}{3} b \cdot \frac{1}{EJ} \cdot 2 + \frac{1}{2} aa \cdot \frac{2}{3} a \cdot \frac{1}{EJ} \cdot 2 + ba \cdot a \cdot \frac{1}{GJ_{tor}} \cdot 2 + \frac{2ab \cdot b}{GJ_{tor}}\right) 2 = \frac{4}{3EJ}(a^3 + b^3) + \left(\frac{4ab}{GJ_{tor}}\right)(a+b).$$

Cuando $a = b$ (estructura cuadrada) y $GJ_{tor} = 0{,}8EJ$ (sección circular y $G = 0{,}4E$) obtenemos $X_1 = -\Delta_{1P}/\delta_{11} = 15L/(38a)$. En la respuesta están representados los diagramas M y M_{tor} de este caso.



Para el problema 5.141



Para el problema 5.142

5.142. A causa de la simetría de la carga tenemos solamente una incógnita adicional, el momento flector en la sección media. El sistema principal está indicado en la fig. *a*. Aplicamos a éste la carga dada (fig. *b*) y construimos los diagramas M_P y M_{Ptor}. Aplicando la carga unitaria (fig. *c*), obtenemos los diagramas $\overline{M}_1$ y $\overline{M}_{1tor}$. «Multiplicando» los diagramas, hallamos

$$\Delta_{1P} = -\frac{L\sqrt{3}}{2}\, b\, \frac{1}{2}\, \frac{1}{EJ}\, 2 + \frac{L}{2}\, b\, \frac{\sqrt{3}}{2}\, \frac{1}{GJ_{tor}} = \frac{L\sqrt{3}b}{2}\left(\frac{1}{GJ_{tor}} - \frac{1}{EJ}\right);$$

$$\delta_{11} + \left(\frac{1}{2}\, b\, \frac{1}{2}\, 2 + 1 \cdot 2a \cdot 1\right)\frac{1}{EJ} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, b\, \frac{\sqrt{3}}{2}\, \frac{1}{GJ_{tor}}\, 2 =$$

$$= \left(\frac{b}{2} + 2a\right)\frac{1}{EJ} + (3/2)\, b/GJ_{tor}.$$

Cuando $b = 2a$ y $GJ_{tor} = 0{,}8EJ$ obtenemos $X_1 = -\Delta_{1P}/\delta_{11} = -L\sqrt{3}/27$. Los diagramas M y M_{tor} para este caso están representados en la fig. *d*.

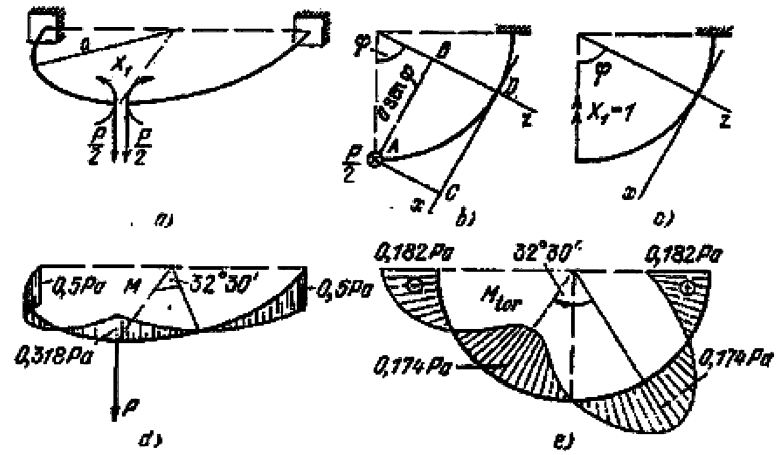
5.143. Dividiendo la carga (fig. *a*), obtenemos en la sección media una incógnita, el momento flector X_1. Componemos las expresiones M_P y M_{Ptor}. En la fig. *b* está mostrada una mitad del sistema principal en el plano bajo la carga dada $P/2$. En una sección arbitraria φ el momento flector es

$$M_P = \frac{P}{2} \cdot AB = \frac{Pa \operatorname{sen} \varphi}{2}.$$

Él es igual al momento de la fuerza $P/2$ respecto al eje transversal z. El momento torsor es

$$M_{Ptor} = \frac{P}{2} \cdot AC = \frac{P}{2} \cdot BD = \frac{P}{2}(a - a\cos\varphi),$$

y es igual al momento de la fuerza $P/2$ respecto al eje longitudinal x (a la tangente al eje de la barra).



Para el problema 5.143

Escribimos análogamente $\overline{M}_1$ y $\overline{M}_{1tor}$ (véase la fig. *c*), el momento flector (momento respecto al eje z) $\overline{M}_1 = -1 \cdot \cos\varphi$ y el momento torsor (momento respecto al eje x) $\overline{M}_{1tor} = -1 \cdot \operatorname{sen}\varphi$. El signo menos del valor de $\overline{M}_1$ se debe a que

la dirección del momento $\overline{M}_1$ es contraria a la del momento M_P tomada arriba como positiva.

Calculamos el coeficiente δ_{11} y el miembro libre Δ_{1P} de la ecuación canónica:

$$\Delta_{1P}=\int\frac{\overline{M}_1M_P\,dx}{EJ}+\int\frac{\overline{M}_{1\text{tor}}M_{P\text{tor}}\,dx}{GJ_{\text{tor}}}=$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\frac{-\cos\varphi\cdot Pa\,\text{sen}\,\varphi\cdot a\,d\varphi}{2EJ}+2\int_0^{\pi/2}\frac{-\text{sen}\,\varphi\cdot Pa\,(1-\cos\varphi)\cdot a\,d\varphi}{2GJ_{\text{tor}}}=$$

$$=-\frac{Pa^3}{2}\left(\frac{1}{EJ}+\frac{1}{GJ_{\text{tor}}}\right);\qquad(31)$$

$$\delta_{11}=\int\frac{\overline{M}_1^2\,dx}{EJ}+\int\frac{\overline{M}_{1\text{tor}}^2\,dx}{GJ_{\text{tor}}}=$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\varphi\cdot a\,d\varphi}{EJ}+2\int_0^{\pi/2}\frac{\text{sen}^2\,\varphi\cdot a\,d\varphi}{GJ_{\text{tor}}}=\frac{\pi a}{2}\left(\frac{1}{EJ}+\frac{1}{GJ_{\text{tor}}}\right).$$

Si la sección es circular y $G=0{,}4E$, es decir, cuando $GJ_{\text{tor}}=0{,}8EJ$, $\Delta_{1P}=-\frac{1{,}125Pa^3}{EJ}$, $\delta_{11}=\frac{1{,}125\pi a}{EJ}$ y $X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{Pa}{\pi}=0{,}318Pa$.

Componemos las expresiones corrientes de M y M_{tor} de los momentos flector y torsor:

$$M=M_P+\overline{M}_1X_1=\frac{P}{2}\,a\,\text{sen}\,\varphi-\cos\varphi\cdot 0{,}318Pa,$$

$$M_{\text{tor}}=M_{P\text{tor}}+\overline{M}_{1\text{tor}}X_1=\frac{Pa}{2}(1-\cos\varphi)-\text{sen}\,\varphi\cdot 0{,}318Pa.$$

Por estas ecuaciones construimos los diagramas M y M_{tor} (figs. *d*, *e*).

5.144. Dividiendo la carga, en las secciones (fig. *a*), de acuerdo con la condición de antisimetría, tenemos solamente las fuerzas transversales S y los momentos torsores T. Designemos S mediante X_1, es decir, consideramos la fuerza transversal como una incógnita libre. Según la condición de equilibrio $X_1\cdot 2a=2T$, de donde $T=X_1\cdot a$. Suponiendo que $X_1=1$ (fig. *b*), obtenemos

$$\overline{M}_1=a\,\text{sen}\,\varphi-1\cdot a\,\text{sen}\,\varphi=0,$$

$$\overline{M}_{1\text{tor}}=-1\,(a-a\cos\varphi)-a\cos\varphi=-a.$$

De la carga exterior dada (fig. *c*) tenemos

$$M_P=\frac{L\cos\varphi}{2},\qquad M_{P\text{tor}}=\frac{L\,\text{sen}\,\varphi}{2}.$$

Obtenemos (véase las fórmulas (31)):

$$\Delta_{1P}=0+\frac{2}{GJ_{\text{tor}}}\int_0^{\pi}\frac{L}{2}\,\text{sen}\,\varphi\cdot(-a)\cdot a\,d\varphi=-\frac{2La^2}{GJ_{\text{tor}}},$$

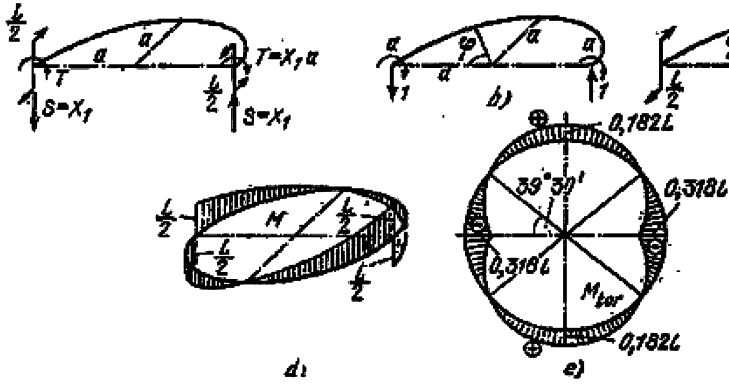
$$\delta_{11}=0+\frac{1}{GJ_{\text{tor}}}\int_0^{2\pi}a^2a\,d\varphi=\frac{2\pi a^3}{GJ_{\text{tor}}},$$

$$X_1=-\Delta_{1P}/\delta_{11}=L/(\pi a)=0{,}318L/a.$$

Escribimos las expresiones de M y M_{tor}:

$$M = M_P + \overline{M}_1 X_1 = \frac{L\cos\varphi}{2}, \quad M_{tor} = M_{ptor} + \overline{M}_{1tor} X_1 = \frac{L\,\mathrm{sen}\,\varphi}{2} - \overline{0,318}L.$$

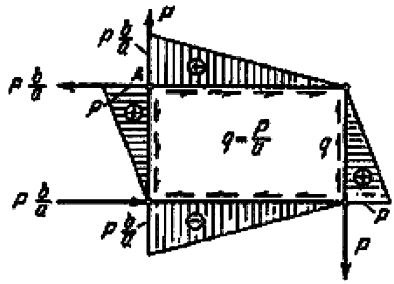
Con ayuda de estas ecuaciones construimos los diagramas M y M_{tor} (fig. *d* y *e*). Notemos que $dM_{tor}/d\varphi = M$ (esto es siempre justo cuando no existen momentos torsores distribuidos (véase el problema 4.84)).



Para el problema 5.144

5.146. 2. *Indicación.* Dividir la carga en simétrica y antisimétrica.

5.147. a) Para las condiciones dadas el problema es estáticamente determinado. La fuerza longitudinal N cambia a lo largo de cada barra linealmente. Por eso los diagramas de N se construyen de acuerdo con los valores de las ordenadas extremas (véase la figura), las cuales se definen por las cargas en los nudos o por los esfuerzos en las barras de apoyo. El esfuerzo tangencial lineal q entre la barra y la pared es igual a la tangente del ángulo de inclinación del diagrama N_B respecto a la barra.



Para el problema 5.147(a)

b) El sistema tiene dos grados de hiperestaticidad. El sistema básico lo formamos cortando la pared a lo largo del recuadro en dos pares de campos adyacentes (fig. *a*); las incógnitas libres X_1 y X_2 serán los esfuerzos tangenciales lineales q en los cortes. Las figuras *b*, *c*, *d* muestran los diagramas N_P, $\overline{N}_1$ y $\overline{N}_2$ en las barras, así como las magnitudes q_P, $\overline{q}_1$, $\overline{q}_2$ en las paredes (encerrados en círculos).

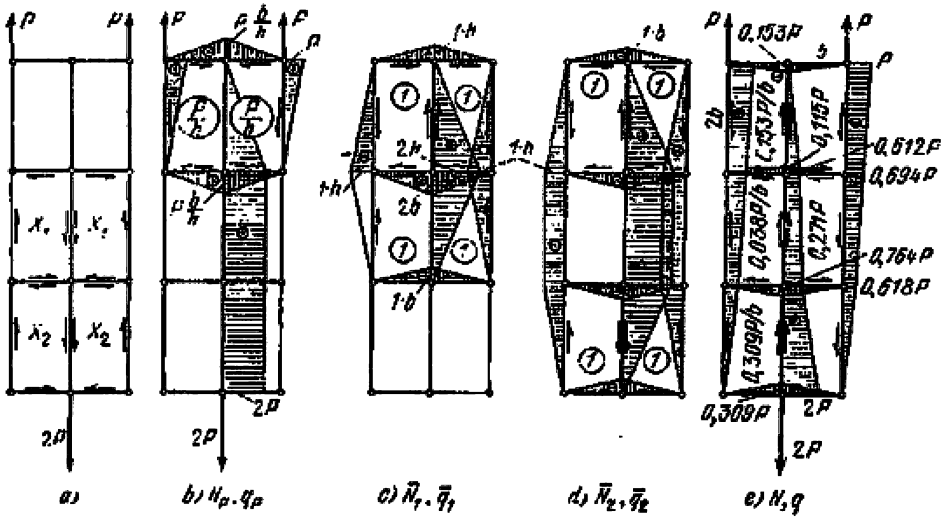
Los coeficientes y los miembros libres de las ecuaciones canónicas se calculan por medio de las fórmulas de Mohr (se supone que las paredes no pierden su estabilidad). Por ejemplo,

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{1}{EF} \int_1 \overline{N}_1 N_P\, dx + \sum \frac{\overline{q}_1 q_P hb}{Gt},$$

$$\Delta_{12} = \sum \frac{1}{EF} \int_1 \overline{N}_1 \overline{N}_2\, dx + \sum \frac{\overline{q}_1 \overline{q}_2 hb}{Gt},$$

Aquí t es el espesor de la pared; l y F, la longitud y el área de la sección de la barra, E y G, los módulos de elasticidad. La primera suma se extiende a todas las barras, la segunda, a todas las paredes.

Cuando $h = 2b$, $F = bt$ y $G = 0{,}4E$ obtenemos $X_1 = -0{,}038P/b$, $X_2 = -309P/b$. Los diagramas N y los valores de q están representados en la fig. *e*.



Para el problema 5.147(b)

5.148. Partiendo del principio de Ritz, escribimos la condición de equilibrio de la viga en la forma

$$\delta\vartheta = 0, \quad \delta(U + V) = 0, \tag{1}$$

donde ϑ es la energía potencial total del sistema; U, la energía potencial debida a la deformación; V, el potencial de la carga exterior.

Introducimos dos elementos finitos de longitud $a = l/2$ con los nudos *1*, *2* y *3* representados en la figura para el problema. Mediante $s = x/a$ designamos la coordenada adimensional que se lee a partir del extremo izquierdo de cada elemento. Como coordenadas generalizadas tomamos q_1, q_2 que son la flecha y el ángulo de giro en el nudo *1*, q_3, q_4, en el nudo *2*, q_5 y q_6, en el nudo *3*.

Supongamos que la expresión general para la flecha en los límites del elemento finito es

$$v = \vartheta_1 q_i + \vartheta_2 q_{i+1} + \vartheta_3 q_j + \vartheta_4 q_{j+1}, \tag{2}$$

donde q_i, q_{i+1} son el desplazamiento y el ángulo de giro referentes al extremo izquierdo del elemento; q_j y q_{j+1}, el desplazamiento y el ángulo de giro referentes al extremo derecho del elemento.

En el caso de una viga con extremos empotrados se tendrá $q_1 = q_2 = q_5 = q_6 = 0$. Para el primer elemento obtenemos la flecha igual a $v_{1-2} = \vartheta_3 q_3 + \vartheta_4 q_4$; para el segundo, $v_{2-3} = \vartheta_1 q_3 + \vartheta_2 q_4$. Aquí $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_4$ son las llamadas funciones hermitianas

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= 1 - 3s^2 + 2s^3, \quad & \vartheta_2 &= a(s - 2s^2 + s^3), \\ \vartheta_3 &= 3s^2 - 2s^3, & \vartheta_4 &= a(-s^2 + s^3). \end{aligned} \tag{3}$$

En la resolución del problema 7.73 (véase más adelante) se muestra que estas funciones responden a la expresión general de la flecha del tipo

$$v = a(\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3).$$

Determinamos la energía potencial debida a la deformación del elemento 1—2:

$$U_{1-2}=\frac{EJ}{2a^3}\int_0^1 v''^2\,ds; \tag{4}$$

las comillas significan la diferenciación respecto a s. Hallamos (véase también la solución del problema 7.73)

$$U_{1-2}=\frac{EJ}{2a^3}(12q_3^2-12q_3q_4+4q_4^2), \tag{5}$$

o en la forma matricial

$$U_{1-2}=\frac{EJ}{2a^3}q^{\mathrm{T}}K_{1-2}q, \tag{6}$$

donde K_{1-2} es la matriz de rigidez del elemento 1—2

$$K_{1-2}=\begin{bmatrix}12 & -6\\ -6 & 4\end{bmatrix}, \tag{7}$$

q es el vector columna con las coordenadas q_3, q_4 y q^{T} es el vector transpuesto:

$$q=\begin{bmatrix}q_3\\ q_4\end{bmatrix}, \quad q^{\mathrm{T}}=[q_3,\ q_4].$$

Examinando el elemento 2—3 obtenemos la matriz de rigidez en la forma

$$K_{2-3}=\begin{bmatrix}12 & 6\\ 6 & 4\end{bmatrix}. \tag{8}$$

Sumando las expresiones (7) y (8) obtenemos la energía potencial total de deformación en la forma

$$U=\frac{EJ}{2a^3}q^{\mathrm{T}}Kq, \quad K=\begin{bmatrix}24 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}. \tag{9}$$

La variación de U será igual a

$$\delta U=\delta q^{\mathrm{T}}\frac{EJ}{2a^3}Kq \tag{10}$$

Definamos a continuación la variación del potencial de la carga exterior, numéricamente igual al trabajo de las fuerzas generalizadas Q_3, Q_4 en los desplazamientos q_3 y q_4. Según las fórmulas (3) cuando $s=1$ $\vartheta_3^3=1$ y $\vartheta_4^3=0$. Cuando la carga es estática, la variación del potencial de las fuerzas externas es igual a

$$\delta V=-\delta q^{\mathrm{T}}\frac{P}{2}.$$

El método de Ritz, de acuerdo con la expresión (1), conduce (cuando $a=l/2$) a la relación

$$\delta q^{\mathrm{T}}\left[\frac{8EJ}{2l^3}\begin{bmatrix}24 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_3\\ \frac{l}{2}q_4\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}P\\ 0\end{bmatrix}\right]=0 \tag{11}$$

Ya que las variaciones δq^{T} son arbitrarias hallamos la flecha en la sección media:

$$q_3=v|_{l/2}=Pl^3/(192EJ). \tag{12}$$

Esta expresión coincide con la solución exacta conocida. Esto se debe a que la expresión tomada para la flecha en cada uno de los elementos finitos coincide con la línea elástica real. Hagamos constar que el problema dado es, en principio, estáticamente indeterminado y que el método de los elementos finitos corresponde aquí al conocido, en la teoría de las estructuras, método de desplazamientos.

5.149. La solución se obtiene análogamente a la del problema 5.148. Como está mostrado detalladamente en la solución del problema 7.73 (véase más adelante) la expresión de la flecha, en el caso de una viga con apoyos articulados en los extremos, tendrá el aspecto final: para el primer elemento finito $v_{1-2} = \vartheta_1^1 q_3 + \vartheta_2^1 q_4$, para el segundo elemento $v_{2-3} = \vartheta_1^2 q_3 + \vartheta_2^2 q_4$, donde las nuevas funciones hermitianas son

$$\vartheta_1^1 = 1 - \frac{3}{2}s^2 + \frac{1}{2}s^3, \quad \vartheta_2^1 = s - \frac{3}{2}s^2 + \frac{1}{2}s^3,$$
$$\vartheta_1^2 = \frac{3}{2}s - \frac{1}{2}s^3, \quad \vartheta_2^2 = -\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^3. \tag{1}$$

La energía potencial de deformación del sistema resulta (véase el problema 7.73) igual a

$$U = \frac{EJ}{2a^3} q^T K_{q_1}. \tag{2}$$

Las matrices de rigidez para el primer y segundo elementos serán:

$$K_{1-2} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad K_{2-3} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

La matriz total tiene la forma

$$K = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

La variación del potencial de la carga externa es igual a

$$V = -\frac{1}{2} q^T \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Según el método de Ritz cuando $\delta(U + V) = 0$,

$$\frac{8EJ}{l^3} 6q_3 = P \text{ y } q_3 = \frac{Pl^3}{48EJ} = v|_{l/2}. \tag{5}$$

Este valor de q_3 coincide con el exacto. Y aquí se comprueba fácilmente que la línea elástica tomada por nosotros con ayuda de las funciones ϑ_1^2, ϑ_2^2 corresponde a la verdadera.

5.150. Utilizamos las soluciones de los problemas 5.148 y 5.149. Para la mitad izquierda de la viga (como en el problema 5.148)

$$K_{1-2} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

para la segunda mitad (como en el problema 5.149)

$$K_{2-3} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

La matriz total de rigidez tiene la forma

$$K = \begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

La fuerza generalizada correspondiente a la coordenada q_3 es igual a P; la fuerza correspondiente a q_4 no existe.

Por consiguiente, llegamos a la ecuación

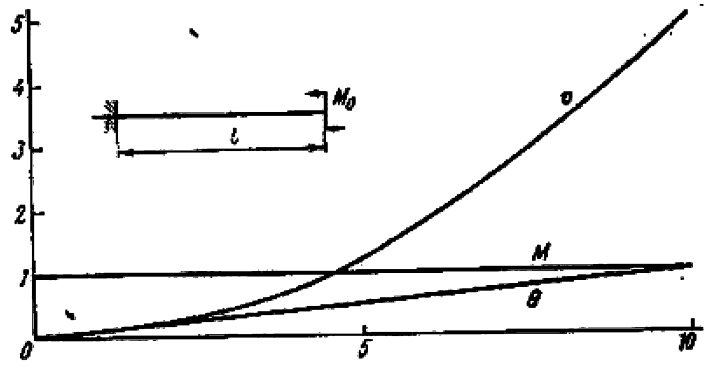
$$\frac{8EJ}{2l^3}\begin{bmatrix}15 & 3\\ 3 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_3\\ \frac{l}{2}q_4\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}P\\ 0\end{bmatrix}. \tag{4}$$

En este caso deben cumplirse dos igualdades:

$$\frac{4EJ}{l^3}\left(15q_3+3\frac{l}{2}q_4\right)=P, \tag{5}$$

$$3q_3+7\frac{l}{2}q_4=0. \tag{6}$$

De aquí hallamos los valores de $q_3=v|_{z/2}$ y $q_4=\theta|_{z/2}$, citados en la respuesta.



Para el problema 5.151

5.151. Repitiendo los cálculos del problema 5.148, obtenemos la expresión de la flecha

$$v=\vartheta_3 q_3+\vartheta_4 q_4. \tag{1}$$

La energía potencial de la deformación es igual a

$$U=\frac{EJ}{2l^3}q^{\mathrm{T}}Kq. \tag{2}$$

La matriz de rigidez es igual a

$$K=\begin{bmatrix}12 & -6\\ -6 & 4\end{bmatrix}. \tag{3}$$

La ecuación completa es

$$\frac{EJ}{2l^3}\begin{bmatrix}12 & -6\\ -6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_3\\ lq_4\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\ M\end{bmatrix}. \tag{4}$$

De aquí hallamos

$$12q_3-6lq_4=0,\qquad \frac{EJ}{l^3}(-6q_3+4lq_4)=M_0.$$

Tomando como ejemplo los valores EJ, l y M_0, indicados en el problema, obtenemos con ayuda del trazador de gráficos de una ordenadora los diagramas representados en la figura.

CAPITULO 6

RESISTENCIA COMPUESTA

6.1. La sección más peligrosa de la viga coincide con la del empotramiento. Aquí los momentos flectores son $M_x = Pl \cos \alpha = 3{,}12$ kN·m, $M_y = Pl \operatorname{sen} \alpha = 1{,}8$ kN·m.

Las tensiones normales en las fibras exteriores debidas a estos momentos son

$$\sigma_z = \pm M_x/W_x = \pm 32{,}5 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = \pm M_y/W_y = \pm 56{,}2 \text{ MPa}.$$

Las tensiones sumarias en los ángulos de la sección más peligrosa son

$$\sigma_1 = 88{,}7 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = -23{,}7 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -88{,}7 \text{ MPa}, \quad \sigma_4 = 23{,}7 \text{ MPa}.$$

Las flechas en dirección de los ejes z, y son

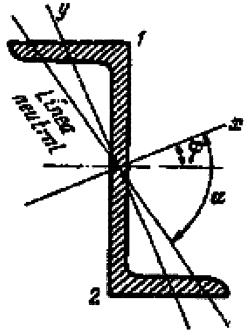
$$v_z = -\frac{Pl^3 \operatorname{sen} \alpha}{3EJ_y} = -0{,}675 \text{ cm}, \quad v_y = -\frac{Pl^3 \cos \alpha}{3EJ_x} = -0{,}180 \text{ cm}.$$

La flecha total es

$$v = \sqrt{v_z^2 + v_y^2} = 0{,}687 \text{ cm}.$$

6.5. El momento máximo es $M_{máx} = ql^2/8 = 5$ kN·m. La posición de la línea neutral se determina por su inclinación respecto al eje z a un ángulo α:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \varphi = 5{,}5; \quad \alpha = 1{,}39 \text{ rad}.$$



Para el problema 6.5

La construcción de la línea neutral muestra que los puntos *1* y *2* son los de mayor peligro. Calculamos las coordenadas de estos puntos:

$$x_1 = \frac{h}{2} \operatorname{sen} \varphi + \frac{t}{2} \cos \varphi = 3{,}0 \text{ cm}.$$

$$y_1 = \frac{h}{2} \cos \varphi - \frac{t}{2} \operatorname{sen} \varphi = 6{,}3 \text{ cm}.$$

La tensión máxima es

$$\sigma_{máx} = M_{máx} \left(\frac{y \cos \varphi}{J_z} + \frac{x \operatorname{sen} \varphi}{J_y} \right) = 120 \text{ MPa}.$$

La flecha en la dirección negativa del eje y es

$$f_y = \frac{5ql \cos \varphi}{384EJ_x} = 0{,}0114 \text{ cm}.$$

La flecha total es igual a $f = f_y/\cos \alpha = 0{,}0633$ cm.

6.8. El momento flector máximo (en la sección media del tramo) es $M_{máx} = ql^2/8 = 10$ kN·m.

Los momentos flectores máximos en los planos principales de la viga son:

$$M_x = M_{máx} \cos(\pi/6) = 8{,}66 \text{ kN·m}; \quad M_y = M_{máx} \operatorname{sen}(\pi/6) = 5 \text{ kN·m}.$$

Los módulos resistentes se definen de la condición $[\sigma] = M_x/W_x + M_y/W_y$. Cuando actúa solamente M_x el módulo resistente necesario es

$$W_x = M_x/[\sigma] = 54 \text{ cm}^3,$$

que corresponde al perfil en U N° 12 (véase la tabla en la pag. 468). Cuando actúa solamente M_y el módulo resistente necesario es

$$W_y = M_y/[\sigma] = 31{,}2 \text{ cm}^3$$

que corresponde al perfil en U N° 24. De este modo el número del perfil en U debe ser mayor que el 24.

Elegimos el perfil en U N° 27 para el cual $W_x = 308$ cm³ y $W_y = 37{,}3$ cm³. Comprobamos:

$$\sigma = M_x/W_x + M_y/W_y = 160 \text{ MPa} = [\sigma].$$

La condición de resistencia se cumple.

6.9. De la condición $M_x/W_x + M_y/W_y = [\sigma]$, donde $W_x = k^2b^3/6$ y $W_y = kb^3/6$ se deduce que

$$b = \sqrt[3]{\frac{6M_x + 6M_y k}{[\sigma] \cdot k^2}}.$$

El área de la sección de la barra es $F = kb = \sqrt[3]{\dfrac{36\,(M_x + kM_y)^2}{[\sigma]^2 k}}$.

El peso mínimo de la barra corresponde al valor mínimo del área de la sección F. De la condición de mínimo $dF/dk = 0$ se encuentra: $k = h/b = M_x/M_y$.

6.10. De la ecuación de la flecha en el extremo

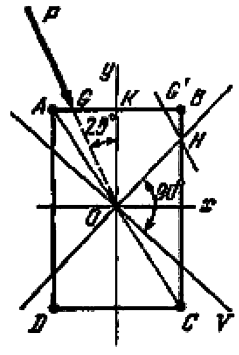
$$[f] = \sqrt{\left(\frac{Pl^3 \cos\alpha}{3EJ_x}\right)^2 + \left(\frac{Pl^3 \operatorname{sen}\alpha}{3EJ_y}\right)^2}$$

hallamos el área de la sección de la viga

$$F = \sqrt[4]{\frac{144P^2l^6\,(\cos^2\alpha + k^2 \operatorname{sen}^2\alpha)}{9k^2E^2[f]^2}}.$$

De la condición $\partial F/\partial k = 0$ hallamos $k = 1/\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$.

6.13. En el rectángulo de inercia trazamos el segmento $G'K$ igual al segmento GK. Trazamos la recta $G'H$ paralela a la diagonal AC del rectángulo de inercia. Dibujamos una recta a través de los puntos O y H. Esta recta es la línea neutral correspondiente a la línea de carga GO. La dirección de la flecha coincide con la dirección de la recta OV perpendicular a OH.



Para el problema 6.13

6.15. La condición de resistencia en el caso de tracción excéntrica es

$$\sigma = \frac{P}{F}\left[1 + \frac{y_P y}{i_x^2} + \frac{x_P x}{i_y^2}\right] \leqslant [\sigma].$$

En este caso $y_P = 0$, $x_P = b/4$, $x = b/2$, $i_y^2 = b^2/12$ obtenemos $5P/(2bt) < [\sigma]$ de donde

$$b \geqslant \frac{5}{2}\,\frac{P}{t\,[\sigma]} = 7{,}8 \text{ cm}$$

6.19. El momento flector en la sección debilitada es $M = Px/2$. El área y el módulo resistente en la sección debilitada son $F=(b-x)t$, $W=(b-x)^2t/6$. Las tensiones máximas en la sección debilitada se igualan a la admisible:

$$\frac{P}{F}+\frac{M}{W}=\frac{P}{(b-x)t}+\frac{P+\frac{x}{2}6}{(b-x)^2t}=[\sigma],\quad x=23{,}5\text{ mm}.$$

6.20. La tensión en la sección no debilitada es $\sigma = 75$ MPa. En la sección de la banda debilitada por arista hueca la carga se transmite con una excentricidad $e = a/2 = 0{,}5$ cm. Tenemos tracción con flexión; $\sigma = 111$ MPa, por consiguiente, la tensión aumentó en un $\frac{111-75}{75}\cdot 100 = 48\%$.

6.26. Si la carga se transmite centralmente, entonces sería suficiente un área de la sección $F = P/[\sigma] = 15{,}6$ cm². Teniendo en cuenta la existencia de la flexión tomamos aproximadamente el perfil en U N° 24: $F = 30{,}6$ cm².

El grosor necesario de la banda $t = P/(b[\sigma]) = 0{,}65$ cm. Tenemos $z_1 = z_2 = 2{,}42$ cm, $z_2 = b - z_0 = 9 - 2{,}42 = 6{,}58$ cm, $e = z_2 + t/2 = 2{,}42 + 0{,}32 = 2{,}74$ cm. Las tensiones en las fibras extremas son

$$\sigma_1=\frac{P}{F}+\frac{P\cdot e}{J_y}z_1=161{,}2\text{ MPa},\quad \sigma_2=\frac{P}{F}-\frac{P\cdot e}{J_y}z_2=-134{,}6\text{ MPa}.$$

La condición de resistencia se cumple.

6.30. Las tensiones máximas se encuentran en la sección de empotramiento

$$N=P\cos\alpha,\quad M=Pl\operatorname{sen}\alpha,\quad \sigma=-\frac{N}{F}-\frac{M}{W}=-\frac{P}{a^2}\left(\cos\alpha+\frac{6l}{a}\operatorname{sen}\alpha\right).$$

El ángulo α_0 se halla de la condición

$$\left(\frac{d\sigma}{d\alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0}=\frac{P}{a^2}\left(\operatorname{sen}\alpha_0+\frac{6l}{a}\cos\alpha_0\right)=0,$$

de donde $\operatorname{tg}\alpha_0 = 6l/a$. Por consiguiente,

$$\sigma=-\frac{P}{a^2}\frac{\cos(\alpha-\alpha_0)}{\cos\alpha_0}.$$

6.39. El área y el módulo resistente de la sección AA son:

$$F=\frac{\pi}{4}(d_1d_2-d_1'd_2')=11{,}8\text{ cm}^2;\quad W=\frac{0{,}1}{d_1}(d_1^3d_2-d_1'^3d_2')=23{,}55\text{ cm}^3;$$

$$d_1'=d_1-2t;\quad d_2'=d_2-2t.$$

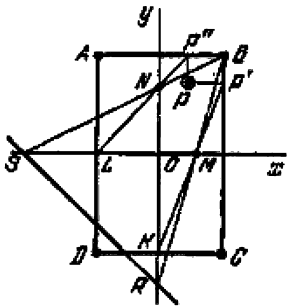
El momento flector en la sección AB: $M = P_1b + P_2(a + r) = 37{,}5$ kN·m.

Las tensiones máximas de compresión son: $\sigma = -P_2/F - M/W = -1698$ MPa.

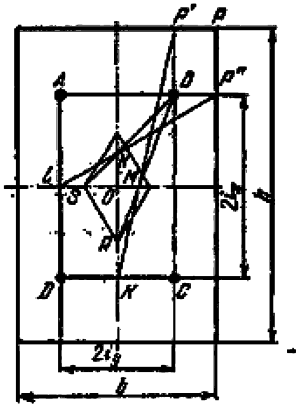
6.44. A través del punto de aplicación de P trazamos las rectas PP' y PP'' paralelas correspondientemente a los ejes de coordenadas x e y hasta la intersección con los lados AB y BC del rectángulo de inercia. Trazamos las rectas $P'K$ y $P''L$ y marcamos los puntos de intersección M y N con los ejes x e y. Trazamos la recta BM hasta la intersección con el eje y y la recta BN hasta la intersección con el eje x. Los segmentos OS y OR son iguales a los segmentos cortados por la línea neutral en los ejes x e y: $OS = -i_x^2/x_P = a$, $OR = i_x^2/y_P = b$. Por consiguiente, la recta SR es también la línea neutral buscada.

6.45. Construimos el rectángulo de inercia $ABCD$: $i_x = h/\sqrt{12} = 2{,}89$ cm, $i_y = b/\sqrt{12} = 1{,}73$ cm. Suponiendo que la fuerza actúa en el ángulo P de la sección rectangular dada, construimos la línea neutral SR como se indica en la

solución del problema 6.44. Los puntos P' y P'' los definimos como puntos de intersección de las prolongaciones de los lados del rectángulo de inercia con el contorno de la sección. La línea SR representa uno de los lados del núcleo de la sección. Por analogía se construyen los lados restantes del núcleo. Como resultado obtenemos un núcleo en forma de rombo con semidiagonales $e_x = 1$ cm, $e_y = 1{,}67$ cm.



Para el problema 6.44

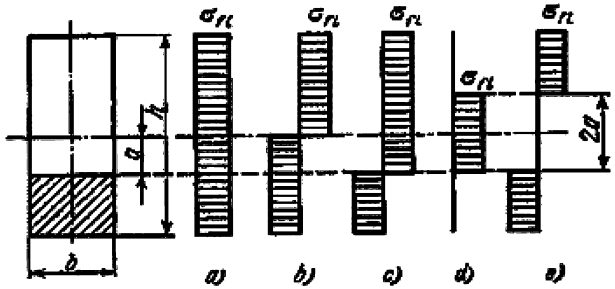


Para el problema 6.45

6.46. Los diagramas de distribución de las tensiones normales a lo alto de la sección de la barra en sus estados límites están representados en la figura. El diagrama *a* corresponde a la acción, en la sección de la viga, de la fuerza longitudinal de fluencia N_{fl} y el diagrama *b* al momento flector de fluencia M_{fl}. De estos diagramas se deduce:

$$N_{fl} = \sigma_{fl} bh, \quad M_{fl} = \frac{1}{4} \sigma_{fl} bh^2.$$

El diagrama *c* corresponde a la acción simultánea del momento flector y de la fuerza longitudinal N. Si el diagrama *c* se representa como la suma de los diagra-



Para el problema 6.46

mas *d* y *e*, el primero de los cuales corresponde a la fuerza N y el segundo, al momento M, entonces se puede escribir:

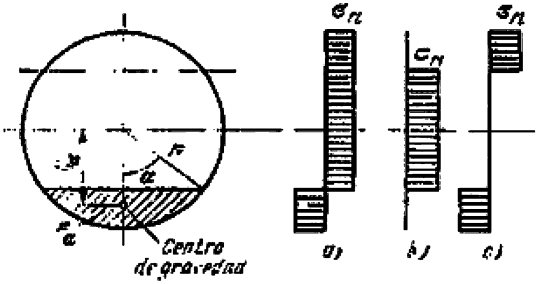
$$N = \sigma_{fl} 2ab = N_{fl} \frac{2a}{h}, \quad M = 2\sigma_{fl} b \left(\frac{h}{2} - a\right)\left(\frac{h}{2} + a\right)\frac{1}{2} = M_{fl}\left[1 - \left(\frac{2a}{b}\right)^2\right].$$

Eliminando de las últimas dos fórmulas $2a/b$, obtenemos

$$M/M_{fl} = 1 - (N/N_{fl})^2.$$

Es evidente que los mementos M y M_{fl} tienen los mismos signos.

6.47. El aspecto general del diagrama de distribución de las tensiones normales a lo alto de la sección de la barra circular en su estado límite está mostrado



Para el problema 6.47

en la fig. *a*. Dividimos el diagrama *a* en dos: *b* y *c*, el primero de los cuales corresponde a la fuerza N y el segundo, al momento M. En base a estos diagramas podemos escribir:

$$N = \sigma_{fl}(\pi r^2/4 - 2F_\alpha), \quad M = 2\sigma_{fl}F_\alpha y_\alpha,$$

donde

$$F_\alpha = \frac{r^2}{2}(2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha), \quad y_\alpha = \frac{4r \operatorname{sen}^3 \alpha}{2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}.$$

Ya que $N_{fl} = \pi\sigma_{fl}r^2$, $M_{fl} = \frac{4}{3}\sigma_{fl}r^3$, entonces $\frac{N}{N_{fl}} = 1 - \frac{2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{\pi}$, $\frac{M}{M_{fl}} = \operatorname{sen}^3 \alpha$.

6.52. De acuerdo con la tercera teoría de resistencia el momento reducido es igual a

$$M_{red}^{III} = \sqrt{M_f^2 + M_{tor}^2} = P\sqrt{l^2 + a^2} = 1{,}7 \text{ kN·m}.$$

El diámetro del árbol es $d^{III} = \sqrt[3]{\frac{32M_{red}^{III}}{\pi[\sigma]}} = 4{,}86$ cm.

6.54. Los momentos reducidos según las cuatro teorías de resistencia son:

$$M_{red}^{I} = 0{,}5M_f + 0{,}5\sqrt{M_f^2 + M_{tor}^2} = 1{,}2 \text{ kN·m},$$

$$M_{red}^{II} = 0{,}35M_f + 0{,}65\sqrt{M_f^2 + M_{tor}^2} = 1{,}3 \text{ kN·m},$$

$$M_{red}^{III} = \sqrt{M_f^2 + M_{tor}^2} = 1{,}5 \text{ kN·m},$$

$$M_{red}^{IV} = \sqrt{M_f^2 + 0{,}75M_{tor}^2} = 1{,}38 \text{ kN·m}.$$

El diámetro del árbol es

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_{red}}{\pi[\sigma]}}.$$

Tenemos: $d^I = 4{,}95$ cm, $d^{II} = 5{,}1$ cm, $d^{III} = 5{,}35$ cm, $d^{IV} = 5{,}2$ cm.

6.56. El área doble limitada por el contorno de la sección transversal es igual a $\Omega_{cont} = 2\,\frac{40+20}{2}\,100 = 6\,000$ cm². El momento de inercia de la sección transversal es

$$J_x = 2\,(6\cdot 20^2 + 3\cdot 10^3) + 2\cdot 0{,}5\,(18^2+16^2+14^2+12^2) + \\ + \frac{0{,}3\cdot 40^3}{12} + \frac{0{,}2\cdot 20^3}{12} + 2\cdot 100\cdot 0{,}1\cdot 15^2 = 12\,550 \text{ cm}^4.$$

Las tensiones normal y tangencial en el revestimiento son

$$\sigma = \frac{M_f}{J}\,\frac{H}{2} = 56 \text{ MPa}, \quad \tau = \frac{M_{tor}}{\Omega_{cont} t_0} = 30 \text{ MPa}.$$

Según la tercera teoría de resistencia la tensión reducida es

$$\sigma_{red}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 82 \text{ MPa} < [\sigma].$$

6.58. Para la barra de sección circular

$$(\sigma_{cir}^{III})^2 = \left(\frac{32M_f}{\pi d^3}\right)^2 + 4\left(\frac{16M_{tor}}{\pi d^3}\right)^2 = 55{,}8\,\frac{M_f^2}{F_{cir}^3}.$$

Para la barra de sección cuadrada

$$(\sigma_{cua}^{III})^2 = \left(\frac{6M_f}{a^3}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{tor}}{0{,}208a^3}\right)^2 = 46\,\frac{M_f^2}{F_{cua}^3}.$$

Aquí a es el lado de la sección cuadrada; d, el diámetro de la sección circular; F_{cir} y F_{cua}, las áreas de las secciones circular y cuadrada. La comparación de las tensiones reducidas da: $F_{cua} = 0{,}94F_{cir}$. De este modo la barra de sección cuadrada es en un 6% más ligera que la circular.

6.59. Para la barra de sección circular

$$\sigma_{cir}^{III} = \frac{32}{\pi d^3}\sqrt{(M_f^2 + M_{tor}^2)}.$$

Para la barra de sección cuadrada

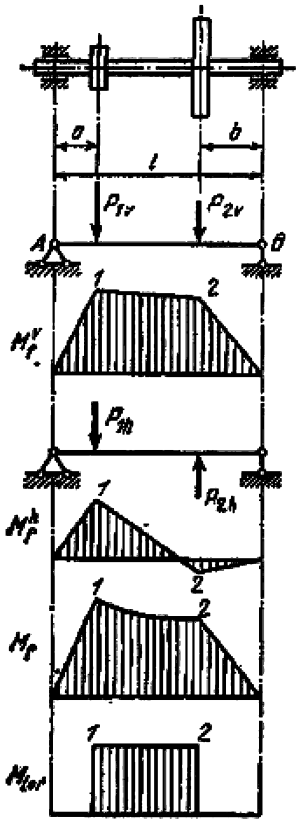
$$(\sigma_{cua}^{III})^2 = \left(\frac{6M_f}{a^3}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{tor}}{0{,}208a^3}\right)^2 = \frac{2^5}{\pi^3 d^6}\,(36M_f^2 + 92M_{tor}^2),$$

porque según la condición de igualdad de áreas $a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,d$; aquí a es el lado de la sección cuadrada; d, el diámetro de la sección circular. La comparación de las tensiones reducidas para las tensiones circular y cuadrada da

$$\frac{M_f}{M_{tor}} = \sqrt{\frac{92-16\pi}{16\pi-36}} = 1{,}71.$$

De aquí se deduce que cuando $M_f/M_{tor} < 1{,}71$ la barra de sección circular es más resistente y cuando $M_f/M_{tor} > 1{,}71$ más resistente es la de sección cuadrada.

6.60. El momento torsor que transmite el tramo de árbol dispuesto entre las ruedas dentadas, es $M_{tor} = 71\,620\ N/n = 3{,}581$ kN·m. Los esfuerzos circunferenciales se determinan de la igualdad $M_{tor} = P_1 r_1 = P_2 r_2$. Obtenemos $P_1 \approx 60$ kN, $P_2 \approx 30$ kN.



Para el problema 6.60

Descomponemos los esfuerzos circunferenciales en las componentes verticales y horizontales:

$$P_{1v} = P_1 \cos \alpha_1 = 42{,}4 \text{ kN};$$
$$P_{1h} = P_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = 42{,}4 \text{ kN};$$
$$P_{2v} = P_2 \cos \alpha_2 = 25{,}9 \text{ kN};$$
$$P_{2h} = P_2 \operatorname{sen} \alpha_2 = 15 \text{ kN}.$$

Pasamos los esfuerzos componentes al eje del árbol y construimos los diagramas de los momentos flectores separadamente para las fuerzas verticales y horizontales. Las reacciones en los apoyos y los momentos flectores debidos a las fuerzas verticales son: $A_v = 41{,}8$ kN; $B_v = 26{,}5$ kN; $M_1^v = 4{,}18$ kN·m, $M_2^v = 3{,}98$ kN·m.

Las reacciones en los apoyos y los momentos flectores debidos a las fuerzas horizontales son: $A_h = 29{,}5$ kN; $B_h = -2{,}1$ kN; $M_1^h = 2{,}95$ kN·m; $M_2^h = 0{,}315$ kN·m.

Los diagramas M_f^v y M_f^h están representados en la figura. Los momentos flectores sumarios se hallan en las secciones características como las sumas geométricas de los momentos en los planos vertical y horizontal

$$M_1 = \sqrt{(M_1^v)^2 + (M_1^h)^2} = 5{,}1 \text{ kN·m},$$
$$M_2 = \sqrt{(M_2^v)^2 + (M_2^h)^2} = 4 \text{ kN·m}.$$

El diagrama de los momentos sumarios M_f está también representado en la figura. Comparando este diagrama con el de los momentos torsores M_{tor}, hallamos la sección más peligrosa del árbol en el punto *1*. El momento reducido en el punto *1* es, según la cuarta teoría de resistencia, igual a:

$$M_{red}^{IV} = M_f^2 + 0{,}75 M_{tor}^2 = 6 \text{ kN·m}.$$

Hallamos el diámetro del árbol

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{red}^{IV}}{\pi [\sigma]}} = 8 \text{ cm}.$$

6.66. La fórmula de cálculo tiene la forma

$$\sigma_{equi}^{III} = \sqrt{\left(\frac{M_f}{W_f} + \frac{N}{F}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{tor}}{W_{tor}}\right)^2} \leqslant [\sigma].$$

Sustituimos en esta fórmula los datos iniciales y elevamos al cuadrado sus términos derecho e izquierdo. Rechazamos el signo de desigualdad. Resolviendo la ecuación obtenida por el método de pruebas hallamos $d > 4.1$ cm.

6.71. Según la tercera teoría de resistencia tenemos

$$\left(\frac{P}{a^2}\right)^2+4\left(\frac{M_{tor}}{0{,}208a^3}\right)^2\leqslant[\sigma]^2,$$

de donde $4a^2+93=a^6$. Mediante el método de pruebas hallamos $a=2{,}2$ cm.

6.72. Sin efectuar cálculos, construimos en una escala arbitraria los diagramas de las fuerzas interiores Q, N, M_x, M_y y M_{tor} en las secciones de la palanca y sacamos la conclusión de que la sección más peligrosa está junto a la fijación del amortiguador (sección AA). Determinamos las fuerzas interiores en la sección más peligrosa:

$$Q=P\operatorname{sen}0{,}698=51{,}5\text{ kN};\quad N=P\cos 0{,}698=61{,}3\text{ kN};$$

$$M_x=P(l-l_1)\operatorname{sen}0{,}698=18{,}6\text{ kN}\cdot\text{m};$$

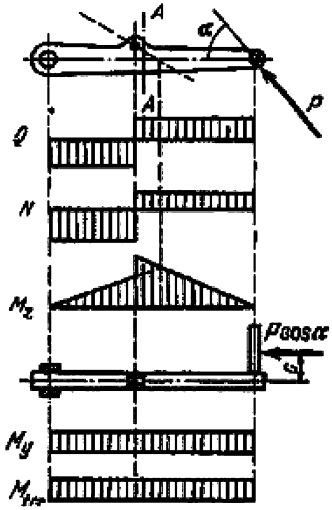
$$M_y=Pc\cos 0{,}698=12{,}3\text{ kN}\cdot\text{m};\quad M_{tor}=Pc\operatorname{sen}0{,}698=10{,}3\text{ kN}\cdot\text{m}.$$

Calculamos el área y los momentos de resistencia en la sección más peligrosa:

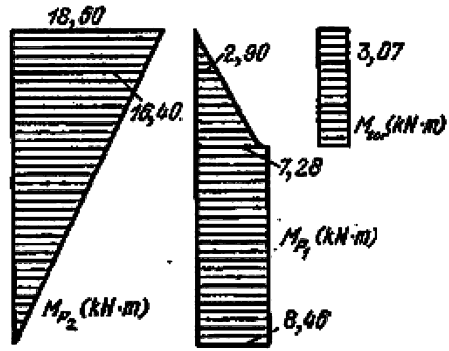
$$F=2t(b+a-2t)=22{,}6\text{ cm}^2,\quad W_x=\frac{th^2}{3}+at(b-2t)=78\text{ cm}^3,$$

$$W_y=\frac{tb^2}{3}+bt(a-2t)=63\text{ cm}^3,\quad W_{tor}=2t(b-t)(a-t)=101\text{ cm}^3.$$

La tensión normal máxima se encuentra en el punto angular de la sección, donde se componen las tensiones normales debidas a N, M_x y M_y. En este mismo



Para el problema 6.72



Para el problema 6.73

punto hay también una tensión tangencial debida a M_{tor}. Las tensiones tangenciales en este punto debidas a Q pueden ser despreciadas. Calculamos:

$$\sigma=N/F=M_x/W_x+M_y/W_y=460\text{ MPa},\quad \tau=M_{tor}/W_{tor}=94\text{ MPa}.$$

Según la tercera teoría de resistencia la tensión reducida es

$$\sigma_{equ}^{III}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}=590\text{ MPa}.$$

El coeficiente de seguridad de la resistencia es $n=\sigma_r/\sigma_{equ}=2$.

6.73. Descomponemos la fuerza P en dos direcciones

$$P_1 = P\cos\alpha = 56{,}4 \text{ kN}, \quad P_2 = P \operatorname{sen}\alpha = 20{,}5 \text{ kN}.$$

Determinamos los esfuerzos N en el vástago director

$$N_1 = N\cos\beta, \quad N_2 = N \operatorname{sen}\beta, \quad P_1 c - N_1 e - N_1 e - N_2 a = 0,$$

$$N = \frac{P_1 e}{(e\cos\beta + a \operatorname{sen}\beta)} = 33{,}7 \text{ kN}, \quad N_1 = 16{,}85 \text{ kN}.$$

El diagrama de los momentos flectores debido a la fuerza P_2 tiene la forma de un triángulo. Junto al apoyo superior el momento es $M_{P_2} = P_2 l = 18{,}5$ kN·m. Las ordenadas de los diagramas de los momentos flectores debidos a la fuerza P_1 en el tramo a partir de la rueda hasta la fijación del vástago director son constantes $M_{P_1} = P_1 c = 18{,}46$ kN·m. Junto al punto de fijación del vástago director hay un salto del momento a causa de la fuerza N_1: éste es igual a $\Delta M_{P_1} = N_1 e = 1{,}18$ kN·m. A lo largo del cilindro el diagrama M_{P_1} es lineal, junto al apoyo superior $M_{P1} = 0$.

Los momentos torsores M_{tor} son constantes: $M_{tor} = P_2 c = 3{,}075$ kN·m. Para el cilindro la sección de cálculo se encuentra junto al fondo superior. Aquí $M_{P1} = 16{,}4$ kN·m, $M_{P2} = 2{,}9$ kN·m. El momento sumario es

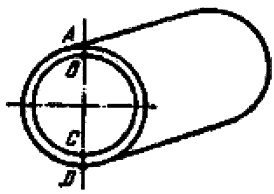
$$M = \sqrt{M_{P_1}^2 + M_{P_2}^2} = 16{,}7 \text{ kN·m}.$$

El área de la sección y el módulo resistente de la sección ($\gamma = d_1/d$) son:

$$F = \frac{\pi}{4} d^2 (1 - \gamma^2) = 33 \text{ cm}^2,$$

$$W = \frac{\pi}{32} d^3 (1 - \gamma^4) = 18{,}9 \text{ cm}^3.$$

Las tensiones normales debidas a la flexión son $\sigma_M = M/W = 884$ MPa, las debidas a la fuerza longitudinal son $\sigma_N = -N_1/F = 5{,}1$ MPa. Las tensiones tangenciales debidas a la torsión son $\tau = M_{tor}/2W = 81{,}4$ MPa. La presión dentro del cilindro es $p = P_1/F = 16{,}8$ MPa. Las tensiones normales en las secciones longitudinales del cilindro son $\sigma = pd_{med}/(2t_{pared}) = 118$ MPa. En el punto peligroso cerca de la superficie del cilindro a lo largo del eje del cilindro actúan tensiones normales $\sigma_x = -889$ MPa a lo largo de la tangente hacia la circunferencia exterior de la sección, $\sigma_y = 118$ MPa y además las tensiones tangenciales $\tau = 81{,}4$ M. Según la tercera teoría de resistencia tenemos



Para el problema 6.74

$$\sigma_{equl}^{III} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} = 1010 \text{ MPa}.$$

La condición de resistencia se cumple: $\sigma_{equl}^{III} < [\sigma]$.

6.74. El área y el momento de inercia de la sección transversal del cilindro ($\gamma = d/D$) son:

$$F = \frac{\pi D^2}{4}(1 - \gamma^2) = 8{,}5 \text{ cm}^2, \quad J = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \gamma^4) = 33{,}3 \text{ cm}^4.$$

Las componentes horizontal y vertical de la fuerza P son:

$$P_x = P\pi D^2\gamma^2/4 = 4{,}72 \text{ kN}, \quad P_y = P_x \operatorname{tg}\alpha = 7{,}35 \text{ kN}.$$

La reacción en la pared interior del cilindro debida a la varilla $P_1 = P_y (a - z)/z$. Cuando $z = l/2$, $P_1 = 10{,}2$ kN. El momento flector máximo (en la sec-

ción media del cilindro) es $M_t = P_1 l/4 = 1{,}25$ kN·m. Las tensiones normales de flexión en los puntos A y D de la sección del cilindro es: $\sigma = \pm(M_f/J)\ (D/2) = \pm 112{,}5$ MPa; en los puntos B y C es: $\sigma = \pm(M_f/J)\ (D/2)\ \alpha = 94$ MPa. Las tensiones normales debidas a la presión interior en el cilindro, en las secciones longitudinal y transversal son respectivamente

$$\sigma_{lon} = pD/(2t) = 15 \text{ MPa}, \quad \sigma_{rad} = \sigma_{lon}/2 = 7{,}5 \text{ MPa}.$$

Las tensiones normales longitudinales totales en los puntos A, B, C y D (en MPa) son:

$$\sigma^A = 120, \quad \sigma^B = 101{,}5, \quad \sigma^C = -86{,}5, \quad \sigma^D = -105.$$

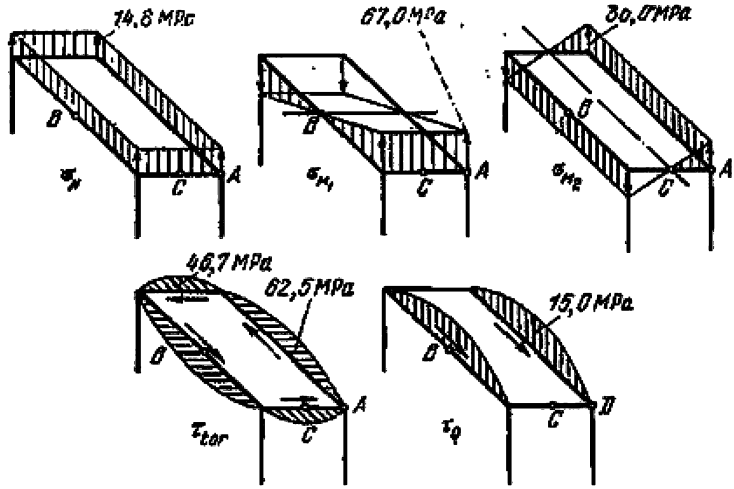
Los estados tensionales en los puntos A, B, C y D se determinan mediante las tensiones principales siguientes (en MPa): en el punto A: $\sigma_1 = 120$, $\sigma_2 = 15$, $\sigma_3 = 0$; en el punto B: $\sigma_1 = 101{,}5$, $\sigma_2 = 15$, $\sigma_3 = -p = -2{,}5$; en el punto C: $\sigma_1 = 15$, $\sigma_2 = -2{,}5$, $\sigma_3 = -86{,}5$; en el punto D: $\sigma_1 = 15$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -105$. Según la tercera teoría de resistencia el más peligroso es el punto A. Para este punto $\sigma_{equi}^{III} = 120$ MPa $< [\sigma]$.

6.76. Calculamos las tensiones normales y tangenciales máximas en los puntos característicos de la sección transversal del codo del cigüeñal (en MPa)

$$\sigma_N = \frac{N}{P} = 14{,}8, \quad \sigma_{M_1} = 67, \quad \sigma_{M_2} = 36,$$

$$\tau'_{tor} = 62{,}5, \quad \tau''_{tor} = 0{,}745\tau'_{tor} = 46{,}7, \quad \tau_Q = \frac{8}{2}\frac{Q}{ab} = 15$$

Según estos datos construimos los diagramas de las tensiones normales y tangenciales (véase la figura). Examinamos tres puntos A, B y C en el contorno de



Para el problema 6.76

la sección transversal. Las tensiones reducidas en estos puntos, según la tercera teoría de resistencia, son (en MPa):

$$\sigma_{equi\ A} = 113{,}8 < [\sigma] \qquad (\tau_A = 0);$$

$$\sigma_{equi\ B} = 77{,}5 < [\sigma]; \quad \sigma_{equi\ C} = 116 < [\sigma].$$

El punto más cargado es C

6.78. Los momentos flector y torsor en el empotramiento son: $M_f = Pr \operatorname{sen} \alpha$, $M_{tor} = Pr(1 - \cos\alpha)$. Las tensiones máximas normales y tangenciales en el empotramiento son: $\sigma = 6M_f/a^3$, $\tau = M_{tor}/(0{,}208a^3)$. Según la tercera teoría de resistencia las tensiones reducidas son $\sigma_{equ} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 7{,}05Pr/a^3$. De la condición de resistencia $\sigma_{equ} = [\sigma]$ hallamos $a = \sqrt[3]{7{,}05Pr/[\sigma]} = 6{,}05$ cm.

6.85. Como esfuerzo hiperestático tomamos M_B, momento flector en la sección B del tramo BB'. Al mismo tiempo este momento es el momento torsor en el tramo AB. El ángulo de inclinación de la tangente respecto a la deformada del tramo BB' es igual al ángulo de giro del tramo AB:

$$\varphi = Pl^2/(16EJ) - M_B l/(2EJ) = M_B b/(GJ_{tor}).$$

Teniendo en cuenta que $J = a^4/12$ y $J_{tor} = 0{,}14a^4$, obtenemos $M_B = 0{,}9P$. Construyendo los diagramas, aclaramos que la sección más peligrosa es la A. En ella el momento flector es $M = Pb/2 = 6P$ y el momento torsor, $M_{tor} = M_B = 0{,}9P$. Calculamos las tensiones normales y tangenciales en el punto peligroso de la sección más peligrosa:

$$\sigma = 6 \cdot 6P/a^3 = 4{,}50P, \quad \tau = 0{,}9P/(0{,}208a^3) = 0{,}54P.$$

Luego de la condición de resistencia $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = [\sigma]$ hallamos $P = 3{,}5$ kN.

6.86. Las proyecciones de la fuerza P sobre los ejes de coordenadas x_1, y_1, z_1 son:

$$P_{x_1} = -P\cos\alpha = -5 \text{ kN}$$

$$P_{y_1} = -P\cos\beta = -6{,}43 \text{ kN},$$

$$P_{z_1} = \sqrt{P^2 - P_{x_1}^2 - P_{y_1}^2} = 5{,}8 \text{ kN}.$$

Pasamos a ejes de coordenadas nuevos:

$$P_x = P_{z_1} = 5{,}8 \text{ kN}, \quad P_y = P_{y_1}\cos\chi - P_{x_1}\operatorname{sen}\chi = 1{,}71 \text{ kN}.$$

$$P_z = P_{x_1}\cos\chi + P_{y_1}\operatorname{sen}\gamma = 7{,}96 \text{ kN}$$

Las coordenadas del origen de coordenadas x_1, y_1, z_1 en los ejes x, y, z son: $x = a = 50$ cm, $y = 0$, $z = b = 40$ cm. Las fuerzas interiores en la sección B son: $N = P_z = -7{,}96$ kN, $Q_x = P_x = -5{,}8$ kN, $Q_y = P_y = -1{,}71$ kN. De este modo $M_x = P_y z - P_z y = -0{,}684$ kN·m, $M_y = P_z x - P_x z = -0{,}266$ kN·m, $M_{tor} = P_x y - P_y x = 0{,}855$ kN·m.

CAPITULO 7

ESTABILIDAD DE BARRAS Y DE SISTEMAS DE BARRAS

7.11. La carga crítica teniendo en cuenta la fuerza cortante es:

$$P_{cr} = P_{cr}^0 \frac{1}{1 + P_{cr}^0 \frac{1}{2EF_d \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha}}$$

donde F_d es el área de la sección de la barra diagonal del enrejado con la condición de que la tensión crítica está dentro de los límites de la elasticidad.

7.13. Estudiamos el caso *a* cuando el apoyo medio está articulado. Examinamos la barra en estado deformado cuando ésta pierde su estabilidad. Designamos por M_0 el momento flector sobre el apoyo intermedio, componemos la ecuación diferencial de la línea elástica del tramo izquierdo:

$$EJv'' = -Pv - \frac{M_0}{l} x.$$

Después de integrar, tomando en consideración las condiciones límites, obtendremos

$$v = \frac{M_0}{EJk^2} \left(\frac{\operatorname{sen} kx}{\operatorname{sen} kl_1} - \frac{x}{l_1} \right),$$

donde está introducida la designación $k^2 = P/(EJ)$.

Después de hallar el ángulo de giro v'_{izq} sobre el apoyo intermedio (cuando $x = l_1$) lo comparamos con el ángulo de giro en la misma sección calculado durante el estudio del vano derecho:

$$v'_{der} = M_0 l_2/(3EJ).$$

Teniendo en cuenta el signo tenemos $v'_{izq} = -v'_{der}$. De aquí, cuando $M_0 \neq 0$ obtenemos la ecuación

$$\frac{3}{(2u_1)^2} - \frac{3}{2u_1 \operatorname{tg} 2u_1} = -\frac{l_2}{l_1}, \text{ donde } 2u_1 = kl_1.$$

Designando el primer miembro de la ecuación por $\Psi(u_1)$, hallamos $\Psi(u_1) = -l_2/l_1 = -0{,}33$.

La misma expresión puede ser obtenida para $\Psi(u_1)$ con ayuda de la ecuación de los tres momentos (véase la solución del problema 7.71).

Con ayuda de la tabla 4 del anexo determinamos $2u_1 = 4{,}1$. De aquí hallamos la dependencia entre la fuerza crítica y los momentos de inercia de la sección transversal.

7.18. Determinamos la reacción máxima en la columna de apoyo teniendo en cuenta la desigualdad de los esfuerzos debidos al peso aplicados en las columnas:

$$R_{\text{máx}} = \frac{M \cdot g \cdot 2}{4} = 0{,}48 \text{ MN}.$$

Consideramos que el grosor aproximado de la pared de la columna es $h = 1{,}2$ cm. Determinamos la esbeltez λ de la columna considerando que ésta pierde su estabilidad como barra articulada en los extremos, y designando el radio de la sección de paredes delgadas de la columna por r (el radio de giro es aproximadamente igual a $i = r/\sqrt{2}$, el coeficiente de reducción de la longitud es igual a $\mu = 1$):

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{\mu l \sqrt{2}}{r} = 106.$$

La esbeltez límite para el empleo de la fórmula de Euler es

$$\lambda_* = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{0,2}}} = 91 < 106.$$

Por consiguiente, la fórmula de Euler es utilizable. Hallamos

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} = 0{,}525 \text{ MN}.$$

Pero según los datos del problema el esfuerzo en la columna es igual a 0,48 MN. El coeficiente de seguridad de la estabilidad, aceptado igual a 1,5, no está asegurado.

Determinamos el grosor necesario. Asignamos $h_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ m, $h_3 = 2 \cdot 10^{-2}$ m. En este caso obtenemos el valor de la carga crítica igual a $P_{cr\,2} = 0{,}65$ MN, $P_{cr\,3} = 0{,}87$ MN. Construimos el gráfico de dependencia $n_{est}(h)$ y hallamos que el coeficiente $n_{est} = 1{,}5$ es válido para el grosor $h = 1{,}67 \cdot 10^{-2}$ m.

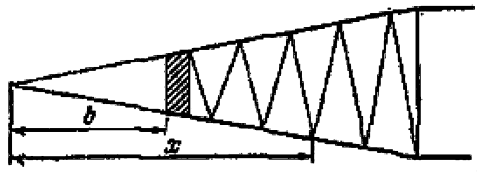
7.30. La tensión nominal admisible, determinada a partir del límite de fluencia, es igual a $\sigma_{fl}/n_{fl} = 133$ MPa. La carga total sobre las ocho columnas es igual (sin tomar en consideración las sobrecargas) a $P = Mg = 34{,}3 \cdot 10^3$ kN $= 34{,}3$ MN; una columna soporta la fuerza $N = P/8 = 4{,}3$ MN. Si el tanque se considera absolutamente rígido, entonces, en caso de pérdida total de estabilidad de todas las columnas, el extremo inferior debe considerarse empotrado y el superior, también empotrado, pero con posibilidad de efectuar desplazamientos horizontales (como está indicado en la figura). En este caso el punto de inflexión de la línea elástica puede considerarse situado en el centro de la altura, puesto que el coeficiente de reducción de la longitud es igual a $\mu = 1$.

El radio de giro de la sección es aproximadamente igual a $i = r/\sqrt{2}$, la esbeltez es $\lambda = \mu l/i = 46{,}8$. En la tabla de coeficientes φ de flexión longitudinal (véase el anexo) para el acero con la resistencia de cálculo correspondiente hallamos $\varphi \approx 0{,}88$. La tensión admisible es $[\sigma]_\varphi = 121$ MPa; la carga correspondiente es $[N] = 0$ MN. El factor de seguridad de la estabilidad es igual a $9/4{,}3 = 2{,}1$.

Luego comprobamos convencionalmente el factor de seguridad de la estabilidad de una columna por separado, suponiendo que el tanque no se desplaza, pero teniendo en cuenta la sobrecarga. Puesto que el posible coeficiente de desigualdad de la carga es igual a 2, entonces sobre una columna puede actuar una fuerza igual a $2N = 8{,}6$ MN. Con las condiciones límites nuevas $\mu = 0{,}5$. La esbeltez resulta igual a $\lambda = 23{,}4$. Según la tabla el coeficiente φ que corresponde a esta esbeltez es igual a 0,96. En este caso $[\sigma]_\varphi = 132$ MPa, $[N] = 8{,}71$ MN, el factor de seguridad de la estabilidad es $8{,}71/4{,}3 = 2{,}03$.

7.31. El momento de inercia de la sección del brazo puede ser considerado proporcional al cuadrado de la dimensión exterior. De las condiciones del problema se deduce que la variación del momento de inercia $J(x)$ en los tramos extremos responde a la ley $J(x)/J_2 = (x/b)^2$.

Las dimensiones x y b se cuentan como está indicado en la figura; J_2 es el momento de inercia de la sección del tramo medio; J_1, el momento de inercia junto al apoyo. Para las dimensiones dadas obtenemos $J_1/J_2 = (180/400)^2 = 0{,}2$. Designando por a la longitud de la parte media y por l la longitud total tenemos $a/l = 3{,}5/17{,}5 = 0{,}2$.



Para el problema 7.31

En la tabla 5 del anexo hallamos $\mu = 1{,}15$. Elegimos el coeficiente de disminución de la tensión admisible $\varphi_0 = 0{,}6$. Hallamos: $F = 225{,}0/(4 \cdot 120{,}0 \cdot 0{,}6) = 7{,}82$ cm^2. Según el surtido el perfil del angular más próximo es $70 \times 70 \times 6$ con un área de la sección igual a 10,7 cm^2. El momento de inercia en la parte media es

$$J = 4\,[48{,}2 + 10{,}7\,(20 - 2{,}02)^2] = 14\,030 \text{ cm}^4.$$

El radio de giro es

$$i = \sqrt{14\,030/(4 \cdot 10{,}7)} = 18{,}1 \text{ cm}.$$

La esbeltez es $\lambda = 1{,}15 \cdot 1750/18{,}1 = 110$, en la tabla 3 (véase el anexo) de coeficientes φ para la resistencia de cálculo $\delta_{fl} = 240$ MPa hallamos $\varphi_1 = 0{,}48$. De este modo $\varphi_1 < \varphi_0$. La sección debe ser aumentada.

Elegimos el angular $80 \times 80 \times 8$. En este caso $F = 49{,}2$ cm^2, $J = 18\,500$ cm^4, $i = 19{,}3$ cm, $\lambda = 104$. En la tabla de coeficientes φ hallamos $\varphi \approx 0{,}52$. Entonces $[\sigma]_{est} = 0{,}52 \cdot 240 = 125$ MPa. La tensión real es $\sigma = P/F \approx 45{,}6$ MPa.

La dimensión elegida es satisfactoria. La estabilidad en la dirección perpendicular al plano ABC está asegurada.

7.33. La forma inicial de la línea elástica en el caso a) se caracteriza, para la mitad izquierda de la barra, por la ecuación $v_0 = 2fx/l$, donde f es la flecha en el punto medio.

El momento flector en la sección x es igual a $M(x) = P\,\frac{2f}{l}\,x$. La ecuación diferencial de la línea elástica es

$$EJv'' = -P\,\frac{2f}{l}\,x.$$

Haciendo su integración y teniendo en cuenta las condiciones límites, obtenemos

$$EJv = -P\,\frac{f}{l}\,\frac{x^3}{3} + P\,\frac{fl}{4}\,x.$$

La flecha en el punto medio de la luz es $f_1 = \frac{1}{12}\,\frac{P}{EJ}\,fl^2$; considerando $f = f_1$ hallamos la fuerza crítica de la primera aproximación $P_{cr}^{I} = 12EJ/l^2$.

La forma obtenida de la línea elástica puede ser representada por la ecuación

$$v = f_1 (-4x^3/l^3 + 3x/l).$$

Utilizando la ecuación diferencial de la línea elástica nueva

$$EJv'' = -Pf_1 (-4x^3/l^3 + 3x/l)$$

y repitiendo los cálculos, hallamos la fuerza crítica de la segunda aproximación P_{cr}^{II}.

7.34. Con la pérdida de la estabilidad la fuerza de compresión P efectúa el trabajo

$$A = P\Delta, \text{ donde } \Delta = \frac{1}{2}\int_0^l (v')^2\,dx.$$

El incremento de la energía potencial de la deformación puede ser representado en la forma

$$U = \int_0^l \frac{M^2\,dx}{2EJ}, \text{ donde } M = Pv.$$

Hallamos el valor crítico de la fuerza a partir de la condición $U = A$. Para la barra de sección constante tendremos

$$P = EJ\left(\int_0^l (v')^2\,dx\right) \Big/ \left(\int_0^l v^2\,dx\right). \qquad (1)$$

La energía potencial puede ser hallada con ayuda de la expresión

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EJv''^2\,dx.$$

En este caso la fuerza crítica (en el caso de una sección constante) es

$$P = EJ\left(\int_0^l v''^2\,dx\right) \Big/ \left(\int_0^l v'^2\,dx\right). \qquad (2)$$

Hallamos: mediante la fórmula (1) $P_{cr} = 10EJ/l^2$, mediante la fórmula (2) $P_{cr} = 12EJ/l^2$.

Como se ve el empleo de la fórmula (1) es preferible, porque en este caso el error, en comparación con la solución exacta, resulta de tan solo un 1,3%, en vez de un 21% según la fórmula (2).

Cuando $v = C\eta(x)$ la ecuación del método Bubnov—Galerkin tiene la forma

$$\int_0^l (EJ\eta'' + P\eta)\,\eta\,dx = 0.$$

Sustituyendo $\eta = lx - x^2$ y efectuando la integración, llegamos al resultado obtenido mediante la fórmula (1).

7.35. Examinamos el caso cuando $n = 4$.

Tomamos el ángulo de giro del primer eslabón, con la pérdida de la estabilidad, igual a θ; el valor de éste es arbitrario.

El desplazamiento de la primera articulación es $\eta_1 = \theta l/4$ y el momento en ésta $M_1 = P\eta_1$. El desplazamiento de la segunda articulación (véase la fig. a) es $\eta_2 = \theta l/2 - \varphi_1 l/4$, donde φ_1 es el ángulo de giro mutuo de los dos eslabones; según los datos del problema

$$\varphi_1 = (Pl/(4EJ))\,\eta_1.$$

Introduciendo la designación $Pl^2/(EJ) = \alpha$, obtenemos

$$\eta_2 = \theta\frac{l}{2} - \frac{\alpha}{16}\eta_1. \qquad (1)$$

Por analogía hallamos

$$\eta_3 = \theta\frac{3l}{4} - \frac{\alpha}{8}\eta_1 - \frac{\alpha}{16}\eta_2, \qquad (2)$$

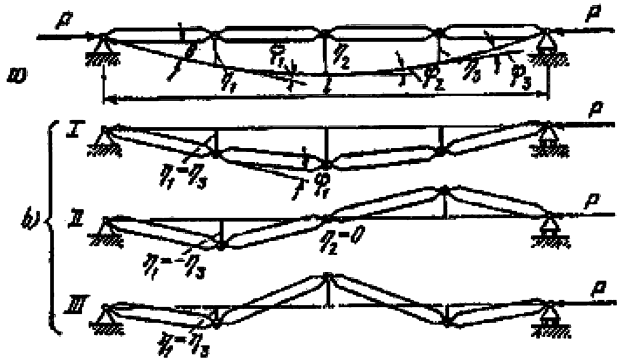
y

$$\eta_4 = \theta l - \frac{3}{16}\alpha\eta_1 - \frac{\alpha}{8}\eta_2 - \frac{\alpha}{16}\eta_3 = 0. \qquad (3)$$

Sustituyendo en la ecuación (3) las expresiones (1) y (2), obtenemos la ecuación para determinar el parámetro α:

$$\alpha^3 - 96\alpha^2 + 2560\alpha - 16\,384 = 0.$$

Las raíces de esta ecuación $\alpha_1 = 9{,}37$, $\alpha_2 = 32$, $\alpha_3 = 54{,}16$ corresponden a las distintas formas de pérdida de estabilidad representadas en la fig. b. Así, por ejemplo, cuando $\alpha_2 = 32$ obtenemos $\eta_2 = 0$ y $\eta_1 = -\eta_3$. La raíz mínima α_1 determina la magnitud de la primera fuerza crítica $P_{cr} = 9{,}37EJ/l^2$ que se diferencia del valor exacto en un 5%.



Para el problema 7.35

Las magnitudes α_1 y α_3 pueden ser obtenidas también examinando la forma *simétrica* de pérdida de estabilidad y considerando $\eta_1 = \eta_3$. Para determinar α obtenemos en este caso la ecuación $\alpha^2 - 64\alpha + 512 = 0$, cuyas raíces son $\alpha_1 = 9{,}37$ y $\alpha_3 = 54{,}63$. Examinando la fórmula *antisimétrica* de la flecha y teniendo en cuenta que $\eta_2 = 0$, hallamos $\alpha_2 = 32$.

7.36. En el caso b) la ecuación diferencial de la deformada de primera aproximación tendrá la forma

para la parte extrema $EJv_1'' = -Pf \operatorname{sen}(\pi x/l)$,

para la parte media $EJv_2'' = -Pf \operatorname{sen}(\pi x/l)$.

Integrando, obtenemos respectivamente

$$Ev_1 = -\frac{Pf l^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} + C_1 x + D_1$$

y

$$EJ v_2 = \frac{Pf l^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} + C_2 x + D_2.$$

Las constantes $C_1 \ldots, D_2$ se hallan de las condiciones: cuando $x = 0$ $v_1 = 0$, cuando $x = l/2$ $v_2' = 0$, cuando $x = l(1 - \beta)/2$ $v_1' = v_2'$ y $v_1 = v_2$.

La flecha en el punto medio es

$$(v_2)_{x=l/2} = \frac{Pf l^2}{EJ\pi^2} + \frac{Pf l^2}{2EJ_1\pi^2}(J - J_1)\left[2 \operatorname{sen} \frac{(1-\beta)\pi}{2} - \pi(1-\beta)\cos\frac{(1-\beta)\pi}{2}\right].$$

Igualando entre sí los valores máximas de la flecha de las curvas inicisl y obtenida, hallamos el valor aproximado de la fuerza crítica.

7.37. En el momento de perder la estabilidad el punto de aplicación de una de las fuerzas P se desplaza a un segmento igual a f, a causa de lo cual aparecen reacciones en los apoyos $R = Pf/l$. El momento flector en la mitad superior es $M_1 = Pv + Rx$ y en la mitad inferior, $M_2 = Pv - P(f - v) + Rx$.

Componemos las ecuaciones diferenciales de la línea elástica para cada uno de los tramos, las integramos tomando en consideración las condiciones límites para el extremo de la barra y el lugar de unión de los tramos. Comparando las flechas en la sección media para las líneas elásticas dada y obtenida, hallamos la fuerza crítica.

7.40. Examinamos el caso de un apoyo elástico. Suponemos que el número de eslabones es $n = 3$; consideramos que el ángulo de giro del primer eslabón, al perder la estabilidad, es igual a θ. La reacción en el apoyo elástico es igual a cf, donde f es la flecha en el punto medio.

Si la flexión es simétrica, el momento flector en la articulación es

$$M = Pf - \frac{cf}{2}\frac{l}{3}.$$

El ángulo de giro mutuo de los eslabones $\varphi = 0$. Según los datos

$$\varphi = \frac{M}{EJ}\frac{l}{3} = \left(Pf - \frac{cf}{2}\frac{l}{3}\right)\frac{l}{3EJ} = 0.$$

Sustituyendo aquí $f = \theta l/3$, obtendremos

$$\theta = \left(P\theta - \frac{c\theta}{2}\frac{l}{3}\right)\frac{l}{3EJ}\frac{l}{3}.$$

y definitivamente cuando $\theta \neq 0$

$$P_{cr} = 9EJ/l^2 + cl/6. \qquad (1)$$

Cuando la flexión es antisimétrica el apoyo medio no se desplaza; el momento en la articulación es $M = P\eta$, donde η es la flecha en el punto de unión de los elementos: $\eta = \theta l/3$. Se puede considerar que el ángulo de giro en la articulación es igual a $\varphi = 3\theta$. Haciendo uso de la relación $\varphi = Ml/(3EJ)$, obtenemos

$$P_{cr} = 27EJ/l^2. \qquad (2)$$

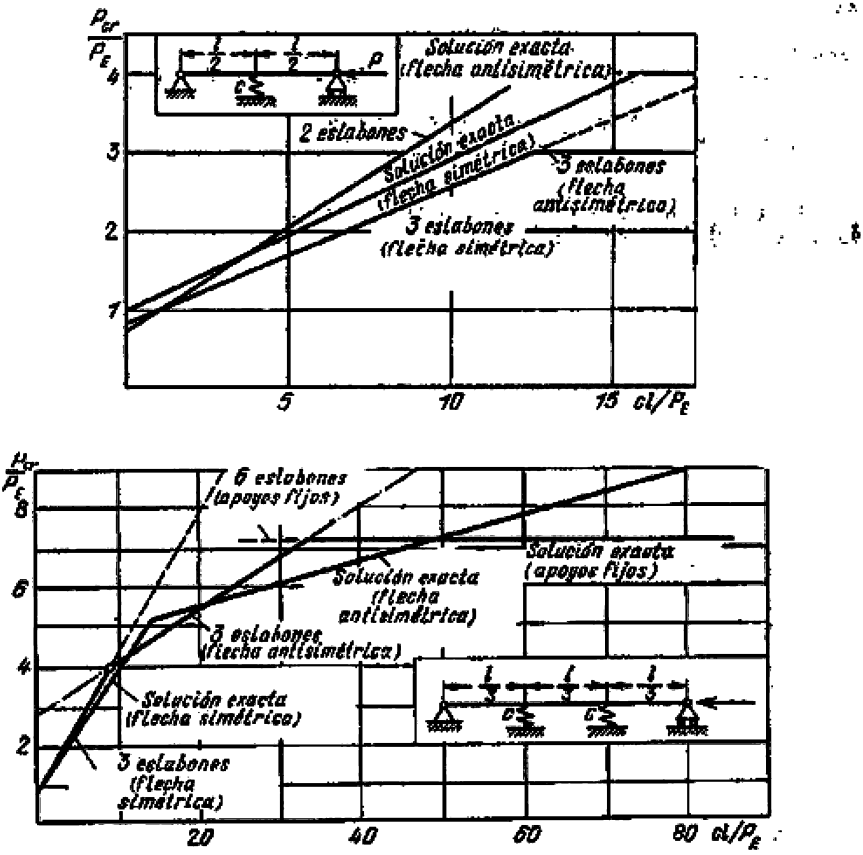
Si la rigidez del apoyo es tan sumamente grande, que la fuerza crítica, según la fórmula (1), alcanza el valor $27EJ/l^2$, la forma de la flexión se torna antisimétrica y el apoyo elástico puede considerarse absolutamente rígido. «La rigidez crítica» del apoyo c_0 se halla mediante la igualdad

$$c_0 l/6 + 9EJ/l^2 = 27EJ/l^2,$$

de donde $c_0 = 108EJ/l^3$. Véase en la figura los gráficos correspondientes.

Por analogía puede ser examinado el caso de dos apoyos elásticos. Es preciso remarcar que en este caso el límite superior de la fuerza crítica corresponderá al caso de los apoyos *indesplazables*. Para estudiar esta variante dividimos la barra en seis eslabones; la fuerza crítica resultará igual a $P_{cr} = 72EJ/l^2$. La recta correspondiente está también dada en el gráfico. Véanse en la figura los gráficos de la dependencia entre las magnitudes P_{cr}/P_E y cl/P_E para el caso de dos apoyos elásticos.

Para valorar los grados de aproximación de las fórmulas halladas en el gráfico están dadas las curvas obtenidas por el método exacto.



Para el problema 7.40

7.41. La carga de Euler para una barra sin apoyos es:

$$P_E = \pi^2 EJ/l^2 = \pi^2 2 \cdot 10^5 \cdot 16{,}6 \cdot 10^{-8}/3{,}0^2 = 36{,}4 \text{ kN}.$$

La tensión crítica es: $\sigma_E = 36{,}4/(10{,}24 \cdot 10^{-4}) = 35$ MPa.
La rigidez de las vigas cruzadas se mide por el parámetro cl/P_E, donde

$$cl = (48EJ/l^3)\, l = 48EJ/l^2.$$

En nuestro caso $cl/P_E = 48/\pi^2 = 4{,}9$. En el gráfico para este valor de cl/P_E hallamos $P_{cr}/P_E \approx 2{,}3$. De aquí la carga crítica $P_{cr} = 2{,}3 \cdot 36{,}4 = 83{,}5$ kN.

La «rigidez crítica» de los apoyos corresponde al valor de $ci/P_E = 81$. Obtenemos el momento de inercia necesario de las vigas cruzadas J_1 de la ecuación

$$\frac{48EJ_1}{l^3} \geqslant 81\,\frac{\pi^2 EJ}{l^3}, \quad J_1 \geqslant \frac{81\pi^2}{48}\,J = 16{,}6J = 276\ \text{cm}^4.$$

7.42. Vamos a considerar el larguerillo como una viga comprimida que descansa sobre una base elástica. Las fuerzas reactivas que se transmiten de las costillas al larguerillo pueden considerarse uniformemente distribuidas a lo largo del larguerillo, puesto que la distancia s entre las costillas es muy pequeña en comparación con la longitud de la viga. La magnitud de la fuerza reactiva creada por cada costilla es $R = 48EJ_{cos}v/a^3$.

El coeficiente de rigidez de la base elástica se halla de la igualdad

$$k = \frac{R/v}{s} = \frac{48EJ_{cos}}{a^3 s} = \frac{48 \cdot 0{,}7 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-8}}{0{,}5^3 \cdot 0{,}2} = 0{,}134\ \frac{\text{N/m de flecha}}{\text{m de longitud}}$$

La ecuación diferencial de la línea elástica de la viga, que descansa sobre la base elástica, tiene la forma

$$v^{IV} + \frac{P}{EJ}\,v'' + \frac{kv}{EJ} = 0$$

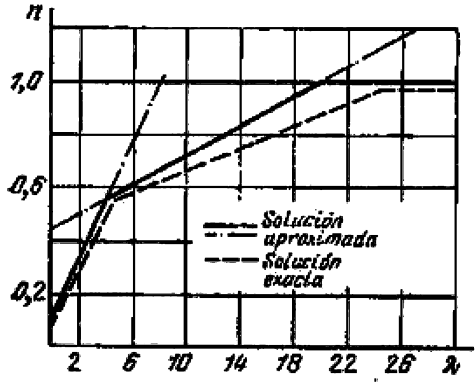
Considerando el larguerillo como una viga de longitud *finita* l, elegimos la solución de acuerdo con las condiciones límites en la forma

$$v_n = A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l},$$

donde n es el número de semiondas.

Sustituyendo v_n en la ecuación diferencial, obtenemos

$$\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 - \frac{P}{EJ}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{k}{EJ} = 0.$$



Para el problema 7.43

La magnitud de la fuerza P que mantiene en equilibrio la barra deformada con n semiondas es igual a

$$P = \frac{\pi^2}{(l/n)^2}\,EJ + k\,\frac{(l/n)^2}{\pi^2}. \qquad (1)$$

El número de semiondas n debe ser hallado de la condición de que P tenga el valor mínimo posible.

Si la rigidez de la base elástica k es pequeña, la pérdida de estabilidad se producirá por una semionda ($n = 1$). El número de semiondas es igual a 2 cuando

$$4EJ\pi^4/l^4 < k < 36EJ\pi^4/l^4.$$

Según los datos del problema $k = 32EJ\pi^4/l^4$ y, por consiguiente, en la fórmula (1) es necesario considerar $n = 2$.

7.43. La energía potencial de la flexión de cada viga longitudinal, cuando ésta pierde su estabilidad, es

$$U_{lon} = \frac{E_1 J_1}{2} \int_0^{3l_1} \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx;$$

en la viga transversal la energía potencial es

$$U_{\text{trans}}=\frac{E_2J_2}{2}\int_0^{3l_0}\left(\frac{d^2v}{d\xi^2}\right)^2 d\xi.$$

La flecha máxima de la viga transversal en el primer caso es $f=f_1$, en el segundo, $f=f_2$ y en el tercero, $f=0$. El trabajo de la fuerza de compresión es

$$A=\frac{1}{2}P_{cr}\int_0^{3l_0}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx.$$

Para calcular la fuerza crítica empleamos el criterio energético

$$\frac{\partial}{\partial f_i}(U_{\text{lon}}+U_{\text{trans}}-A)=0 \qquad (i=1;\ 2,\ 3).$$

La línea punteada corresponde a la solución exacta.

7.44. Utilizando el método energético, hallamos la energía potencial de la flexión de la viga

$$U=\frac{EJ}{2}f^2\frac{\pi^4}{l^3}.$$

Con la pérdida de la estabilidad, el trabajo de las fuerzas de compresión es

$$A=P\,(1+k)\,f^2\pi^2/(4l).$$

De la ecuación $\frac{\partial}{\partial f}(U-A)=0$ obtenemos la fuerza crítica

$$P_{cr}=\frac{2}{1+k}\frac{\pi^2EJ}{l^2}.$$

Pasando a la solución exacta, designamos por R la fuerza de interacción entre las vigas y por f la flecha en el lugar de cruce de las vigas. La ecuación diferencial de la flexión de la mitad de la primera viga es

$$EJ\frac{d^2v}{dx^2}+Pv=\frac{1}{2}Rx$$

y de la mitad de la segunda viga,

$$-EJ\frac{d^2v}{d\xi^2}+kPv=\frac{1}{2}R\xi.$$

Haciendo la integración de estas ecuaciones, determinamos respectivamente

$$v=C_1\cos\alpha x+C_2\operatorname{sen}\alpha x+\frac{R}{2P}x,$$

y

$$v=C_3\cos\alpha\xi+C_4\operatorname{sen}\alpha\xi-\frac{R}{2kP}\xi.$$

donde $\alpha=\sqrt{P/(EJ)}$.

Tomando en consideración la condición de articulación del apoyo en uno de los extremos y en el centro de la viga y comparando también las flechas de las vigas en el lugar de unión hallamos la ecuación transcendente para determinar la fuerza crítica citada en la respuesta.

7.45. La energía potencial de la flexión de la viga longitudinal es

$$U = \frac{1}{2} EJ \int_0^l v''^2 \, dx.$$

Después de efectuar los cálculos, obtenemos

$$U_1 = \frac{\pi^4 EJ}{2l^4} \left(f_1^2 \frac{l}{2} + \frac{16l}{3\pi} f_1 f_2 + 8l f_2^2 \right).$$

La energía potencial de torsión de las vigas transversales es

$$U_2 = 2 \frac{GJ_{tor}}{2d} (v'_{x=a})^2 \quad \text{o} \quad U_2 = \frac{GJ_{tor}}{d} \frac{f_1^2 \pi^2}{l^2}.$$

El trabajo de las fuerzas de compresión a la pérdida de la estabilidad es

$$A = \frac{1}{2} P \int_0^l v'^2 \, dx$$

o

$$A = \frac{\pi^2 P}{2l^2} \left(f_1^2 \frac{l}{2} + f_1 f_2 \frac{16l}{3\pi} + f_2^2 2l \right).$$

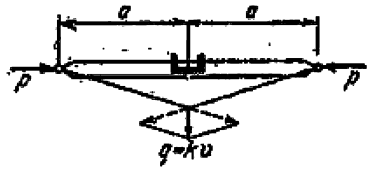
Componemos las ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial f_i} (U_1 + U_2 - A) = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

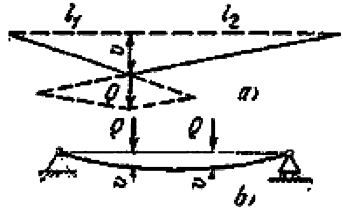
Después de efectuar las transformaciones, obtenemos las ecuaciones que contienen f_1 y f_2, igualamos a cero el determinador compuesto de los coeficientes ante f_1 y f_2 en estas ecuaciones.

7.47. *Indicación.* Hacer uso de la expresión de la flecha en el voladizo sometido en su extremo a la acción de una fuerza concentrada.

7.49. Al perder su estabilidad las láminas onduladas saldrán del plano inicial; los esfuerzos transmitidos por las láminas darán una carga sobre la viga (véase la figura). Si las flechas v de la viga son pequeñas, la carga resultante lineal q puede considerarse igual a $2pv/a$. Por eso la viga se encontrará en las condiciones del problema 7.47 cuando $k = 2p/a$.



Para el problema 7.49



Para el problema 7.50

7.50. Si la barra AB pierde su estabilidad, en los puntos C y D de ella se transmitirán las fuerzas Q. Las últimas se hallan, en el caso cuando en los puntos C y D la flecha v es pequeña, por medio de la ecuación (véase la fig. *a*)

$$Q = 80 \, (v/l_1 + v/l_2) = 2v \text{ (kN)}$$

Luego hallamos la relación entre la fuerza Q y la flecha v en el punto de aplicación de cada una de las fuerzas (fig. *b*), en la cual entra el momento de inercia incógnito J de la sección de la viga.

7.51. Con ayuda de la ecuación de tres momentos (que será usado en la resolución del problema 7.71), hallamos

$$\Psi(u_1)+\frac{l_2J_1}{l_1J_2}\Psi(u_2)=0.$$

Aquí

$$\Psi(u)=\frac{3}{2u}\left(\frac{1}{2u}-\frac{1}{\operatorname{tg} 2u}\right),\quad u_1=\frac{l_1}{2}\sqrt{\frac{P}{EJ_1}},\quad u_2=\frac{l_2}{2}\sqrt{\frac{P}{EJ_2}}.$$

Según los datos del problema la sección de la viga es constante y $l_2=2l_1$. Obtenemos la ecuación

$$-\Psi(u_1)=2\Psi(u_2),$$

$u_2=kl_2/2=2u_1$. Resolviendo esta ecuación con ayuda de la tabla 4 (véase el anexo) obtenemos $2u_1\approx 1{,}93$, $2u_2\approx 3{,}86$. Por la magnitud kl_2 hallamos la fuerza crítica.

7.52. Escribimos la ecuación diferencial de la línea elástica en la forma

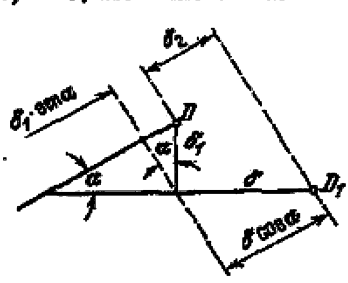
$$v^{IV}+k^2v''=0,\quad \text{donde } k^2=P/(EJ).$$

La integral común de esta ecuación es $v=A+Bx+C\cos kx+D\operatorname{sen} kx$. A partir de las condiciones límites $v(0)=0$, $v''(0)=0$, así como de las relaciones entre la reacción del apoyo elástico y el asiento del apoyo: $N=cv(l)$.

Por otro lado la fuerza cortante es $Q=-EJv'''$ y la proyección de la fuerza P sobre el plano de la sección transversal obtiene la expresión $pv'(l)$. De aquí

$$N=EJv'''(l)+Pv'(l).$$

Por medio del sistema de ecuaciones obtenido determinamos la fuerza crítica.



Para el problema 7.54

7.54. Supongamos que cuando se pierde la estabilidad el punto D se desplaza a D_1 (véase la figura del problema y la de la resolución). Designamos la proyección del desplazamiento horizontal por δ, la vertical por δ_1, el alargamiento del tirante por δ_2. De la figura tenemos

$$\delta\cos\alpha=\delta_1\operatorname{sen}\alpha+\delta_2$$

El esfuerzo de tracción que aparece en el tirante durante el desplazamiento del punto D a D_1 lo designamos por X. En este caso $\delta_1=Xl_d/(E_dF_d)$, donde l_d es la longitud del tirante.

El incremento de la fuerza de compresión en la barra vertical, al perder ésta su estabilidad, lo designamos por X_1; es evidente que $X_1=X\operatorname{sen}\alpha$. Conociendo que $\delta_1=X_1l/(E_vF_v)$ y $l=l_d\operatorname{sen}\alpha$, obtenemos

$$X=\frac{E_dF_d\delta\cos\alpha}{l_d\left(1+\dfrac{E_dF_d}{E_vF_v}\operatorname{sen}^3\alpha\right)}.$$

La condición de equilibrio de la articulación D en proyecciones sobre el eje horizontal (cuando la desviación es δ) es: $X\cos\alpha=P\delta/l$.

Comparando estas relaciones, hallamos la fuerza crítica correspondiente al «vuelco» de la construcción. Comprobamos si la tensión crítica está dentro de los límites de elasticidad.

7.55. La flexión del nervio en dirección radial a la magnitud v provoca una deformación del revestimiento a lo largo del arco igual a $\varepsilon = v/r$; la tensión correspondiente es $\sigma = E_1 v/r$. La presión lineal del lado del revestimiento sobre cada uno de los nervios es

$$q_x = E_1 \frac{v}{r} \frac{t}{r} s.$$

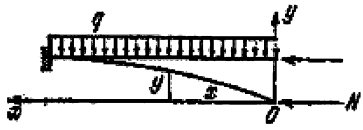
La ecuación diferencial de la línea elástica del nervio tiene la forma

$$EJv^{IV} + Pv'' + \alpha v = 0,$$

donde $\alpha = E_1 st/r^2$; el eje x está dirigido a lo largo de la generatriz. Las raíces de la ecuación característica $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ resultan ser imaginarias; suponiendo que $\lambda_{1,2} = \pm im$ y $\lambda_{3,4} = \pm in$, escribimos la solución en la forma

$$v = C_1 \operatorname{sen} mx + C_2 \cos mx + C_3 \operatorname{sen} nx + C_4 \cos nx.$$

Utilizando las condiciones límites, llegamos al sistema de ecuaciones respecto a las constantes $C_1, \ldots, C_4$, mediante las cuales determinamos la fuerza crítica.



Para el problema 7.58

7.58. b) Admitimos el sistema móvil de coordenadas rectangulares xOy, cuyo origen O se encuentra en el extremo libre del voladizo y se desplaza junto con éste (véase la figura). Partimos de la ecuación diferencial de la línea elástica de la viga:

$$y'' = M/(EJ).$$

El momento flector $M = M_{trans} - Ny$, donde M_{trans} es el momento flector debido solamente a la carga transversal.

Tenemos

$$y'' + k^2 y = M_{trans}/(EJ). \qquad (1)$$

En nuestro caso $M_{trans} = -qx^2/2$

La solución de la ecuación (1) tiene la forma:

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \operatorname{sen} kx + y_{par}, \qquad (2)$$

donde $y_{par} = -qx^2/(2k^2EJ) + q/(k^4EJ)$ es la solución particular.

Las constantes C_1 y C_2 se determinan a partir de las condiciones límites: 1) cuando $x = 0$ $y = 0$ y 2) cuando $x = l$ $y' = 0$. Hallamos $C_1 = -q/(k^4EJ)$, $C_2 = (kl - \operatorname{sen} kl)\, q/(k^4EJ \cos kl)$.

Cuando $x = l$ de la fórmula (2) obtenemos la flecha máxima f:

$$f = y(l) = \frac{q}{k^4EJ}(1 - \cos kl) + \frac{q \operatorname{tg} kl}{k^4EJ}(kl - \operatorname{sen} kl) - \frac{ql^2}{2k^2EJ}. \qquad (3)$$

El módulo máximo del momento flector (junto al empotramiento) es

$$M = -ql^2/2 - Nf.$$

En el límite, cuando $k \to 0$, de la fórmula (3) obtenemos la expresión conocida $f = ql^4/(8EJ)$.

7.61. Supongamos que $v = f \operatorname{sen} (\pi x/l)$. La energía potencial de la deformación es

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^l (v'')^2 dx = \frac{EJ}{4} \frac{\pi^4}{l^3} f^2.$$

La aproximación mutua de los extremos de la viga es

$$\lambda = \frac{1}{2}\int_0^l (v')^2\,dx = \frac{\pi^2 f^2}{4l}.$$

El potencial de las cargas transversales es, según la variante a) $V = -Pf$

y según la variante b), $V = \int_0^l \frac{P}{l} f \operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\,dx = -2f\frac{l}{\pi}\frac{P}{l} = -2\frac{P}{\pi}f.$

De acuerdo con el principio de desplazamientos virtuales, variando la flecha f obtenemos, para la posición de equilibrio,

$$-\delta U \pm N\delta\lambda - \delta V = 0.$$

Aquí el signo más debe ser tomado para el caso cuando la fuerza es de compresión, el signo menos, para cuando la fuerza es de tracción.

Remarquemos que según la respuesta, el método energético nos llevará a la fórmula conocida $f = f_{trans}\Big/\left(1 - \frac{N}{N_E}\right)$, donde f_{trans} es la flecha cuando hay una sola carga transversal, N_E es la fuerza de Euler, N es la carga axial de compresión.

7.63. Supongamos que el sistema de coordenadas está dispuesto de tal modo que el eje x pasa por las articulaciones extremas y el eje y está dirigido hacia la flecha. El origen de coordenadas se encuentra en uno de los extremos. La ecuación diferencial de la línea elástica es

$$EJv'' = -N(e + v) \text{ o } v'' + k^2 v = -k^2 e, \text{ donde } k^2 = N/(EJ).$$

Hacemos la integración de esta ecuación y hallamos las constantes de integración a partir de las condiciones límites. Luego determinamos la flecha máxima y el momento flector máximo.

7.64. La ecuación diferencial de la línea elástica es

$$EJv'' = N(f - v) + Ne \text{ o } v'' + k^2 v = k^2 f + k^2 e,$$

donde f es la flecha máxima, $k^2 = N/(EJ)$.

Escribimos la solución de esta ecuación en la forma

$$v = A\cos kx + B\operatorname{sen} kx + f + e$$

y hacemos uso de las condiciones límites $v(0) = 0$, $v'(0) = 0$, $v(l) = f$.

7.65. La ecuación diferencial de la línea elástica de la primera aproximación tiene la forma

$$EJv'' = -N(e + v_0) = -N\left(e + f\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\right).$$

Integrando y tomando en consideración las condiciones límites hallamos

$$v = -\frac{N}{EJ}\left[\frac{ex}{2}(x - l) - \frac{fl^2}{\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\right].$$

Igualando entre sí los valores de las ordenadas máximas de la curva inicial y de la curva de la primera aproximación, hallamos el valor de f.

7.66. Designamos por σ_{comp} y σ_{tr} las tensiones en las zonas comprimida y estirada. Las condiciones de equilibrio del elemento separado por una sección a la distancia x del extremo superior son:

la suma de las proyecciones de las fuerzas

$$\sigma_{comp} bh - (\sigma_{tr} + \sigma_{comp}) \frac{b}{2} h = N = bh\sigma_{med}$$

la suma de momentos de las fuerzas respecto al borde de la sección

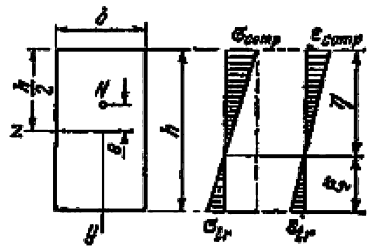
$$Nv + \frac{Nh}{2} - \frac{bh^2}{2} \sigma_{comp} + \frac{bh^2}{6} (\sigma_{comp} + \sigma_{tr}) = 0$$

De acuerdo con la ley de secciones planas $\sigma_{tr}/\sigma_{comp} = \varepsilon_{tr}/\varepsilon_{comp} = \varepsilon/\eta$. Comparando estas relaciones, obtenemos $Nv = (\sigma_{comp}/\eta)\ (bh^3/12)$. La curvatura de la línea puede ser expresada por la deformación de la fibra extrema:

$$1/\rho \approx -d^2v/dx^2 = \varepsilon_{comp}/\eta = \sigma_{comp}/(E\eta).$$

Luego hallamos la curvatura en la sección media de la luz:

$$d^2v/dx^2 = -12Nf/(Eh^3b) = -12\sigma_{med}f/(Eh^3).$$



Para el problema 7.66

Por otro lado la curvatura de la sinusoide $v = (f - e) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} + e$ es igual en la sección media a

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{l^2}(f - e)$$

Comparamos las expresiones obtenidas de la curvatura

7.67. El radio k del núcleo de la sección y el radio de giro i de la sección se hallan por medio de las fórmulas

$$k = W/F \approx \pi r^2 t\ (2\pi rt) = r/2 = 15 \text{ mm}, \qquad i \approx r = 30 \text{ mm};$$

por r se designa el radio medio del tubo

La relación m que caracteriza la excentricidad es igual a $m = e/k = 12/15 = 0{,}8$. La esbeltez de la barra es $\lambda = 1{,}5/(30 \cdot 10^{-3}) = 50$.

a) La tensión máxima, hallada por la fórmula del problema 7.63 (véase la respuesta), es:

$$\sigma_{máx} = N\left(\frac{1}{F} + \frac{e}{W \cos \frac{l}{2}\sqrt{\frac{N}{El}}}\right).$$

La carga límite N es igual a $nN_{ad} = nF\,[\sigma]$; aquí por $[\sigma]$ se designa la tensión media que corresponde a la carga admisible N_{ad}.

Después de realizar unas transformaciones simples obtenemos

$$\sigma_{máx} = n\,[\sigma]\left(1 + \frac{m}{\cos \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{n\,[\sigma]}{E}}}\right) \qquad (1)$$

Según los datos esta magnitud debe ser igual al límite de fluencia $\sigma_{fl} = 240$ MPa.

Sustituimos como prueba $[\sigma] = 16$ MPa. Mediante la fórmula (1) hallamos la tensión $\sigma_{máx} = 188$ MPa que es mucho menor que la tensión σ_{fl}.

Después de hacer unas pruebas nuevas hallamos que $\sigma_{máx}$ es igual a σ_{fl} cuando $[\sigma] = 20{,}3$ MPa.

La carga admisible es $N_{ad} \approx 2\pi ri\,[\sigma] = 11{,}47$ kN.

b) Según la fórmula aproximada del problema 7.66, considerando que la tensión media σ_{med} es igual a $n\,[\sigma]$, obtenemos

$$\sigma_{máx} = n\,[\sigma]\left[1+\frac{e}{k\,(1-n\,[\sigma]/\sigma_E)}\right]. \qquad (2)$$

Calculamos $\sigma_E = \pi^2 E/\lambda^2 = 790$ MPa.

Por medio de unos cálculos de prueba de $\sigma_{máx}$ por la fórmula (2) concluimos que $\sigma_{máx}$ será igual a σ_{fl}, cuando $[\sigma] = 90{,}7$ MPa; en este caso $N_{ad} = 11{,}6$ kN.

7.68. La ecuación diferencial de la línea elástica es

$$EJv_1'' = -N\left(f_0 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{l} + v_1\right),$$

donde v_1 es la flecha adicional debida a la acción de la fuerza N. Al admitir la designación $k^2 = N/(EJ)$ obtenemos la solución de esta ecuación en la forma

$$v_1 = A\cos kx + B\operatorname{sen} kx - \frac{k^2 f_0}{k^2 - \pi^2/l^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}.$$

A continuación hacemos uso de las condiciones límites.

7.69. Según la fórmula citada en la solución del problema 7.61, la flecha máxima es

$$f = \frac{e}{1-N/N_E} + \frac{f_0}{1-N/N_E},$$

donde $N_E = F\sigma_E = 34{,}6$ kN. La tensión máxima es

$$\sigma_{máx} = \frac{N}{F} + \frac{N\,(e+f_0)}{(1-N/N_E)\,W} \quad \text{o} \quad \sigma_{máx} = \sigma_E\alpha\left(1+\frac{e+f_0}{k}\,\frac{1}{1-\alpha}\right),$$

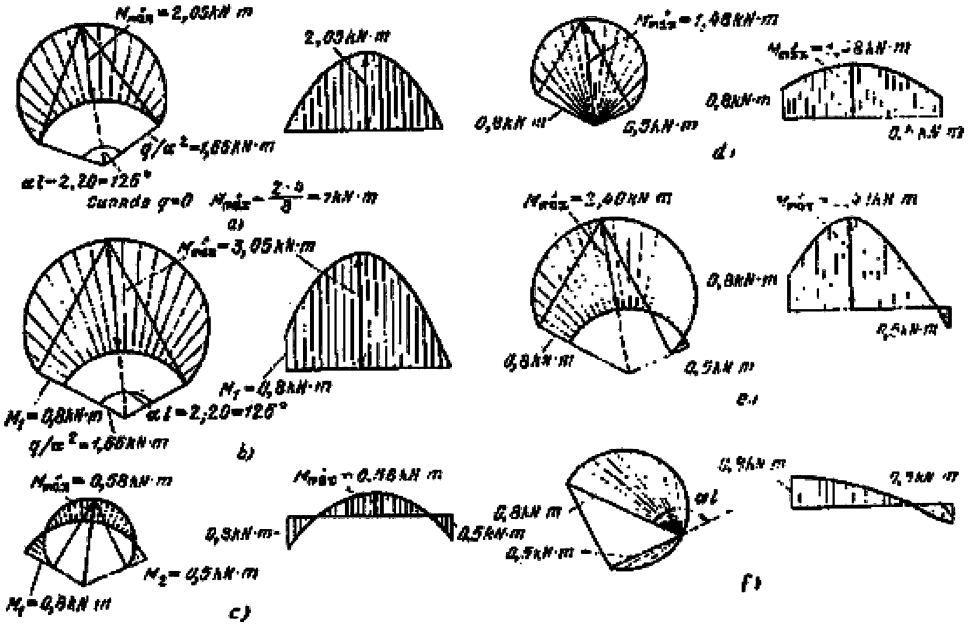
donde $\alpha = N/N_E$, $k = W/F$ es el radio del núcleo de la sección, $k = 1{,}43/2{,}3 = 0{,}62$ cm.

Según los datos $\sigma_{máx} < \sigma_{fl}$. Por medio de pruebas determinamos α. Suponemos que $\alpha = 0{,}9$. En este caso $\sigma_{máx} = 726$ MPa que supera considerablemente σ_{fl}. Teniendo $\alpha = 0{,}76$, hallamos $\sigma_{máx} = 318$ MPa que está más cerca de $\sigma_{fl} = 320$ MPa.

7.70. Calculamos $\alpha^2 = \frac{N}{EJ} = 1{,}207\,\frac{1}{m^2}$; $\alpha = 1{,}10\,\frac{1}{m}$; $\alpha l = 2{,}2$. Trazamos una circunferencia de radio $q/\alpha^2 = 1{,}657$ kN·m, eligiendo la escala de los momentos flectores (véase la figura en la pág. 354). Trazamos el ángulo central $\alpha l = 126°$.

En los radios extremos trazamos, partiendo del centro, los momentos de extremo (los momentos negativos se trazan hacia adentro de la circunferencia) y a partir de los puntos obtenidos trazamos líneas perpendiculares a los radios extremos. El punto de intersección de las perpendiculares se une con el centro y sobre el segmento obtenido como diámetro se construye una circunferencia.

Para determinar el momento flector en cualquier sección hallamos el radio que divide el ángulo central αl en la misma proporción que la sección divide la luz l y determinamos el segmento que se encuentra entre el círculo recién construido y la circunferencia inicial; este segmento da el momento flector en la misma escala en la cual está trazada la magnitud p/α^2.



Para el problema 7.70

7.71. La ecuación de los tres momentos en el caso de compresión longitudinal es

$$M_{n-1}\Phi(u_{n-1})+2M_n\left[\Psi(u_{n-1})+\frac{l_n}{l_{n-1}}\frac{J_{n-1}}{J_n}\Psi(u_n)\right]+M_{n+1}\frac{l_n}{l_{n-1}}\frac{J_{n-1}}{J_n}\Phi(u_n)=$$

$$=-\frac{q_{n-1}l_{n-1}^2}{4}X(u_{n-1})-\frac{q_n l_n^2}{4}\frac{J_{n-1}}{J_n}\frac{l_n}{l_{n-1}}X(u_n). \qquad (1)$$

Aquí $u=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{N}{EJ}}\,l=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{Nl^2}{\pi^2EJ}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{N}{N_E}}$, $\Phi(u)=\frac{3}{u}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}2u}-\right.$ $\left.-\frac{1}{2u}\right)$, $\Psi(u)=\frac{3}{2u}\left(\frac{1}{2u}-\frac{1}{\operatorname{tg}2u}\right)$, $X(u)=\frac{3(\operatorname{tg}u-u)}{u^3}$.

La tabla de las funciones Φ, Ψ y X está dada en el anexo (tabla 4).

En este caso $u_1=u_2$ y la ecuación (1) tendrá la forma

$$4M_n\Psi(u)=-\frac{q_{n-1}l^2}{4}X(u)-\frac{q_n l^2}{4}X(u). \qquad (2)$$

La carga de Euler para la viga de longitud l apoyada libremente en los extremos es

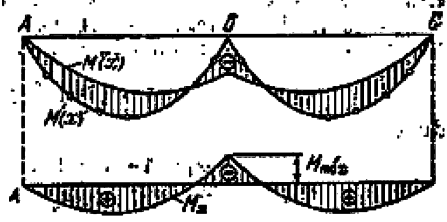
$$N_E=\pi^2EJ_z/l^2=72\ \text{kN}.$$

El parámetro $u=\frac{\pi}{2}\sqrt{N/N_E}=\frac{\pi}{2}\sqrt{36/72}=1{,}11$. En la tabla se ha tomado, como argumento, la magnitud $2u=2{,}22$. Hallamos $\Psi(u)=1{,}6343$, $X(u)=1{,}9837$.

En el caso a) $q_1 = q_2 = 0{,}4$ kN/m; de la ecuación (2) obtenemos:

$$4M_B \cdot 1{,}6343 = -gl^2/(2 \cdot 1{,}9837),$$

de donde hallamos M_B. Examinamos el vano izquierdo. Si el momento de apoyo M_B fuera igual a cero, el momento flector variaría según la ley



$$M'(x) = \frac{gl^2}{8} \frac{2}{u^2} \left[\frac{\cos[u(1-2x/l)]}{\cos u} - 1 \right].$$

El momento de extremo M_B provoca en la sección x un momento flector

$$M''(x) = M \frac{\operatorname{sen}\left(2u \frac{x}{l}\right)}{\operatorname{sen} 2u}.$$

Para el problema 7.71

Los valores definitivos de los momentos flectores $M(x)$ los hallamos sumando las magnitudes $M'(x)$ y $M''(x)$ tomando en consideración los signos (véase la figura).

7.73. Basándonos en el método variacional de Ritz, calculamos la energía potencial de la deformación de la barra sometida a flexión lateral dentro de los límites del elemento finito de longitud a y rigidez EJ:

$$U = \int_0^a \frac{M^2\,dx}{2EJ}$$

Utilizando la ecuación diferencial del eje doblado

$$M = -EJ \frac{d^2v}{dx^2}$$

e introduciendo la coordenada adimensional $s = x/a$, llegamos a la expresión

$$U = \frac{EJ}{2a^3} \int_0^1 (v'')^2\,ds, \qquad (1)$$

las rayas significan la diferenciación respecto a s. La rigidez EJ se considera constante dentro de los límites del elemento finito. Hagamos constar aquí mismo que de acuerdo con los datos del problema consideraremos constante la rigidez de toda la barra (para simplificar la solución), aunque la ventaja del método de elementos finitos consiste en la posibilidad de tener en cuenta la ley arbitraria de variación de la rigidez a lo largo de la barra (véase el problema 7.83).

Luego determinamos la variación del potencial de la carga exterior

$$V = -\frac{P}{2a} \int_0^1 (v')^2 ds. \qquad (2)$$

Observemos que este método permite tomar en consideración la existencia de fuerzas exteriores aplicadas en distintas secciones de la barra (véase el problema 7.83). Aquí la fuerza axial se supone constante a lo largo de toda la barra.

La flecha de la barra dentro de los límites del elemento finito según los datos del problema es

$$v = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3. \qquad (3)$$

Introducimos los índices i, j para los nudos que delimitan el elemento finito. Consideramos que el sistema de n elementos finitos seleccionados tiene $2n$ grados de libertad correspondientes a las flechas en los nudos $v = q_i$, $v = q_j$ y a los ángulos de giro $v' = q_{i+1}$, $v' = q_{j+1}$, etc.; q son las coordenadas generalizadas. Tenemos: cuando $s = 0$, $v = q_i$ y $v' = q_{i+1}$, cuando $s = 1$ $v = q_j$ y $v' = q_{j+1}$. Por medio de estas condiciones determinamos los coeficientes α_0, α_1, α_2, α_3 y componemos la expresión de $v(s)$. Obtenemos

$$v = \vartheta_1 q_i + \vartheta_2 q_{i+1} + \vartheta_3 q_j + \vartheta_4 q_{j+1}, \tag{4}$$

donde

$$\vartheta_1 = 1 - 3s^2 + 2s^3, \quad \vartheta_2 = s - 2s^2 + s^3,$$
$$\vartheta_3 = 3s^2 - 2s^3, \quad \vartheta_4 = -s^2 + s^3.$$

Estas funciones se llaman hermitianas. Cada elemento puede tener su longitud a; en nuestra exposición consideraremos que todas las longitudes son iguales.

Según los datos del problema la barra se divide en dos elementos finitos con los nudos 1, 2, 3 y las coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_6$. Puesto que en los nudos 1 y 3 la barra está empotrada, para estos nudos las flechas y los ángulos de giro se convierten en cero: $q_1 = q_2 = q_5 = q_6 = 0$; dentro de los límites del primer elemento $v_{1-2} = \vartheta_3 q_3 + \vartheta_4 q_4$, dentro de los límites del segundo elemento, $v_{2-3} = \vartheta_1 q_3 + \vartheta_2 q_4$.

La energía potencial del elemento 1—2 es

$$U_{1-2} = \frac{EJ}{2a^3} \int_0^1 \left[\frac{d^2}{ds^2}(\vartheta_3 q_3 + \vartheta_4 q_4)\right]^2 ds =$$

$$= \frac{EJ}{2a^3} \int_0^1 [(6 - 12s) q_3 + (-2 + 6s) q_4]^2 ds =$$

$$= \frac{EJ}{2a^3} \int_0^1 [(36 - 2 \cdot 72s + 144s^2) q_3^2 + 2(-12 + 60s - 72s^2) q_3 q_4 +$$

$$+ (4 - 2 \cdot 12s + 36s^2) q_4^2] ds = \frac{EJ}{2a^3} [(36s - 72s^2 + 48s^3) q_3^2 |_0^1 +$$

$$+ 2(-12s + 30s^2 - 24s^3) q_3 q_4 |_0^1 + (4s - 12s^2 + 12s^3) q_4^2 |_0^1 =$$

$$= \frac{EJ}{2a^3} (12 q_3^2 - 2 \cdot 6 q_3 q_4 + 4 q_4^2). \tag{5}$$

Escribimos esta expresión en forma de matriz

$$U_{1-2} = \frac{EJ}{2a^3} q^T K_{1-2} q,$$

donde K_{1-2} es la matriz de rigidez del elemento 1—2:

$$K_{1-2} = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}, \quad q^T = [q_3, q_4].$$

La energía potencial del elemento 2—3 es:

$$U_{2-3} = \frac{EJ}{2a^3} \int_0^1 \left[\frac{d^2}{ds^2}(\vartheta_1 q_3 + \vartheta_2 q_4)\right]^2 ds = \frac{EJ}{2a^3} (12 q_3^2 + 2 \cdot 6 q_3 q_4 + 4 q_4^2), \tag{6}$$

o bien

$$U_{2-3}=\frac{EJ}{2a^3}\,q^T K_{2-3}q,$$

aquí

$$K_{2-3}=\begin{bmatrix}12 & 6\\ 6 & 4\end{bmatrix}.$$

La energía potencial de todo el sistema es

$$U=U_{1-2}+U_{2-3}=\frac{EJ}{2a^3}\,(q^T K_{1-2}q+q^T K_{2-3}q)=\frac{EJ}{2a^3}\,q^T Kq.$$

La matriz de rigidez K de toda la barra se halla por medio de la adición de los elementos correspondientes de las matrices K_{1-2} y K_{2-3}

$$K=\begin{bmatrix}12+12 & -6+6\\ -6+6 & 4+4\end{bmatrix}\quad\text{o}\quad K=\begin{bmatrix}24 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}.$$

La variación del potencial de las fuerzas exteriores según la fórmula (2) es

$$V_{1-2}=-\frac{P}{2a}\int_0^1\left(\frac{d\vartheta_3}{ds}\,q_3+\frac{d\vartheta_4}{ds}\,q_4\right)^2 ds=-\frac{P}{2a}\left(\frac{6}{5}\,q_3^2-\frac{2}{10}\,q_3q_4+\frac{2}{15}\,q_4^2\right), \tag{7}$$

o bien

$$V_{1-2}=-\frac{P}{2a}\,q^T S_{1-2}q,$$

donde S_{1-2} es la matriz de rigidez geométrica del elemento 1—2:

$$S_{1-2}=\begin{bmatrix}\frac{6}{5} & -\frac{1}{10}\\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{15}\end{bmatrix}.$$

Análogamente para V_{2-3}:

$$V_{2-3}=-\frac{P}{2a}\int_0^1\left(\frac{d\vartheta_1}{ds}\,q_3+\frac{d\vartheta_2}{ds}\,q_4\right)^2 ds=-\frac{P}{2a}\left(\frac{6}{5}\,q_3^2+\frac{2}{10}\,q_3q_4+\frac{2}{15}\,q_4^2\right), \tag{8}$$

donde

$$S_{2-3}=\begin{bmatrix}\frac{6}{5} & \frac{1}{10}\\ \frac{1}{10} & \frac{2}{15}\end{bmatrix}.$$

Para toda la barra

$$V=V_{1-2}+V_{2-3}=-\frac{P}{2a}\,q^T(S_{1-2}+S_{2-3})\,q=-\frac{P}{2a}\,q^T Sq.$$

La matriz de rigidez geométrica S de toda la barra se halla también sumando los elementos correspondientes S_{1-2} y S_{2-3}:

$$S=\begin{bmatrix} \frac{6+6}{5} & -\frac{1}{10}+\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10}+\frac{1}{10} & \frac{2}{15}+\frac{2}{15} \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad S=\begin{bmatrix} \frac{12}{5} & 0 \\ 0 & \frac{4}{15} \end{bmatrix}.$$

Basándonos en el principio variacional, escribimos la condición de equilibrio

$$\delta\,(U+V)=\delta q^{\mathrm{T}}\left(\frac{EJ}{2a^3}\,K-\frac{P}{2a}\,S\right)q=0.$$

Aquí $\delta q^{\mathrm{T}}=(\delta q_3, \delta q_4)$. Conociendo que $\delta q_3 \neq 0$, $\delta q_4 \neq 0$, obtenemos

$$\left(\frac{EJ}{2a^3}\,K-\frac{P}{2a}\,S\right)q=0. \qquad (9)$$

La solución no trivial (cuando $q_3 \neq 0$ y $q_4 \neq 0$) de las ecuaciones homogéneas (9) se halla igualando a cero el determinante

$$\begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}-\frac{Pa^3}{EJ}\begin{bmatrix} \frac{12}{5} & 0 \\ 0 & \frac{4}{15} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 24-\frac{Pa^3}{EJ}\,\frac{12}{5} & 0 \\ 0 & 8-\frac{Pa^3}{EJ}\,\frac{4}{15} \end{bmatrix}.$$

Do aquí cuando $a=l/2$.

$$\left(24-k_1^2\,\frac{3}{5}\right)\left(8-k_2^2\,\frac{1}{15}\right)=0.$$

Obtenemos definitivamente dos soluciones, igualando sucesivamente a cero las expresiones entre paréntesis:

$$k_1^2=\frac{P_1 l^2}{EJ}=40, \quad k_2^2=\frac{P_2 l^2}{EJ}=120.$$

El coeficiente de la fuerza crítica, el valor propio mínimo, hallado de este modo se compara en la respuesta con la solución exacta (analítica).

7.74. Utilizamos la vía descrita en la solución del problema 7.73. Pero aquí hace falta tomar en consideración las condiciones de fijación nuevas. Las condiciones límites para el elemento 1—2 en el nudo 1 serán: $v=0$, $v'=0$. Según la primera de estas condiciones $q_1=0$. Según la segunda condición, basándonos en la fórmula (4) de la solución del problema 7.73, obtendremos:

$$v'=\vartheta_2' q_2+\vartheta_4' q_4=0.$$

Por consiguiente, $q_2=-(\vartheta_2' q_2+\vartheta_4' q_4)/\vartheta_2'$. Sustituyendo q_2, expresado por q_3, q_4, en la (4) y reduciendo los miembros semejantes, tenemos

$$v_{1-2}=\vartheta_3^1 q_3+\vartheta_4^1 q_4,$$

donde $\vartheta_3^1=\frac{3}{2}\,s-\frac{s^3}{2}$, $\vartheta_4^1=-\frac{s}{2}+\frac{s^3}{2}$.

Con las condiciones límites en el nudo 3 $q_3=0$, $d^2v/ds^2=0$, obtendremos análogamente para el elemento 2—3:

$$v_{2-3}=\vartheta_3^2 q_3+\vartheta_4^2 q_4,$$

donde

$$\vartheta_3^2=1-\frac{3}{2}\,s^2+\frac{1}{2}\,s^3, \quad \vartheta_4^2=s-\frac{3}{2}\,s^2+\frac{1}{2}\,s^3,$$

Calculamos la energía de la deformación de la barra mediante las expresiones (1), (5) y (6) de la solución del problema 7.73, pero con valores nuevos de $\vartheta_1 = \vartheta_1^0$, etc. Obtendremos

$$U_{1-2} = \frac{EJ}{2a^3} q^T K_{1-2} q, \quad U_{2-3} = \frac{EJ}{2a^3} q^T K_{2-3} q,$$

donde

$$K_{1-2} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad K_{2-3} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad q^T = [q_2, q_3].$$

Para toda la barra

$$U = \frac{EJ}{2a^3} q^T (K_{1-2} + K_{2-3}) q = \frac{EJ}{2a^3} q^T K q.$$

Aquí

$$K = \begin{bmatrix} 3+3 & -3+3 \\ -3+3 & 3+3 \end{bmatrix} \text{ o } K = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Hallamos análogamente por medio de las expresiones (2) y (8) del problema 7.73

$$V_{1-2} = \frac{P}{2a} q^T S_{1-2} q, \quad V_{2-3} = -\frac{P}{2a} q^T S_{2-3} q, \tag{1}$$

Para toda la barra

$$V = -\frac{P}{2a} q^T (S_{1-2} + S_{2-3}) q = -\frac{P}{2a} q^T S q. \tag{2}$$

Por S_{1-2}, S_{2-3}, S en las fórmulas (1) y (2) están designadas las expresiones siguientes:

$$S_{1-2} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad S_{2-3} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \frac{12}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

De este modo la solución del problema se reduce a la determinación de los valores propios del determinante (como en el problema 7.73)

$$K - \frac{Pa^3}{EJ} S = 0,$$

o bien

$$\begin{bmatrix} 6 - \frac{3}{5} k_1^2 & 0 \\ 0 & 6 - \frac{1}{10} k_1^2 \end{bmatrix} = 0.$$

Aquí hemos tenido en cuenta el valor de $a = l/2$. Hallamos

$$\left(6 - k_1^2 \frac{3}{5}\right)\left(6 - k_1^2 \frac{1}{10}\right) = 0.$$

Entonces, $k_1^2 = 10$, $k_2^2 = 60$. El coeficiente k_1^2 correspondiente a la fuerza está escrito en la respuesta en comparación con la solución exacta.

7.75. Utilizando la misma vía que en los dos problemas anteriores, llegamos a las expresiones

$$U = U_{1-2} + U_{2-3} = \frac{EJ}{2a^3} q^T (K_{1-2} + K_{2-3}) q = \frac{EJ}{2a^3} q^T K q,$$

$$V = V_{1-2} + V_{2-3} = -\frac{P}{2a} q^T (S_{1-2} + S_{2-3}) q = -\frac{P}{2a} q^T S q.$$

Aquí K_{1-2}, S_{1-2} se determinan tal como en el problema 7.74 y K_{2-3}, S_{2-3}, como en el problema 7.73. Las matrices de rigidez y las matrices de rigidez geométrica globales tienen la forma

$$K = \begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \frac{12}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Del mismo modo que en el problema 7.73 la respuesta se halla mediante la ecuación

$$K - \frac{Pa^2}{EJ} S = 0$$

o cuando $a = l/2$ y $k^2 = Pl^2/(EJ)$

$$\begin{bmatrix} 15 - \frac{3}{5} k^2 & 3 + \frac{1}{40} k^2 \\ 3 + \frac{1}{40} k^2 & 7 - \frac{1}{12} k^2 \end{bmatrix} = 0.$$

Abriendo el determinante, llegamos a la ecuación

$$\left(15 - \frac{3}{5} k^2\right)\left(7 - \frac{1}{12} k^2\right) - \left(3 + \frac{1}{40} k^2\right)^2 = 0 \qquad (1)$$

ó $153\,600 - 8960\,k^2 + 79\,k^4 = 0$. Los valores propios del problema son: $k_1^2 = 21$, $k_2^2 = 92$. Véase en la respuesta la comparación con la solución exacta.

7.76. La función de la flecha del elemento 2—3 tiene la forma

$$v = \vartheta_1 q_3 + \vartheta_2 q_4 + \vartheta_3 q_5 + \vartheta_4 q_6.$$

La energía potencial del elemento 2—3 es

$$U_{2-3} = \frac{EJ}{2a^3} \int_0^1 \left(\frac{d^2\vartheta_1}{dz^2} q_3 + \frac{d^2\vartheta_2}{dz^2} q_4 + \frac{d^2\vartheta_3}{dz^2} q_5 + \frac{d^2\vartheta_4}{dz^2} q_6\right)^2 dz =$$

$$= \frac{EJ}{2a^3} (12q_3^2 + 4q_4^2 + 12q_5^2 + 4q_6^2 + 2 \cdot 6q_3q_4 - 2 \cdot 12q_3q_5 +$$

$$+ 2 \cdot 6q_3q_6 - 2 \cdot 6q_4q_5 + 2 \cdot 2q_4q_6 - 2 \cdot 6q_5q_6).$$

Escribimos esta expresión en forma de matriz

$$U_{2-3} = \frac{EJ}{2a^3} q^T K q, \quad q^T = (q_3, q_4, q_5, q_6).$$

La matriz de rigidez del elemento 2—3 es

$$K = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ & 4 & -6 & 2 \\ & & 12 & -6 \\ \text{simétricamente} & & & 4 \end{bmatrix}$$

Para los elementos finitos 1—2 y 6—7 las matrices de rigidez (véase la solución del problema 7.73) son:

$$K_{1-2}=\begin{bmatrix}12 & -6\\ -6 & 4\end{bmatrix}, \quad K_{6-7}=\begin{bmatrix}12 & 6\\ 6 & 4\end{bmatrix}.$$

La energía potencial de toda la barra se obtiene combinando sucesivamente las matrices de rigidez para los elementos 1—2, 2—3, 3—4, . . ., 6—7:

$$U=U_{1-2}+U_{2-3}+\ldots+U_{6-7}, \quad U=\frac{EJ}{2a^3}\,q^{\mathrm{T}}Kq,$$

donde $q^{\mathrm{T}}=(q_2, q_4, q_5, \ldots, q_{12})$.
La matriz completa K es de cinta y tiene la forma

$$\begin{array}{|cc|cc|cc|cc|cc|}
\hline
12 & -6 & -12 & 6 & & & & & & \\
-6 & 4 & -6 & 2 & & & & & & \\
\hline
-12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 & & & & \\
6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 & & & & \\
\hline
 & & -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 & & \\
 & & 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 & & \\
\hline
 & & & & -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 \\
 & & & & 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 \\
\hline
 & & & & & & -12 & -6 & 24 & 0 \\
 & & & & & & 6 & 2 & 0 & 8 \\
\hline
\end{array}$$

Calculamos la variación del potencial de las fuerzas exteriores de un elemento sin contacto con los extremos de la barra:

$$V_{2-3}=-\frac{P}{2a}\int_0^1\left[\left(\frac{d\vartheta_1}{ds}\,q_2+\frac{d\vartheta_2}{ds}\,q_4+\frac{d\vartheta_3}{ds}\,q_5+\frac{d\vartheta_4}{ds}\,q_6\right)\right]^2 ds=$$

$$=-\frac{P}{2a}\left(\frac{6}{5}\,q_2^2+\frac{2}{15}\,q_4^2+\frac{6}{5}\,q_5^2+\frac{2}{15}\,q_6^2+\frac{2}{10}\,q_2q_4-2\,\frac{6}{5}\,q_2q_5+\right.$$

$$\left.+2\,\frac{1}{10}\,q_2q_6-\frac{1}{5}\,q_4q_5-\frac{1}{15}\,q_4q_6-2\,\frac{1}{10}\,q_5q_6\right).$$

La expresión de V_{2-3} en forma de matriz será

$$V_{2-3} = -\frac{P}{2a} q^T S q,$$

donde $q^T = (q_3, q_4, q_5, q_6)$, S es la matriz de rigidez geométrica ligada con la variación del potencial de las fuerzas exteriores:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ & \frac{2}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ & & \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ & \text{Simétricamente} & & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

Las matrices de rigidez geométrica de los elementos 1—2 y 6—7 tienen la forma

$$S_{1-2} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}, \quad S_{6-7} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}.$$

Hallamos la variación del potencial de las fuerzas exteriores para toda la barra:

$$V = V_{1-2} + V_{2-3} \ldots + V_{6-7}.$$

Aquí también, combinando sucesivamente las matrices de rigidez de los distintos elementos, obtenemos

$$V = -\frac{P}{2a} q^T S q.$$

donde $q^T = (q_1, q_2, \ldots, q_{10})$; la matriz de cinta de rigidez geomótrica S para toda la barra tiene la forma

$$\begin{array}{|cccccccccc|}
\hline
\frac{6}{5}+\frac{6}{5} & \frac{1}{10}-\frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & & & & & & \\
\frac{1}{10}-\frac{1}{10} & \frac{2}{15}+\frac{2}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & & & & & & \\
\hline
-\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5}+\frac{6}{5} & \frac{1}{10}-\frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & & & & \\
\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{10}-\frac{1}{10} & \frac{2}{15}+\frac{2}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & & & & \\
\hline
 & & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5}+\frac{6}{5} & -\frac{1}{10}+\frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & & \\
 & & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10}+\frac{1}{10} & \frac{2}{15}+\frac{2}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & & \\
\hline
 & & & & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5}+\frac{6}{5} & -\frac{1}{10}+\frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\
 & & & & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10}+\frac{1}{10} & \frac{2}{15}+\frac{2}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\
\hline
 & & & & & & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5}+\frac{6}{5} & -\frac{1}{10}+\frac{1}{10} \\
 & & & & & & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10}+\frac{1}{10} & \frac{2}{15}+\frac{2}{15} \\
\hline
\end{array}$$

Cuando $a = l/6$, $k^2 = Pl^2/(EJ)$ la ecuación resolutiva del problema es:

$$\left(K - \frac{1}{36} k^2 S\right) q = 0.$$

La resolución no trivial de este sistema es posible cuando

$$K - \frac{1}{36} k^2 S = 0$$

o bien

$$\frac{1}{36} k^2 I = K S^{-1},$$

donde I es la matriz unitaria.

De este modo el problema se ha reducido a la determinación de los valores propios de la matriz KS^{-1}. Durante la resolución del problema en el ordenador tipo EC el subprograma estandard NROOT sirve para calcular los valores propios y los vectores propios de tal matriz.

El valor propio mínimo es el coeficiente correspondiente a la fuerza crítica.

7.77. Utilizar el ordenador de acuerdo con el esquema descrito en la resolución del problema 7.76.

7.78. En comparación con el problema 7.76 variarán solamente las matrices de rigidez y las de rigidez geométrica de los elementos finitos; para el elemento 1—2 éstas tendrán la forma descrita en la resolución del problema 7.74:

$$K_{1-2} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad S_{1-2} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix},$$

para el elemento 6—7 que para el elemento 2—3 del problema 7.74:

$$K_{6-7} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad S_{6-7} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

7.79. Véase la indicación para el problema 7.78.

7.80. Escribimos la ecuación diferencial de la deformada

$$v^{IV} + k^2 v'' = 0,$$

donde $k^2 = P/(EJ)$. Expresamos las derivadas por diferencias centrales

$$(v^{IV})_i = \frac{1}{s^4} (v_{i-2} - 4v_{i-1} + 6v_i - 4v_{i+1} + v_{i+2}),$$

$$(v'')_i = \frac{1}{s^2} (v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}),$$

donde v_{i-2}, etc., son las flechas en uno u otro punto nodal, s es la longitud del intervalo.

Consideraremos que un extremo de la barra tiene el índice 0 y el otro, $(n+1)$; el número de nudos interiores es igual a l. Entonces, en este problema y en los dos que siguen $v_0 = 0$, $v_{n+1} = 0$. En caso de empotramiento rígido hace falta considerar que $v_{-1} = v_1$, $v_{n+2} = v_n$.

Entonces, para los nudos 1, 2, 3 obtendremos por medio de la ecuación (1):

$$\begin{aligned} 7v_1 - 4v_2 + v_3 + k^2s^2(-2v_1 + v_2) &= 0, \\ -4v_1 + 6v_2 + 4v_3 + v_4 + k^2s^2(v_1 - 2v_2 + v_3) &= 0, \\ v_1 - 4v_2 + 6v_3 - 4v_4 + v_5 + k^2s^2(v_2 - 2v_3 + v_4) &= 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Ecuaciones análogas se escribirán para los nudos $n-2$, $n-1$, n. La ecuación (1) en forma matricial será

$$Av + k^2s^2Bv = 0.$$

Como A se entiende la matriz de cinta de cinco diagonales

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 & \\ & & & & 1 & -4 & 5 & \end{bmatrix}.$$

Como B se entiende la matriz de cinta de tres diagonales:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & & 1 & -2 & \end{bmatrix}.$$

El problema de determinar el coeficiente $k^2 = Pl^2/(EJ)$ cuando $s = l/(n+1)$ se reduce a hallar el valor propio mínimo de la matriz $B^{-1}A$; esto se hace en un ordenador EC con ayuda del subprograma NROOT o de otros subprogramas especiales. Los resultados de la solución para diferente número de intervalos, en comparación con la solución exacta, se dan en la respuesta.

7.81. El curso general de resolución está descrito en la solución del problema anterior. La diferencia consiste en la estructura de las dos primeras ecuaciones (2); ahora éstas corresponden a las condiciones límites $v_{-1} = -v_1$, $v_{n+2} = -v_n$ y se escribirán en la forma

$$\begin{aligned} 5v_1 - 4v_2 + v_3 + k^2s^2(-2v_1 + v_2) &= 0, \\ -4v_1 + 6v_2 - 4v_3 + v_4 + k^2s^2(v_1 - 2v_2 + v_3) &= 0. \end{aligned}$$

Obtenemos una ecuación análoga para el otro extremo de la barra.

7.82. En caso de condiciones de fijación mixtas de los extremos de la barra es necesario utilizar la estructura de las ecuaciones escritas en los problemas 7.80 y 7.81.

7.83. Basándonos en la solución del problema 7.78, hallamos las matrices de rigidez de los elementos 1—2 y 2—3 tomando en consideración la diferencia en las rigideces de estos elementos ($J_2 = \beta J_1$):

$$K_{1-2} = \frac{EJ_1}{2a^3}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \frac{EJ_2}{2a^3}\begin{bmatrix} 3/\beta & -3/\beta \\ -3/\beta & 3/\beta \end{bmatrix}, \quad K_{2-3} = \frac{EJ_2}{2a^3}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Luego comparamos las matrices de rigidez geométrica teniendo en cuenta la diferencia en las fuerzas axiales ($P_1 + P_2 = P_1/\alpha$):

$$S_{1-2} = -\frac{P_1}{2a}\begin{bmatrix} 6/5 & -1/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix}, \quad S_{2-3} = -\frac{P_1+P_2}{2a}\begin{bmatrix} 6/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{P_1}{2a}\begin{bmatrix} 6/(5\alpha) & 1/(5\alpha) \\ 1/(5\alpha) & 1/(5\alpha) \end{bmatrix}.$$

Las matrices globales de toda la barra se hallan mediante la adición de los elementos de las matrices correspondientes:

$$K = K_{1-2} + K_{2-3} = \frac{EJ_z}{2a^3}\begin{bmatrix} 3[1+(1/\beta)] & 3[1-(1/\beta)] \\ 3[1-(1/\beta)] & 3[1+(1/\beta)] \end{bmatrix},$$

$$S = S_{1-2} + S_{2-3} = -\frac{P_1}{2a}\begin{bmatrix} (6/5)[(1/\alpha)+1] & (1/5)[(1/\alpha)-1] \\ (1/5)[(1/\alpha)-1] & (1/5)[(1/\alpha)+1] \end{bmatrix}.$$

La determinación del parámetro crítico (según el problema 7.73) se reduce a hallar los valores de $k^2 = P_1 a^2/(EJ_z)$ con los cuales el determinante $K - k^2 S$ es igual a cero:

$$K - k^2 S =$$

$$= \begin{bmatrix} 3[(1+(1/\beta)] - k^2\frac{6}{5}[(1/\alpha)+1] & 3[1-(1/\beta)] - k^2\frac{1}{5}[(1/\alpha)-1] \\ 3[1-(1/\beta)] - k^2\frac{1}{5}[(1/\alpha)-1] & 3[1+(1/\beta)] - k^2\frac{1}{5}[(1/\alpha)+1] \end{bmatrix} = 0.$$

Abriendo el determinante, obtenemos

$$\left[3\left(1+\frac{1}{\beta}\right) - k^2\frac{6}{5}\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\right]\left[3\left(1+\frac{1}{\beta}\right) - k^2\frac{1}{5}\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\right] -$$

$$-\left[3\left(1-\frac{1}{\beta}\right) - k^2\frac{1}{5}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\right]^2 = 0,$$

o bien

$$k^4\frac{1}{25}\left(\frac{5}{\alpha^2}+\frac{14}{\alpha}+5\right) - k^2\left[\frac{21}{5}\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\left(\frac{1}{\beta}+1\right) -\right.$$

$$\left. -\frac{6}{5}\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\right] + \frac{36}{\beta} = 0,$$

Para la variante a) cuando $\alpha = 2/3$ y $\beta = 3/2$ llegamos a la ecuación

$$1{,}49k^4 - 17{,}3k^2 + 24 = 0. \qquad (1)$$

En este caso

$$k^2_{1,2} = \frac{17{,}3 \pm 12{,}5}{2{,}98}, \quad k^2_{\min} = \frac{P_1(l/2)^2}{EJ_z} = 1{,}611.$$

De aquí

$$k^2_* = \frac{(P_1+P_2)\,l^2}{EJ_z} = 9{,}667.$$

Comparando con el valor exacto de $k^2 = 9{,}45$ en la respuesta del problema 7.39, se ve que el error es igual a un 2,3%.

Para la variante b) cuando $\alpha = 1/2$ y $\beta = 2$ la ecuación (1) tendrá la forma

$$2{,}12k^4 - 18{,}3k^2 + 18 = 0.$$

Hallamos

$$k^2_{1,2} = \frac{18{,}3 \pm 13{,}48}{4{,}24}.$$

De aquí

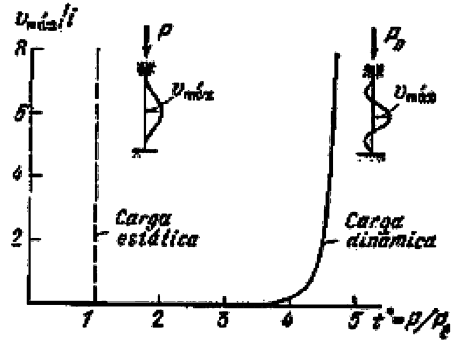
$$k^2_{min} = \frac{P_1 (l/2)^2}{EJ_z} = 1{,}137 \text{ y } k^2_2 = \frac{(P_1 + P_2)\, l^2}{EJ_z} = 9{,}096.$$

El valor exacto de $k^2_2 = 8{,}95$. El error es de un 1,46%.

7.84. La energía cinética del elemento finito es

$$T = \frac{\rho F a}{2} \int_0^1 \dot{v}^2\, ds; \qquad (1)$$

el punto sobre la letra significa la diferenciación por el tiempo. Expresamos la velocidad de desplazamientos dentro de los límites del elemento finito tal como



Para el problema 7.84

en el problema 7.73, pero esta vez respecto a las velocidades de los parámetros $\dot{\alpha}_1, \ldots, \dot{\alpha}_4$; ρ es la densidad del material. Tenemos

$$\dot{v} = \dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 s + \dot{\alpha}_3 s^2 + \dot{\alpha}_4 s^3.$$

Expresamos $\dot{v}$ por las velocidades de desplazamientos de los nudos $\dot{q}_i$, $\dot{q}_j$ y por las velocidades de variación de los ángulos de giro $\dot{q}_{i+1}$, $\dot{q}_{j+1}$ correspondientes a los extremos del elemento $i - j$:

$$\dot{v}(s=0) = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial \dot{v}(s=0)}{\partial s} = \dot{q}_{i+1}, \quad \dot{v}(s=1) = \dot{q}_j, \quad \frac{\partial \dot{v}(s=1)}{\partial s} = \dot{q}_{j+1}.$$

En este caso

$$v = \vartheta_1 \dot{q}_i + \vartheta_2 \dot{q}_{i+1} + \vartheta_3 \dot{q}_j + \vartheta_4 \dot{q}_{j+1},$$

aquí $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_4$ tienen los mismos valores que en el problema 7.73. Para el elemento 1—2 cuando $q_1 = 0$, $q_2 = 0$

$$\dot{v} = \vartheta_3 \dot{q}_3 + \vartheta_4 \dot{q}_4,$$

$$T_{1-2} = \frac{\rho F a}{2} \int_0^1 (\vartheta_3 \dot{q}_3 + \vartheta_4 \dot{q}_4)^2 ds =$$

$$= \frac{\rho F a}{2} \int_0^1 [(3s^2 - 2s^3)^2 \dot{q}_3^2 + 2(3s^2 - 2s^3)(-s^2 + s^3) \dot{q}_3 \dot{q}_4 + (-s^2 + s^3)^2 \dot{q}_4^2] ds =$$

$$= \frac{\rho F a}{2 \cdot 630} (234 \dot{q}_3^2 - 2 \cdot 33 \dot{q}_3 \dot{q}_4 + 6 \dot{q}_4^2).$$

Escribimos esta expresión en forma de matriz:

$$T_{1-2} = \frac{\rho F a}{2 \cdot 630} \dot{q}^T M_{1-2} \dot{q},$$

donde

$$M_{1-2} = \begin{bmatrix} 234 & -33 \\ -33 & 6 \end{bmatrix}, \quad \dot{q}^T = (\dot{q}_3 \dot{q}_4), \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix}.$$

Para el elemento 2—3 obtendremos

$$\dot{v}_{2-3} = \vartheta_1 \dot{q}_3 + \vartheta_2 \dot{q}_4 + \vartheta_3 \dot{q}_5 + \vartheta_4 \dot{q}_6.$$

Sustituyendo $\dot{v}_{2-3}$ en (1), hallamos

$$T_{2-3} = \frac{\rho F a}{2} \int_0^1 (\vartheta_1 \dot{q}_3 + \vartheta_2 \dot{q}_4 + \vartheta_3 \dot{q}_5 + \vartheta_4 \dot{q}_6)^2 ds =$$

$$= \frac{\rho F a}{2 \cdot 630} (234 \dot{q}_3^2 + 6 \dot{q}_3^2 + 234 \dot{q}_5^2 + 6 \dot{q}_6^2 + 2 \cdot 39 \dot{q}_3 \dot{q}_4 + 2 \cdot 81 \dot{q}_3 \dot{q}_5 -$$

$$- 2 \cdot 19{,}5 \dot{q}_3 \dot{q}_6 + 2 \cdot 19{,}5 \dot{q}_4 \dot{q}_5 + 2 \cdot 4{,}5 \dot{q}_4 \dot{q}_6 - 2 \cdot 33 \dot{q}_5 \dot{q}_6).$$

Escribimos esta expresión en la forma siguiente:

$$T_{2-3} = \frac{\rho F a}{2 \cdot 630} \dot{q}^T M_{2-3} \dot{q},$$

donde M_{2-3} es la matriz de masas

$$M_{2-3} = \begin{bmatrix} 234 & 33 & 81 & -19{,}5 \\ & 6 & 19{,}5 & -4{,}5 \\ & & 234 & -33 \\ \text{simétricamente} & & & 6 \end{bmatrix},$$

$$\dot{q}^T = (\dot{q}_3, \dot{q}_4, \dot{q}_5, \dot{q}_6).$$

No es difícil ver que las matrices de masas para los elementos no contiguos a los apoyos serán las mismas que la matriz (2). Determinamos la matriz de ma-

sas para el elemento, cuyo extremo derecho está empotrado, cuando $\dot{q}_{11} = 0$, $\dot{q}_{12} = 0$:

$$\dot{v} = \vartheta_1 \dot{q}_9 + \vartheta_2 \dot{q}_{10},$$

$$T_{8-7} = \frac{\rho F a}{2} \int_0^1 (\vartheta_1 \dot{q}_9 + \vartheta_2 \dot{q}_{10})^2 \, ds = \frac{\rho F a}{2 \cdot 630} (234 \dot{q}_9^2 + 2 \cdot 33 \dot{q}_9 \dot{q}_{10} + 6 \dot{q}_{10}^2),$$

o bien

$$T_{8-7} = \frac{\rho F a}{2 \cdot 630} \dot{q}^T M_{8-7} \dot{q},$$

donde

$$M_{8-7} = \begin{bmatrix} 234 & 33 \\ 33 & 6 \end{bmatrix}.$$

Para el sistema completo

$$T = \frac{\rho F a}{2 \cdot 630} \dot{q}^T M \dot{q}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\rho F a}{630} M \ddot{q} \tag{3}$$

por M se designa aquí la matriz de masas para toda la barra:

234	+33	81	−19,5						
+234	−33								
+33	6	19,5	−4,5						
−33	+6								
81	−19,5	234	+33	81	−19,5				
		+234	−33						
−19,5	−4,5	+33	6	19,5	−4,5				
		−33	+6						
		81	19,5	234	+33	81	−19,5		
				+234	−33				
		−19,5	−4,5	+33	6	19,5	−4,5		
				−33	+6				
				81	19,5	234	+33		
						+234	−33		
				−19,5	−4,5	+33	−6		
						−33	+6		

cuando $\dot{q}^T = (\dot{q}_2, \dot{q}_4, \dot{q}_5, \dot{q}_6, \dot{q}_7, \dot{q}_8, \dot{q}_9, \dot{q}_{10})$.

Escribimos la ecuación de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0.$$

La función de Lagrange es igual a $L=T-U-V$, donde T es la energía cinética; U, la energía potencial de la deformación; V, el potencial de las fuerzas exteriores. Puesto que la energía cinética es aquí función solamente de las velocidades generalizadas $\dot{q}_i$ y las magnitudes U y V son solamente las de las coordenadas generalizadas q_i, la ecuación se reduce a la forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial}{\partial q_i}(-U-V)=0,$$

o bien

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial}{\partial q_i}(U+V)=0.$$

Sustituyendo aquí los valores de (3) y de U, V tomados de la solución del problema 7.76, obtenemos

$$\frac{\rho F a^3}{630}M\ddot{q}+\frac{EJ}{a^3}(K-\lambda^2 S)\,q=0, \qquad (4)$$

aquí, como antes, $\lambda^3=Pa^2/(EJ)$, donde a es la longitud del elemento; según los datos $P=Fct$. La matriz de masas es degenerada por eso el sistema de ecuaciones puede ser reducido a la forma

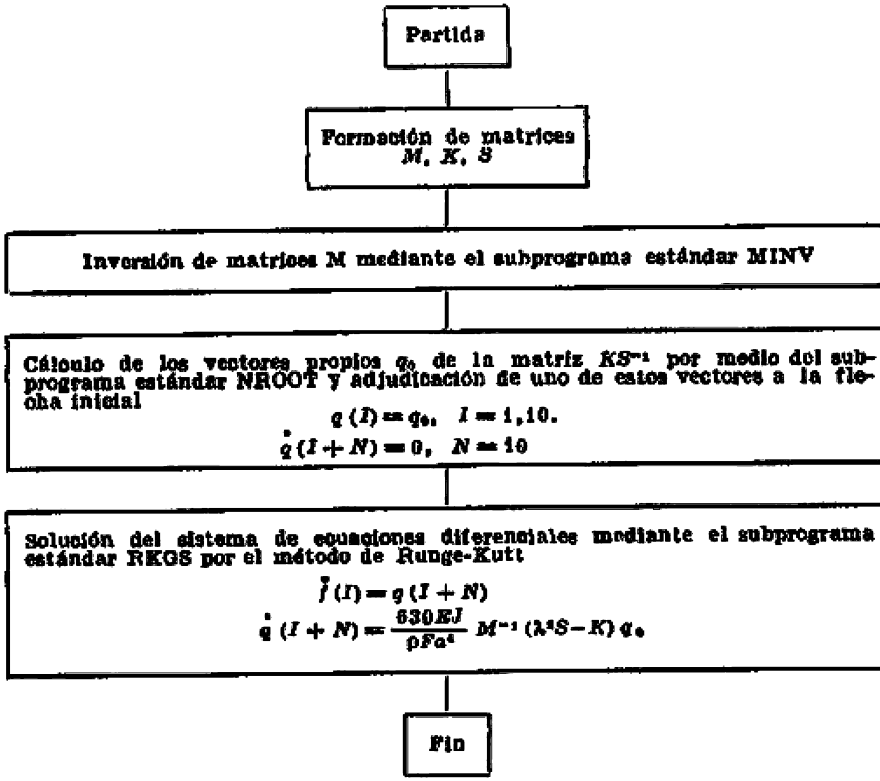
$$\ddot{q}=\frac{630\,EJ}{\rho F a^4}M^{-1}(\lambda^2 S-K)\,q.$$

Reducimos estas ecuaciones al sistema de primer orden

$$\dot{q}=y,$$

$$\dot{y}=\frac{630\,EJ}{\rho F a^4}M^{-1}(\lambda^2 S-K)\,q.$$

Luego hacemos la integración de estas ecuaciones con ayuda del ordenador Damos el bloque-esquema utilizado en los ordenadores tipo EC:



En la figura está representada la dependencia de la flecha máxima, referida al radio de giro de la sección i, respecto de la relación P/P_E, donde P_E es la carga de Euler con las condiciones límites dadas. El valor de P/P_E, debido al cual se produce un crecimiento catastrófico de las flechas, está dado en la respuesta. Se recomienda al lector resolver el problema de manera parecida, pero tomando como base no la primera, sino otras formas propias de la pérdida estática de estabilidad de la barra (véase el esquema-bloque del programa).

CAPITULO 8

BARRAS DE CURVATURA GRANDE. CILINDROS DE PAREDES GRUESAS

8.1. En la sección más peligrosa AB la fuerza normal es $N = 100$ kN, el momento flector, $M = 100\,(1{,}8 + 0{,}5) = 230$ kN·m. El radio de curvatura de la capa neutra es

$$r = \frac{h}{\ln (R_2/R_1)} = 0{,}4551 \text{ m}.$$

La distancia entre el centro de gravedad de la sección y la capa neutra es

$$e = R - r = 0{,}0449 \text{ m}.$$

La tensión máxima será en el punto A; $y_A = r - R_1 = 0{,}205$ m,

$$\sigma_{máx} = \frac{N}{F} + \frac{My_A}{FeR_1} = 86 \text{ MPa} < [\sigma].$$

8.2. Efectuamos un estudio de la barra con $h/R = 1$. En este caso

$$R_1 = R - \frac{h}{2} = \frac{R}{2}; \quad R_2 = R + \frac{h}{2} = \frac{3}{2} R; \quad \frac{R_2}{R_1} = 3.$$

Según la fórmula exacta

$$e = R - \frac{h}{\ln 3} = 0{,}0897\, h.$$

Según la fórmula aproximada

$$\bar{e} = \frac{bh^3}{12\, bhR} = \frac{h}{12} = 0{,}0833\, h.$$

En el primer caso $\sigma_{máx} = \frac{My_1}{FeR_1}$, en el segundo $\bar{\sigma}_{máx} = \frac{M\bar{y}_1}{F\bar{e}R_1}$. La relación de las tensiones máximas es $\frac{\bar{\sigma}_{máx}}{\sigma_{máx}} = \frac{\bar{y}_1 e}{y_1 \bar{e}}$, donde $y_1 = \frac{h}{2} - e = 0{,}4103h$, $\bar{y}_1 = \frac{h}{2} - \bar{e} = 0{,}4167\, h$. Obtenemos $\frac{\bar{\sigma}_{máx}}{\sigma_{máx}} = 1{,}095$.

La fórmula aproximada de e da un valor aumentado en un 9,5% de $\sigma_{máx}$ lo cual va al factor de seguridad. Si la curvatura es menor, el error será menor. Cuando $h/R = 1/2$ tenemos $e = 0{,}0424h$, $y_1 = 0{,}4576h$, $\bar{e} = 0{,}417h$, $\bar{y}_1 = 0{,}4583h$, $\frac{\bar{\sigma}_{máx}}{\sigma_{máx}} = 1{,}02$. El error es de un 2%.

8.3. Determinamos la distancia entre la fibra interior y el centro de gravedad de la sección

$$a=\frac{(2b_2+b_1)\,h}{3\,(b_1+b_2)}=\frac{(2\cdot 2+4)\,9}{3\,(2+4)}=4\text{ cm}.$$

En la sección más peligrosa la fuerza normal $N=23$ kN, el momento flector $M=23\cdot(3+4)\cdot 10^{-2}=1{,}61$ kN·m. La tensión normal máxima es $\sigma_{máx}=\frac{N}{F}+\frac{My_1}{FeR_1}$. El radio de curvatura de la capa neutra es $r=F\Big/\int\limits_F\frac{dF}{\rho}$.

Calculamos

$$F=\frac{1}{2}\,(b_1+b_2)\,h,\quad dF=b\,d\rho,\quad b=b_2+(b_1-b_2)\,\frac{R_2-\rho}{h},$$

$$\int\limits_F\frac{dF}{\rho}=\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{b\,d\rho}{\rho}=\frac{b_1R_2-b_2R_1}{h}\ln\frac{R_2}{R_1}-(b_1-b_2).$$

Como resultado

$$r=\frac{(b_1+b_2)\,h^2}{2\,[(b_1R_2-b_2R_1)\ln(R_2/R_1)-(b_1-b_2)\,h]}=6{,}05\text{ cm},$$

$$e=R-r=0{,}95\text{ cm},\quad y_1=r-R_1=3{,}05\text{ cm},\quad F=(b_1+b_2)\,h/2=27\text{ cm}^2,$$

$$\sigma_{máx}=72{,}5\text{ MPa}<[\sigma].$$

8.4. Según la fórmula aproximada $e=\frac{J}{FR}=\frac{d^2}{16R}=0{,}0833$ cm, $y_1=\frac{d}{2}-e=0{,}9167$ cm. De la condición de resistencia $\frac{P}{F}+\frac{PRy_1}{FeR_1}\leqslant[\sigma]$ hallamos la carga admisible

$$P=\frac{F\,[\sigma]}{1+Ry_1/(eR_1)}=3{,}27\text{ kN}.$$

8.5. En la sección más peligrosa B la fuerza normal es $N=P$, el momento flector, $M=P\cdot 2R$. Igualando $\sigma_{máx}$ al límite de fluencia, hallamos la fuerza P:

$$\sigma_{máx}=\frac{P}{F}+\frac{P2Ry_1}{FeR_1}=\sigma_{fl},\quad P=\frac{\sigma_{fl}\,bh}{1+\dfrac{2Ry_1}{eR_1}}.$$

El desplazamiento Δ se calcula por medio de la fórmula de Mohr

$$\Delta=2\int\limits_0^{\pi}\frac{M_P\overline{M}}{EJ}\,R\,d\varphi;\quad M_P=PR\,(1-\cos\varphi),\quad \overline{M}=R\,(1-\cos\varphi),$$

$$\Delta=\frac{2}{EJ}\int\limits_0^{\pi}PR^3\,(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi=\frac{3\pi\,PR^3}{EJ}=\frac{36\pi\,PR^3}{Eb^3}.$$

Sustituimos aquí la expresión de la fuerza P:

$$\Delta=\frac{36\pi R^2\sigma_{fl}}{Eb^2\,(1+2Ry_1/(eR_1))}.$$

Hallamos la magnitud de e por medio de la fórmula aproximada

$$e=\frac{J}{FR}=\frac{h^2}{12R}=0{,}0206\text{ cm},\quad y_1=\frac{h}{2}-e=0{,}4792\text{ cm},$$

$$R_1=R-\frac{h}{2}=3{,}5\text{ cm},\quad \Delta=0{,}002\text{ m}=2\text{ mm}.$$

8.6. Tenemos $F=2\pi r_{med}\delta$, $dF=\delta r_{med}\,d\varphi$, $\rho=R+r_{med}\cos\varphi$; $\int\limits_F \frac{dF}{\rho}=$

$$=2\int\limits_0^{\pi}\frac{\delta r_{med}\,d\varphi}{R+r_{med}\cos\varphi}=\frac{2\pi\delta r_{med}}{\sqrt{R^2-r_{med}^2}}.$$

El radio de curvatura de la capa neutra es

$$r=F\Big/\int\limits_F\frac{dF}{\rho}=\sqrt{R^2-r_{med}^2}=7{,}746\text{ cm},\quad e=R-r=0{,}254\text{ cm},$$

$$F=7{,}55\text{ cm}^2,\quad R_1=R-d/2=5{,}7\text{ cm},\quad y_1=r-R_1=2{,}046\text{ cm},$$

$$N=P=4\text{ kN},\quad M=P(R+a)=0{,}52\text{ kN}\cdot\text{m},$$

$$\sigma_{máx}=\frac{N}{F}+\frac{My_1}{FeR_1}=102{,}8\text{ MPa}.$$

8.8. Los esfuerzos debidos a la fuerza P y a la fuerza unitaria son:
$M_p=PR\operatorname{sen}\varphi$, $N_p=-P\operatorname{sen}\varphi$, $\overline{M}=R\operatorname{sen}\varphi$, $\overline{N}=-\operatorname{sen}\varphi$.
El desplazamiento es

$$\Delta=\int\limits_s\frac{M_p\overline{M}\,ds}{EFeR}+\int\limits_s\frac{N_p\overline{N}\,ds}{EF}+\int\limits_s\frac{N_p\overline{M}\,ds}{EFR}+\int\limits_s\frac{M_p\overline{N}\,ds}{EFR}=$$

$$=\frac{2}{EFeR}\int\limits_0^{\pi/2}PR\operatorname{sen}^2\varphi\cdot R\operatorname{sen}\varphi\cdot R\,d\varphi+\frac{2}{EF}\int\limits_0^{\pi/2}P\operatorname{sen}^2\varphi\cdot R\,d\varphi-$$

$$-\frac{2}{EFR}\int\limits_0^{\pi/2}P\operatorname{sen}\varphi\cdot R\operatorname{sen}\varphi\cdot R\,d\varphi-\frac{2}{EFR}\cdot\int\limits_0^{\pi/2}PR\operatorname{sen}^2\varphi\cdot R\,d\varphi=$$

$$=\frac{\pi PR}{2EF}\left(\frac{R}{e}-1\right),$$

$$R_1=R-\frac{1}{4}R=\frac{3}{4}R,\quad R_2=R+\frac{1}{4}R=\frac{5}{4},\quad F=a^2=\frac{R^2}{4},$$

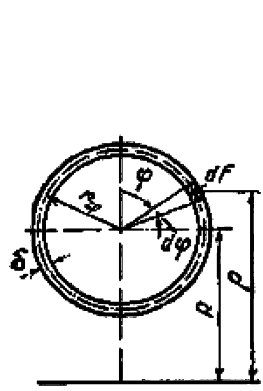
$$r=\frac{h}{\ln(R_2/R_1)}=0{,}9788R;\quad e=R-r=0{,}0212\,R,$$

$$\Delta=\frac{\pi PR}{2EF}\left(\frac{R}{0{,}0212R}-1\right)=\frac{92{,}3\,\pi P}{ER}.$$

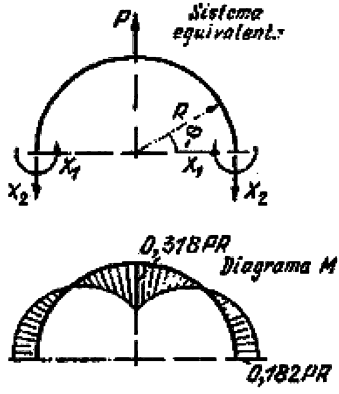
Aproximadamente

$$\Delta=\int\limits_s\frac{M_p\overline{M}\,ds}{EJ}=\frac{2}{EJ}\int\limits_0^{\pi/2}PR\operatorname{sen}\varphi\cdot R\operatorname{sen}\varphi\cdot Rd\varphi=\frac{\pi PR^3}{2EJ}=\frac{96\pi P}{ER}.$$

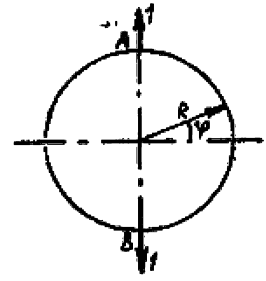
8.9. Utilizando la simetría, escogemos el sistema equivalente en la forma representada en la figura. De la condición de equilibrio hallamos $X_2 = P/2$.



Para el problema 8.8



Para el problema 8.9



Para el problema 8.10

El momento incógnito X_1 se halla por medio de la ecuación de deformaciones

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Los momentos flectores debidos a las cargas exterior y unitaria incógnita son iguales a $M_P = \frac{1}{2}PR(1-\cos\varphi)$, $\overline{M}_1 = 1$, teniendo en cuenta que $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Calculamos

$$\delta_{11} = \int_s \frac{\overline{M}_1^2}{EJ}\,ds = 2\int_0^{\pi/2} \frac{R\,d\varphi}{EJ} = \frac{\pi}{EJ};$$

$$\Delta_{1P} = \int_s \frac{M_P\overline{M}_1}{EJ}\,ds = 2\int_0^{\pi/2} \frac{PR(1-\cos\varphi)}{2EJ}\,R\,d\varphi = \frac{PR^2}{EJ}\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

Determinamos el momento X_1:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -PR\left(0{,}5-\frac{1}{\pi}\right) = -0{,}182PR.$$

El momento flector en una sección arbitraria del arco es

$$M = M_P + \overline{M}_1X_1 = \frac{1}{2}PR(1-\cos\varphi) - 0{,}182PR = PR(0{,}318-0{,}5\cos\varphi).$$

El diagrama correspondiente de los momentos flectores está representado en la figura. El momento flector máximo es $M_{máx} = 0{,}318PR = 1145$ N·m. La distancia entre el centro de gravedad de la sección y la capa neutra es

$$e = R - \frac{h}{\ln(R_2/R_1)} = 0{,}2544 \text{ cm};$$

$$y_1 = \frac{h}{2} - e = 2{,}7456 \text{ cm}, \quad R_1 = R - \frac{h}{2} = 9 \text{ cm};$$

la tensión máxima es

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{My_1}{FeR_1} = 115 \text{ MPa}.$$

8.10. Para determinar el desplazamiento mutuo de los puntos A y B aplicamos en los puntos A y B del aro cortado fuerzas unitarias y calculamos la integral

$$\Delta = \int_s \frac{M\overline{M}}{EJ}\, ds.$$

El momento flector debido a la carga exterior (véase la solución del problema anterior) es $M = PR\,(0{,}318 - 0{,}5\cos\varphi)$. El momento flector debido a la carga unitaria es $\overline{M} = -R\cos\varphi$. Sustituimos estas expresiones en la integral:

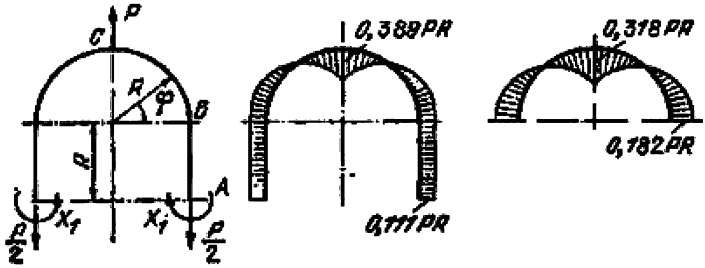
$$\Delta = 2\int_0^{\pi/2} \frac{PR^3\,(0{,}318 - 0{,}5\cos\varphi)\,(-\cos\varphi)\,d\varphi}{EJ} =$$

$$= \frac{2PR^3}{EJ}\left(\frac{\pi}{8} - 0{,}318\right) = \frac{0{,}150PR^3}{EJ} = \frac{1{,}8PR^3}{Ebh^3} = 0{,}0108 \text{ cm}.$$

8.11. Un sistema equivalente está representado en la figura. La magnitud incógnita X_1 se determina por la ecuación

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Los momentos flectores en el tramo AB son: $M_P = 0$, $\overline{M}_1 = 1$;



Para el problema 8.11

en el tramo BC son: $M_P = 0{,}5PR\,(1 - \cos\varphi)$, $\overline{M}_1 = 1$;

$$\delta_{11} = \frac{2}{EJ}\int_A^C \overline{M}_1^2\, ds = \frac{(2+\pi)R}{EJ};$$

$$\Delta_{1P} = \frac{2}{EJ}\int_A^C M_P\overline{M}_1\, ds = \frac{2}{EJ}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}PR\,(1-\cos\varphi)\,R\,d\varphi = \frac{PR^2}{EJ}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right);$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{PR}{2}\cdot\frac{\pi-2}{\pi+2} = -0{,}111PR.$$

El momento flector en el tramo AB es $M = -0{,}111PR$; en el tramo BC es $M = 0{,}5PR\,(1 - \cos\varphi) - 0{,}111PR$. El diagrama de los momentos flectores está

representado en la figura. El momento flector máximo es igual a $M_{máx} = (0{,}5 - 0{,}141)\,PR = 0{,}389PR$. El momento flector máximo en el eslabón circular (véase la resolución del problema 8.9) es igual a $M_{máx} = 0{,}318PR$.

Puesto que las secciones y las curvaturas en ambos casos son iguales, las tensiones se relacionan como los momentos flectores. Por consiguiente, $\sigma_{máx}$ del elemento alargado será en un $\delta = \frac{0{,}389 - 0{,}318}{0{,}318} 100\% = 22{,}3\%$ mayor que en el elemento circular.

8.12. Las tensiones máximas actúan en la capa interior del cilindro donde

$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{r_{ext}^2 + r_{int}^2}{r_{ext}^2 - r_{int}^2} p_{int}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \sigma_r = -p_{int}.$$

Según la III teoría de resistencia tenemos

$$\frac{r_{ext}^2 + r_{int}^2}{r_{ext}^2 - r_{int}^2} p_{int} + p_{int} \leqslant \frac{\sigma_{fl}}{n_{fl}}.$$

De aquí

$$r_{ext} = r_{int} \sqrt{\frac{\sigma_{fl}}{\sigma_{fl} - 2n_{fl} p_{int}}} = 94{,}5 \text{ mm}.$$

Suponemos que $d_{ext} = 2r_{ext} = 190$ mm. Según la IV teoría de resistencia obtenemos

$$\left(\frac{r_{ext}^2 + r_{int}^2}{r_{ext}^2 - r_{int}^2}\right)^2 p_{int}^2 + \frac{r_{ext}^2 + r_{int}^2}{r_{ext}^2 - r_{int}^2} p_{int}^2 + p_{int}^2 \leqslant \frac{\sigma_{fl}^2}{n_{fl}^2}.$$

De aquí

$$r_{ext} = r_{int} \sqrt{\frac{\sigma_{fl}^2 + n_{fl} p_{int} \sqrt{4\sigma_{fl}^2 - 3n_{fl}^2 p_{int}^2}}{\sigma_{fl}^2 - 3n_{fl}^2 p_{int}^2}} = 83 \text{ mm}.$$

Consideramos que $d_{ext} = 2r_{ext} = 166$ mm.

8.15. En el cilindro interior las tensiones serán máximas cuando $r = r_{int}$

$$\sigma_r = -p_{int}, \quad \sigma_t = \frac{r_{ext}^2 + r_{int}^2}{r_{ext}^2 - r_{int}^2} p_{int} - \frac{2r_{med}^2}{r_{med}^2 - r_{int}^2} p = 1{,}86p_{int} - 3{,}94p,$$

en el cilindro exterior, cuando $r_2 = r_{med}$,

$$\sigma_r' = \frac{r_{int}^2}{r_{ext}^2 - r_{int}^2}\left(1 - \frac{r_{ext}^2}{r_{med}^2}\right) p_{int} - p = -0{,}273p_{int} - p,$$

$$\sigma_t' = \frac{r_{int}^2}{r_{ext}^2 - r_{int}^2}\left(1 + \frac{r_{ext}^2}{r_{med}^2}\right) p_{int} + \frac{r_{ext}^2 + r_{med}^2}{r_{ext}^2 - r_{med}^2} p = 1{,}14p_{int} + 4{,}17p.$$

La condición de equirresistencia es

$$\sigma_t^2 - \sigma_t\sigma_r + \sigma_r^2 = (\sigma_t')^2 - \sigma_t'\sigma_r' + (\sigma_r')^2.$$

De aquí obtenemos la ecuación $4{,}68p_{int}^2 - 30{,}92p_{int}p - 6{,}74p^2 = 0$, mediante la cual hallamos $p_{int} = 6{,}9p$. Valiéndonos de las dependencias obtenidas anteriormente, determinamos la presión debida al huelgo negativo a partir de la condición de resistencia

$$\sqrt{\sigma_t^2 - \sigma_t\sigma_r + \sigma_r^2} \leqslant [\sigma].$$

Obtenemos $p = 36{,}5$ MPa. La presión interior admisible es $p_{int} = 6{,}9 \cdot 36{,}5 = 252$ MPa.

8.16. Igualamos el momento de las fuerzas de rozamiento al momento exterior: $fp\pi\, db\, \frac{d}{2} = M$. De aquí hallamos la presión debida al huelgo negativo

$$p = \frac{2M}{\pi d^2 bf} = 53{,}2 \text{ MPa}.$$

El huelgo negativo es

$$\Delta = \frac{2pd}{E(1 - d^2/D^2)} = 0{,}0283 \text{ mm}.$$

8.17. La condición del comienzo de las deformaciones plásticas según la III teoría de resistencia tiene la forma

$$\sigma_e = \sigma_t - \sigma_r = \sigma_{fl}.$$

Para los puntos interiores de la polea tenemos:

$$\sigma_e = \frac{r_{ext}^2 + r_{int}^2}{r_{ext}^2 - r_{int}^2}\, p + p = \frac{2r_{ext}^2}{r_{ext}^2 - r_{int}^2}\, p = \sigma_{fl}.$$

De aquí la presión debida al huelgo negativo es

$$p = \frac{\sigma_{fl}}{2}\left(1 - \frac{r_{int}^2}{r_{ext}^2}\right) = \frac{\sigma_{fl}}{2}\left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right).$$

El huelgo negativo es $\Delta = \frac{2pd}{E(1 - d^2/D^2)}$. Sustituyendo aquí la expresión de p, obtenemos $\Delta = \sigma_{fl}\, d/E = 0{,}06$ mm. Para el árbol $\sigma_e = p$ y, por consiguiente, es menor que para la polea.

8.18. Según la condición de resistencia $\frac{r_{ext}^2 + r_{int}^2}{r_{ext}^2 - r_{int}^2}\, p + p \leqslant \frac{\sigma_{fl}}{n_{fl}}$ hallamos la presión debida al huelgo negativo $p = \frac{\sigma_{fl}}{2n_{fl}}\left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$. El huelgo negativo es $\Delta = \frac{2pd}{E(1 - d^2/D^2)}$. Sustituimos aquí la expresión de p. Obtenemos $\Delta = \frac{\sigma_{fl} d}{E n_{fl}} = 0{,}045$ mm. La presión debida al huelgo negativo es $p = \frac{\sigma_{fl}(1 - d^2/D^2)}{2n_{fl}} = 83{,}2$ MPa. La fuerza axial es $P = fp\pi db = 47$ kN.

8.19. Igualamos la fuerza de rozamiento a la de tracción: $fp\pi dt = P$. La presión debida al huelgo negativo es $p = \frac{P}{f\pi dt} = 53{,}2$ MPa. El huelgo negativo es $\Delta = \frac{2pd}{E(1 - d^2/D_1^2)}$. Considerando que $D \to \infty$ obtenemos $\Delta = \frac{2pd}{E} = 0{,}212$ mm.

Las tensiones en el contorno del orificio, cuando $r_{ext} \to \infty$, obtienen tales valores: $\sigma_t = p$, $\sigma_r = -p$. La tensión equivalente $\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t - \sigma_r = 2p$. El coeficiente de seguridad es $n_{fl} = \frac{\sigma_{fl}}{\sigma_e} = \frac{\sigma_{fl}}{2p} = 2{,}82$.

8.20. La presión debida al huelgo negativo se determina de la condición $M = fp\pi\, dbd/2$, de donde $p = 2M/(\pi d^2 bf) = 59$ MPa. El huelgo negativo

es $\Delta = \frac{pd}{E_{ac}}(1-\mu_{ac}) + \frac{pd}{E_{hc}}\left(\frac{D^2+d^2}{D^2-d^2} + \mu_{hc}\right) = 0{,}073$ mm.

8.21. Igualamos los desplazamientos radiales de los puntos exteriores del tubo de aluminio y de la pared del tubo de acero de paredes delgadas:

$$\frac{1-\mu}{E_{al}} \frac{p_{int} r_{int}^2 - p_{ext} r_{ext}^2}{r_{ext}^2 - r_{int}^2} r_{ext} + \frac{1+\mu}{E_{al}} \frac{(p_{int} - p_{ext}) r_{int}^2 r_{ext}^2}{(r_{ext}^2 - r_{int}^2) r_{ext}} = \frac{p_{ext} r_{ext}^2}{E_{ac}\delta}.$$

De aquí $p_{ext} = 0{,}217 p_{int}$. Igualamos las tensiones equivalentes en los puntos interiores del tubo de aluminio junto con el tubo de acero encajado en éste y sin él:

$$\frac{p_{int} r_{int}^2 - 0{,}217\, p_{int} r_{ext}^2}{r_{ext}^2 - r_{int}^2} + \frac{(p_{int} - 0{,}217 p_{int}) r_{int}^2 r_{ext}^2}{(r_{ext}^2 - r_{int}^2) r_{int}^2} +$$

$$+ p_{int} = \left(\frac{r_{ext}^2 + r_{int}^2}{r_{ext}^2 - r_{int}^2} + 1\right) \bar{p}_{int}.$$

De aquí obtenemos $p_{int} = 1{,}285 \bar{p}_{int}$, es decir, la presión interior puede ser aumentada aproximadamente 1,3 veces.

8.22. Al igualar los desplazamientos radiales de la capa exterior del tubo de cobre y de la capa interior del tubo de acero, hallamos la dependencia entre la presión interior en el tubo compuesto y la presión sobre la superficie de contacto de los dos tubos. Según la condición del comienzo de las deformaciones plásticas en el tubo de cobre $\sigma_t - \sigma_r = \sigma_{fl}$ hallamos $p_{int} = 36$ MPa.

8.23. El huelgo negativo debido a la temperatura es $\Delta = (\alpha_{cob} - \alpha_{ac})\, \Delta t \times 2r_{med}$. La presión debida al huelgo negativo es

$$p = \frac{(\alpha_{cob} - \alpha_{ac})\, \Delta t}{\frac{1}{E_{cob}}\left(\frac{r_{int}^2 + r_{med}^2}{r_{med}^2 - r_{int}^2} - \mu_{cob}\right) + \frac{1}{E_{ac}}\left(\frac{r_{med}^2 + r_{ext}^2}{r_{ext}^2 - r_{med}^2} + \mu_{ac}\right)} = 5{,}65 \text{ MPa}.$$

En el tubo de cobre $(\sigma_t)_{máx} = -2r_{med}^2 p/(r_{med}^2 - r_{int}^2) = -25{,}8$ MPa. En el tubo de acero $(\sigma_t)_{máx} = (r_{ext}^2 + r_{med}^2)\, p/(r_{ext}^2 - r_{med}^2) = 25{,}7$ MPa.

CAPÍTULO 9

PROBLEMAS DE LA DINÁMICA

9.3. La fuerza de inercia elemental es $dP = Fdx\rho\omega^2 x$. El esfuerzo máximo es

$$N = F\rho\omega^2 \int_0^{l/2} x\,dx = \frac{1}{8} F\rho\omega^2 l^2.$$

Considerando que $\omega = n\pi/30$ obtenemos, según la condición de resistencia, $N/F \leqslant [\sigma]$

$$l_{res} = \frac{1}{\pi n}\sqrt{\frac{7200\,[\sigma]}{\rho}} = \frac{1}{\pi\cdot 1200}\sqrt{\frac{7200\cdot 100\cdot 10^6}{7{,}85\cdot 10^3}} = 2{,}54\text{ m},$$

$$n_{máx} = \frac{1}{\pi l_{res}}\sqrt{\frac{7200\,\sigma_r}{\rho}} = \frac{1}{\pi\cdot 2{,}54}\sqrt{\frac{7200\cdot 800\cdot 10^6}{7{,}85\cdot 10^3}} = 3395\text{ r.p.m.}$$

9.5. La carga sobre las vigas es $P = (m_1 + m_2)\,g + m_1 2h/t^2 = 65\cdot 10^3$ N. La tensión dinámica máxima es $\sigma_{din} = \dfrac{Pl}{4\cdot 2W} = \dfrac{65\cdot 10^3\cdot 4}{4\cdot 2\cdot 203} = 160$ MPa.

9.7. La cara sobre el eje es

$$P = mg + \frac{mV^2}{r} = mg + \frac{m\cdot 2g\cdot 2r}{r} = 1226\text{ N}.$$

La tensión máxima dinámica es $\sigma_{din} = \dfrac{Pl}{4W} = \dfrac{8Pl}{\pi d^3} = 97{,}6$ MPa.

9.8. La intensidad de las fuerzas de inercia es $q = m_0\omega^2 r = bh\rho\,(n\pi/30)^2\,r$. El momento máximo es $M = ql^2/8$. La tensión dinámica máxima es

$$\sigma_{din} = \frac{M}{W} = \frac{3ql^2}{4bh^2} = \frac{(n\pi)^2 rl^2\rho}{1200h} = 103{,}8\text{ MPa},$$

9.9. El área de la sección de la biela es $F = 11$ cm^2, el momento de inercia es

$$J = 34{,}92\text{ cm}^4,\quad W = 13{,}97\text{ cm}^3.$$

La intensidad máxima de las fuerzas de inercia es

$$q_0 = \rho F\omega^2 r = \rho F\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 r = 37\,900\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}.$$

El momento flector máximo es $M_{máx} = q_0 l^2/(9\sqrt{3}) = 389$ N·m. La tensión dinámica máxima es $\sigma_{din} = \dfrac{M_{máx}}{W} = 27{,}8$ MPa.

9.10. La rigidez del resorte es

$$c = Gd^4/(8D^3n) = 1929 \text{ N/m}.$$

Según el principio de D'Alembert $m\omega^2 (l + f) = cf$. De aquí

$$\omega = \sqrt{\frac{cf}{m(l+f)}} = 22 \text{ rad/s}.$$

La tensión en el resorte es

$$\tau_{din} = \frac{8PD}{\pi d^3} = \frac{8fcD}{\pi d^3} = 118 \text{ MPa}.$$

9.11. Mediante la condición $m\omega^2 (l + f) = cf$ hallamos el alargamiento del resorte $f = m\omega^2 l/(c - m\omega^2)$. La frecuencia crítica de rotación se determina de la condición $f \to \infty$ que tendrá lugar cuando $c = m\omega^2$. De aquí $\omega_{cr} = \sqrt{c/m} = 43{,}9$ rad/s; $n_{cr} = 419$ r. p. m.

9.12. La aceleración angular es

$$\varepsilon = \frac{\omega^2}{2\varphi} = \left(\frac{n\pi}{30}\right)^2 \cdot \frac{1}{2\varphi} = \left(\frac{600\pi}{30}\right)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 20\pi} = 10\pi.$$

El momento torsor es $M_{tor} = J_m\varepsilon = 400\pi$ N·m. La tensión es $\tau = 16M_{tor}/(\pi d^3) = 29{,}6$ MPa.

9.13. El momento de inercia del disco es $J_m = mD^2/8$. La aceleración angular es $\varepsilon = \omega/t = \pi n/(30t)$. El momento torsor es $M_{tor} = J_m\varepsilon = \frac{mD^2}{8} \cdot \frac{\pi n}{30t}$. La tensión es $\tau = \frac{16M_{tor}}{\pi d^3} = 13{,}65$ MPa.

9.15. La variación del huelgo negativo es igual a la diferencia doble de los desplazamientos radiales de la llanta y los puntos exteriores del disco debidos a la acción de las fuerzas de inercia:

$$2(u_1 - u_2) = 2\left(\rho_{ac}\frac{\omega^2 b^3}{E_{ac}} - \frac{1-\mu}{4E_{dur}}\rho_{dur}\omega^2 b^3\right) =$$

$$= 2\omega^2 b^3 \left(\frac{\rho_{ac}}{E_{ac}} - \frac{1-\mu}{4E_{dur}}\rho_{dur}\right).$$

Cuando $2(u_1 - u_2) = \Delta$ la presión debida al huelgo negativo será igual a cero. De esta condición, considerando que $\omega = n\pi/30$, hallamos la frecuencia de rotación:

$$n = \frac{1}{\pi b}\sqrt{\frac{450\Delta}{b\left(\frac{\rho_{ac}}{E_{ac}} - \frac{1-\mu}{4E_{dur}}\rho_{dur}\right)}} = 3340 \text{ r.p.m.}$$

9.16. La variación del huelgo negativo es

$$2(u_1 - u_2) = 2\omega^2 b^3 \left(\frac{\rho_{ac}}{E_{ac}} - \frac{1-\mu}{4E_{dur}}\rho_{dur}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{n\pi}{30}\right)^2 b^3 \left(\frac{\rho_{ac}}{E_{ac}} - \frac{1-\mu}{4E_{dur}}\rho_{dur}\right) = 0{,}560 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

El huelgo negativo remanente $\Delta_{rem} = \Delta - 2(u_1 - u_2) = 0{,}44$ mm. La presión debida al huelgo negativo remanente es

$$p = \frac{\Delta_{rem}}{2b\left(\frac{1-\mu}{E_{dur}} + \frac{b}{E_{ac}i}\right)} = 2{,}49 \text{ MPa}.$$

Sumando las tensiones debidas a las fuerzas de inercia y a la presión p, hallamos las tensiones máximas en el disco

$$(\sigma_t)_{máx} = (\sigma_r)_{máx} = \frac{3+\mu}{8} \rho_{disc} \omega^2 b^2 - p.$$

Teniendo en cuenta que $\omega = \frac{n\pi}{30}$, obtenemos $(\sigma_t)_{máx} = 16{,}7$ MPa. La tensión en la llanta es $\sigma = \rho_{ac} \omega^2 b^2 + pb/t = 217{,}5$ MPa.

9.17. La variación del huelgo negativo se determina como una diferencia doble de los desplazamientos radiales del disco y del árbol (cuando $r = a$):

$$2(u_1 - u_2) = \frac{\rho\omega^2}{4E} [(3+\mu)(1-\mu)(a^3+b^3)a + (3+\mu)(1+\mu)ab^2 - (1-\mu^2)a^3] - \frac{1-\mu}{2E} \rho\omega^2 a^3 = \frac{\rho\omega^2}{2E} (3+\mu) ab^2.$$

La presión debida al huelgo negativo es igual a cero cuando la variación de dicho huelgo es igual al inicial:

$$\frac{\rho\omega^2}{2E} (3+\mu) ab^2 = \Delta.$$

De aquí

$$\omega = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{2E\Delta}{\rho(3+\mu)a}} = 438 \text{ rad/s}.$$

La frecuencia de rotación es $n = 30\omega/\pi = 4183$ r.p.m.

9.18. La variación del huelgo negativo es igual a

$$2(u_1 - u_2) = \frac{\rho\omega^2}{2E} (3+\mu) ab^2.$$

Teniendo en cuenta que $\omega = n\pi/30$, obtendremos $2(u_1 - u_2) = 51{,}4 \cdot 10^{-6}$ m. El huelgo negativo remanente es $\Delta_{rem} = \Delta - 2(u_1 - u_2) = 48{,}6 \cdot 10^{-6}$ m. La presión debida al huelgo negativo es

$$p = \frac{E\Delta_{rem}(b^2 - a^2)}{4ab^2} = 47{,}8 \text{ MPa}.$$

Sumando las tensiones debidas a las fuerzas de inercia y a la presión p, hallamos las tensiones máximas en el disco:

$$(\sigma_t)_{máx} = \frac{3+\mu}{4} \rho\omega^2 \left(b^2 + \frac{1-\mu}{3+\mu} a^2\right) + \frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} p = 152 \text{ MPa},$$

$$(\sigma_r)_{r=a} = -p = -47{,}8 \text{ MPa}.$$

9.19. La rigidez del resorte es

$$c = Gd^4/(8D^3 n) = 4 \cdot 10^3 \text{ N/m}.$$

La frecuencia es $\omega_1 = \sqrt{c/m} = 44{,}72$ 1/s. La masa reducida del resorte es

$$m_{red} = \frac{1}{3} \frac{\pi d^2}{4} \pi D n \rho = 0{,}209 \text{ kg}.$$

Tomando en consideración la masa del resorte, la frecuencia es

$$\omega_2 = \sqrt{c/(m + m_{red})} = 42{,}55 \text{ 1/s}.$$

9.20. La rigidez de la barra es $c = EF/l = 2\pi \cdot 10^7$ N/m. La frecuencia es $\omega_1 = \sqrt{c/m} = 1121$ 1/s. El período de oscilaciones es $T_1 = 2\pi/\omega_1 = 0{,}00560$ s. La masa reducida de la barra es $m_{red} = \frac{1}{3}\frac{\pi d^2}{4} l\rho = 0{,}822$ kg. La frecuencia es, tomando en consideración la masa del resorte, $\omega_2 = \sqrt{c/(m + m_{red})} = 1121$ 1/s. El período es $T_2 = 2\pi/\omega_2 = 0{,}00565$ s.

9.21. La rigidez del resorte es $c = Gd^4/(8D^3n)$. La masa reducida del resorte es $m_{red} = \frac{1}{3}\frac{\pi d^2}{4}\pi Dn\rho$. La frecuencia es

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m_{red}}} = \frac{d}{\pi D^2 n}\sqrt{\frac{3G}{2\rho}} = 69{,}14 \text{ 1/s}.$$

El período es $T = 0{,}0908$ s.

9.23. Escribimos la ecuación de movimiento del sistema, aprovechando el principio de D'Alembert:

$\ddot{x} + \frac{ca^2}{ml^2}x = 0$. De aquí la frecuencia es $\omega = \frac{a}{l}\sqrt{\frac{c}{m}}$. La rigidez del resorte es $c = Gd^4/(8D^3n) = 3 \cdot 10^3$ N/m. La frecuencia es $\omega = 12{,}65$ 1/s.

9.24. Caso a): la rigidez es $c = 3EJ/l^3$; la frecuencia es $\omega = \sqrt{3EJ/(ml^3)} = 19{,}51$ 1/s; el período, $T = 2\pi/\omega = 0{,}322$ s. La masa reducida de la viga es

$$m_{red} = \frac{33}{140} m_0 l = 21{,}4 \text{ kg}.$$

Aquí $m_0 = 22{,}7$ kg es la masa de un metro de viga (de la tabla 7 del anexo). Tomando en consideración la masa de la viga, la frecuencia es $\omega' = \sqrt{3EJ/(m + m_{red})\, l^3} = 19{,}10$ 1/s. El período es $T' = 2\pi/19{,}10 = 0{,}329$ s.

Caso b): la rigidez es $c = 48EJ/l^3$; la frecuencia, $\omega = \sqrt{48EJ/(ml^3)} = 78{,}04$ 1/s. El período es $T = 0{,}0805$ s. La masa reducida de la viga es

$$m_{red} = \frac{17}{35} m_0 l = 44{,}1 \text{ kg};$$

$$\omega' = \sqrt{48EJ/[(m + m_{red})\, l^3]} = 74{,}81 \text{ 1/s}, \quad T = 0{,}840 \text{ s}.$$

Caso c): la rigidez es $c = 192EJ/l^3$; la frecuencia, $\omega = \sqrt{192EJ/(ml^3)} = 156{,}1$ 1/s, el período es $T = 2\pi/156{,}1 = 0{,}043$ s. La masa reducida de la viga es $m_{red} = \frac{13}{35} m_0 l = 33{,}7$ kg,

$$\omega' = \sqrt{192EJ/[(m + m_{red})\, l^3]} = 151 \text{ 1/s}, \quad T' = 0{,}0416 \text{ s}.$$

9.26. La rigidez de la viga es $c_1 = 3EJ/l^3 = 2 \cdot 10^4$ N/m; aquí $J = bh^3/12$ es el momento de inercia de la sección de la viga. La rigidez es $c_2 = Gd^4/(8D^3n) = 625$ N/m. La rigidez del sistema es $c = c_1c_2/(c_1 + c_2)$. La frecuencia es $\omega = \sqrt{c/m} = 24{,}62$ 1/s.

9.28. La frecuencia de oscilaciones propia del sistema debe ser igual a $\omega = 1{,}3\, \pi n/30 = 163{,}4$ 1/s. Puesto que $\omega = \sqrt{c/m}$, la rigidez es $c = m\omega^2 = 267 \cdot 10^5$ N/m. Por otro lado, $c = 48EJ/l^3$. Obtenemos $J = cl^3/(48E) = 347{,}6 \cdot 10^{-6}$ m^4. Para una viga $J_1 = 0{,}5J = 173{,}8 \cdot 10^{-6}$ m^4 = 17 380 cm^4.

Se conviene la sección doble T N° 40, cuyo momento de inercia es $J_x =$ = 19 062 cm^4. Teniendo en cuenta el peso propio de la viga, la frecuencia resulta menor. Por eso hace falta utilizar una viga más rígida, por ejemplo, la de sección N° 45, cuyo valor $J_x = 27\,696$ cm^4, la masa lineal es $m_0 = 66{,}5$ kg/m. Obtenemos la rigidez del sistema igual a $c = 2 \cdot 48EJ_x/l^3 = 425{,}4 \cdot 10^5$ N/m. La masa reducida de las vigas es $m_{red} = 2 \cdot 17 m_0 l/35 = 2 \cdot 17 \cdot 66{,}5 \cdot 5/35 = 323$ kg. La frecuencia es $\omega' = \sqrt{c/(m + m_{red})} = 179{,}3$ 1/s $> 163{,}4$ 1/s.

9.29. La ecuación de movimiento es $\ddot{x} + \frac{c - m\omega_{rot}^2}{m} x = 0$, donde x se cuenta a partir de la posición de equilibrio. La frecuencia es $\omega = \sqrt{\frac{c}{m} - \omega_{rot}^2}$, donde $\sqrt{\frac{c}{m}} = \omega_0$ es la frecuencia cuando no hay rotación ($\omega_{rot} = 0$). Como resultado $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_{rot}^2}$.

9.30. La rigidez c del sistema elástico puede expresarse por un desplazamiento unitario δ_{11} del siguiente modo: $c = 1/\delta_{11}$. En este caso la frecuencia es $\omega = \sqrt{1/(m\delta_{11})}$. Para determinar δ_{11} aplicamos en la sección B una fuerza unitaria en el sentido de las oscilaciones. Según la fórmula de Mohr obtenemos:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \int_l \overline{M}_1^2 \, dx = \frac{2l^3}{3EJ}.$$

La frecuencia es $\omega = \sqrt{3EJ/(2ml^3)}$.

9.31. Considerando que las velocidades son proporcionales a las flechas, obtenemos $V = V_0 \operatorname{sen}(\pi x/l)$, donde V_0 es la velocidad en la sección media de la viga. La energía cinética del sistema es

$$T = \int_0^l \frac{V^2}{2} \frac{m}{l} dx + \sum \frac{m_i V_i^2}{2} = \frac{V_0^2}{2} \left(\frac{m}{2} + \sum m_i \operatorname{sen}^2 \frac{\pi z_i}{l} \right) = \frac{V_0^2}{2} m_{red}.$$

La masa reducida del sistema es $m_{red} = \frac{m}{2} + \sum m_i \operatorname{sen}^2 \frac{\pi z_i}{l}$.

9.32. La masa reducida de todo el sistema es $m_{red} = \frac{m}{2} + 2m_1 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{8} =$ $= \frac{30{,}6 \cdot 6}{2} + \frac{3 \cdot 200}{2} = 391{,}8$ kg. La rigidez es $c = 48EJ/l^3 = 48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2550 \cdot 10^{-8}/6^3 =$ $= 1133 \cdot 10^3$ N/m. La frecuencia es $\omega = \sqrt{c/m_{red}} = 53{,}78$ 1/s.

9.33. La masa reducida de la viga es $m_{red} = 0{,}5m = 0{,}5bhl\rho = 1{,}67$ kg. La rigidez es $c = 48EJ/l^3 = 500$ N/m; aquí $J = bh^3/12$ es el momento de inercia de la sección de la viga. La frecuencia es $\omega = \sqrt{c/m_{red}} = 17{,}30$ 1/s. La solución exacta da: $\omega = 17{,}42$ 1/s.

9.34. 1). *Árbol rígido.* La frecuencia crítica es $\omega_{cr} = 1{,}35\pi n/30 = 424$ 1/s. Por otro lado

$$\omega_{cr} = \sqrt{c/m} = \sqrt{48EJ/(l^3 m)} = \sqrt{3\pi E d^4/(4l^3 m)}.$$

De aquí hallamos el diámetro del árbol

$$d = \sqrt[4]{\frac{4\omega_{cr}^2 l^3 m}{3\pi E}} = 8{,}7 \cdot 10^{-2} \text{ m}. \qquad (1)$$

2). *Árbol flexible.* La frecuencia crítica es $\omega_{cr} = \frac{\pi \cdot n}{3 \cdot 30} = 104{,}7$ 1/s. Según la fórmula (1) el diámetro del árbol es $d = 4{,}30 \cdot 10^{-2}$ m.

9.35. Aplicando al disco un momento igual a la unidad determinamos el desplazamiento unitario

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \int_s \overline{M}^2 \, ds = \frac{\pi D_{med} n}{EJ} = \frac{64 D_{med} n}{Ed^4}.$$

El momento de inercia de la masa del disco es $J_m = mD^2/8$. La frecuencia es

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{J_m \delta_{11}}} = \frac{d^2}{D} \sqrt{\frac{E}{8mD_{med} n}} = 28{,}5 \text{ 1/s}.$$

9.37. La posición de la sección fija (de nudo) A del árbol se determina mediante la condición de igualdad de las frecuencias de oscilaciones de ambos discos:

$$\omega = \sqrt{\frac{GJ_p}{J_{m1}a}} = \sqrt{\frac{GJ_p}{J_{m2}b}}.$$

De aquí obtenemos $a/b = J_{m2}/J_{m1}$. Puesto que $a+b=l$, tenemos $a = lJ_{m2}/(J_{m1}+J_{m2})$. La frecuencia es $\omega = \sqrt{GJ_p\,(J_{m1}+J_{m2})/(lJ_{m1}J_{m2})}$. Los momentos de inercia de las masas de discos son

$$J_{m1} = m_1 D_1^2/8; \quad J_{m2} = m_2 D_2^2/8.$$

Como resultado obtenemos

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi G d^4 (m_1 D_1^2 + m_2 D_2^2)}{m_1 m_2 D_1^2 D_2^2}} = 455\ 1/\text{s}.$$

9.39. Para que coincidan las frecuencias deben ser iguales las rigideces o los desplazamientos unitarios en ambos sentidos de las oscilaciones de la masa: $c_1 = c_2$ o $\sigma_{11} = \sigma_{22}$. Tenemos

$$\delta_{11} = l^3/(48EJ); \quad \delta_{22} = (r^3/3 + r^2 l/12)/(EJ).$$

Igualando estas magnitudes, obtenemos la ecuación para $x = l/r$:

$$x^3 - 4x - 16 = 0.$$

De aquí hallamos $x = 3{,}04$, es decir, $r = 0{,}33l$.

9.40. *Sin tomar en consideración la fuerza de compresión.* La rigidez es $c = 48EJ/l^3$. La frecuencia es $\omega = \sqrt{48EJ/(ml^3)} = 54{,}92$ 1/s; aquí $J = \pi d^4/64$ es el momento de inercia de la sección de la barra.

Tomando en consideración la fuerza de compresión. En el punto de aplicación de la masa aplicamos la fuerza P perpendicular al eje de la barra y componemos la ecuación diferencial de la flexión transversal longitudinal de la barra: $(0 \leqslant x \leqslant l/2)$ $v'' + k^2 v = -\frac{Px}{2EJ}$, donde $k = \sqrt{N/(EJ)}$. La solución general de la ecuación tiene la forma

$$v = C_1 \cos kx + C_2 \operatorname{sen} kx - Px/(2N).$$

Empleando las condiciones límites $v = 0$ cuando $x = 0$ y $v' = 0$ cuando $x = l/2$, obtenemos la ecuación del eje deformado de la barra

$$v = \frac{P \operatorname{sen} kx}{2Nk \cos(kl/2)} - \frac{Px}{2N}.$$

La flecha máxima es $v_{\text{máx}} = \frac{P}{2Nk}\left(\operatorname{tg}\frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}\right)$. Suponiendo que $v_{\text{máx}} = 1$, hallamos la rigidez $c = P = \frac{2Nk}{\operatorname{tg}(kl/2) - kl/2}$. Calculamos

$$N = \frac{1}{2}N_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{2l^2} = 31\,000\ \text{N}, \quad k = \sqrt{\frac{N}{EJ}} = 1{,}111\ 1/\text{m}.$$

La frecuencia es

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = 39\ 1/\text{s}.$$

9.41. Aplicamos al extremo de la barra la fuerza P perpendicular a su eje. La ecuación diferencial de la flexión transversal longitudinal de la barra tiene la forma

$$EJv'' = P(l - x) + N(f - v)$$

o bien

$$v'' + k^2 v = P(l - x)/(EJ) + Nf/(EJ), \text{ donde } k^2 = N/EJ.$$

La solución general de la ecuación es:

$$v = C_1 \cos kx + C_2 \operatorname{sen} kx + P(l - x)/N + f.$$

Empleando las condiciones límites $v = 0$ cuando $x = 0$, $v' = 0$ cuando $x = 0$ y $v = f$ cuando $x = l$, obtenemos la expresión de la flecha; $f = P(\operatorname{tg} kl - kl)/(kN)$. Suponiendo que $f = 1$, hallamos la rigidez

$$c = P = Nk/(\operatorname{tg} kl - kl),$$

donde $N = mg$. Calculamos $k = \sqrt{N/(EJ)} = \sqrt{12mg/(Ebh^3)} = 2{,}712$ 1/m; $kl = 1{,}356$. La frecuencia es

$$\omega = \sqrt{c/m} = \sqrt{gk/(\operatorname{tg} kl - kl)} = \sqrt{9{,}81 \cdot 2{,}712/(4{,}584 - 1{,}356)} = 2{,}87 \text{ 1/s}.$$

Cuando la fuerza de tracción es $N = mg$. En este caso la ecuación diferencial tiene la forma

$$v'' - k^2 v = P(l - x)/(EJ) - Nf/(EJ).$$

La solución general de la ecuación es

$$v = C_1 \operatorname{ch} kx + C_2 \operatorname{sh} kx - P(l - x)/N + f.$$

Las mismas condiciones límites dan la siguiente expresión de la flecha $f = \frac{P}{Nk}(kl - \operatorname{th} kl)$. De aquí obtenemos la rigidez $c = Nk/(kl - \operatorname{th} kl)$. Calculamos la frecuencia $\omega = \sqrt{gk/(kl - \operatorname{th} kl)} = 7{,}44$ 1/s.

9.42. La frecuencia de la fuerza perturbadora es $\omega_{per} = \pi n/30 = 94{,}25$ 1/s. La resonancia tendrá lugar cuando $\omega = \omega_{per}$. Tenemos $\omega = \sqrt{c/m} = \sqrt{3EJ/(ml^3)} = \omega_{per}$. De aquí calculamos $l_1 = \sqrt[3]{3EJ/(m\omega_{per}^2)} = 1{,}2$ m.

Para que $\omega = 1{,}3\omega_{per}$ el motor debe ser instalado a una distancia $l = l_1/\sqrt[3]{(\omega/\omega_{per})^2} = 1$ m. La amplitud de oscilaciones forzadas es $A = \frac{v_0}{1 - (\omega_{per}/\omega)^2}$; aquí $v_0 = P_1\delta_{11}$ es la flecha debida a una fuerza igual a la amplitud de la fuerza perturbadora P_1, donde $\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}$; calculamos $A = \frac{P_1 l^3}{3EJ[1 - (\omega_{per}/\omega)^2]} = 0{,}32 \cdot 10^{-3}$ m. La flecha estática debida al peso propio del motor es

$$v_{est} = mgl^3/(3EJ) = 0{,}644 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

La tensión estática es $\sigma_{est} = mgl/W = 26{,}37$ MPa. La flecha máxima durante las oscilaciones es $v_{máx} = v_{est} + A = v_{est}(1 + A/v_{est})$. El coeficiente dinámico es $K_{din} = 1 + A/v_{est} = 1{,}5$. La tensión dinámica es $\sigma_{din} = K_{din}\sigma_{est} = 39{,}6$ MPa.

9.43. La fuerza X que actúa sobre la masa m a partir de la viga se determina de la condición de que $f = v - v_A/2 = X/c$, de donde $X = cv - c\frac{a}{2}\operatorname{sen}\omega_{per}t$. La ecuación de movimiento de la masa es $m\ddot{v} + X = 0$ ó

$\ddot{v} + \omega^2 v = \frac{a\omega^2}{2} \operatorname{sen} \omega_{per} t$, donde $\omega^2 = c/m = 48EJ/(ml^3)$. La solución de la ecuación diferencial tiene la forma: $v = C_1 \operatorname{sen} \omega_{per} t$. Obtenemos $v = \frac{a \operatorname{sen} \omega_{per} t}{2[1 - (\omega_{per}/\omega)^2]}$. La flecha de la viga es $f = v - \frac{1}{2} v_A = \frac{a \operatorname{sen} \omega_{per} t}{2[(\omega/\omega_{per})^2 - 1]}$.

9.44. La frecuencia propia es

$$\omega = \sqrt{48EJ/(ml^3)} = 35{,}07 \text{ 1/s}.$$

La flecha dinámica de la viga (véase la solución del problema anterior) es

$$f = \frac{0{,}5a}{(\omega/\omega_{per})^2 - 1} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

La tensión dinámica es $\sigma_{din} = M/W = 12EJf/(Wl^3) = 118{,}7$ MPa. La tensión estática es $\sigma_{est} = mgl/(4W) = 94{,}7$ MPa. La tensión máxima es $\sigma_{máx} = \sigma_{est} + \sigma_{din} = 213{,}4$ MPa.

9.45. La ecuación de movimiento de la masa es

$$m\ddot{x} + c(x - x_{din}) = 0 \text{ ó } \ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 r \operatorname{sen} \omega_{per} t.$$

La solución tiene la forma: $x = A \operatorname{sen} \omega_{per} t$. Obtenemos

$$x = \frac{r \operatorname{sen} \omega_{per} t}{1 - (\omega_{per}/\omega)^2}.$$

El alargamiento del resorte es

$$\lambda = \lambda_{est} + (x - r \operatorname{sen} \omega_{per} t) \text{ o bien } \lambda = \lambda_{est} + \frac{r \operatorname{sen} \omega_{per} t}{(\omega/\omega_{per})^2 - 1}.$$

9.46. La amplitud de oscilaciones es

$$A = \frac{v_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{per}^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2}{\omega^2} \frac{\omega_{per}^2}{\omega^2}}}, \qquad (1)$$

donde v_0 es la flecha debida a una fuerza igual a la amplitud de la carga perturbadora. Calculamos

$$v_0 = \frac{p_1 l^3}{48 \cdot E \cdot 2J} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 2{,}5^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 491 \cdot 10^{-8}} = 1{,}66 \cdot 10^{-3} \text{ m},$$

$$2n = \alpha/m = 26 \cdot 10^3/1000 = 26 \text{ 1/s}.$$

La masa reducida del sistema es $m_{red} = m + 2\,(17/35)\,m_0 l = 1530$ kg (aquí m_0 es la masa lineal de la viga). La frecuencia es

$$\omega = \sqrt{\frac{48E \cdot 2J}{m_{red} l^3}} = 62{,}8 \text{ 1/s}.$$

Mediante la fórmula (1) hallamos ahora $A = 3{,}35 \cdot 10^{-3}$ m. La flecha estática es

$$v_{est} = mgl^3/(48E \cdot 2J) = 2{,}44 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

La tensión estática es

$$\sigma_{est} = mgl/(4 \cdot 2W) = 65{,}5 \text{ MPa}.$$

La tensión dinámica es

$$\sigma_{din} = \sigma_{est}\,(1 + A/v_{est}) = 168{,}9 \text{ MPa}.$$

9.47. La masa reducida del sistema es $m_{red} = m + 2\,(17/35)\,m_0 l = 622{,}4$ kg (aquí m_0 es la masa lineal de la viga).

La frecuencia es $\omega = \sqrt{48E2J/(m_{red}l^3)} = 51{,}20$ 1/s (J es el momento de inercia de la sección de la viga). Considerando que $\omega_{per} = \omega$, hallamos la frecuencia de rotación durante la resonancia

$$n_{rot} = 30\omega/\pi = 489 \text{ r.p.m.}$$

La amplitud es $A = v_0/(2n/\omega)$, donde v_0 es la flecha debida a una fuerza igual a la amplitud de la carga perturbadora. Calculamos $v_0 = m_1\omega^2 el^3/(48E \cdot 2J) = 0{,}643 \cdot 10^{-3}$ m, $2n = \alpha/m = 5$ 1/s, $A = v_0\omega/(2n) = 6{,}59 \cdot 10^{-3}$ m. La flecha estática es $v_{est} = mgl^3/(48E \cdot 2J) = 3 \cdot 10^{-3}$ m. La tensión estática es $\sigma_{est} = mgl/(4 \cdot 2W) = 20$ MPa. La tensión dinámica es $\sigma_{din} = \sigma_{est}(1 + A/v_{est}) = 63{,}93$ MPa.

9.48. La ecuación de movimiento del sistema es $\ddot{v} + \omega^2 v = a \operatorname{sen} \omega_{per} t$, donde $a = P_1/m$. La solución general de la ecuación es

$$v = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{a}{\omega^2 - \omega_{per}^2} \operatorname{sen} \omega_{per} t.$$

Según los datos iniciales $v = 0$ y $\dot{v} = 0$, cuando $t = 0$ hallamos

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{\omega_{per}}{\omega} \frac{a}{\omega^2 - \omega_{per}^2},$$

$$v = \frac{a}{\omega^2 - \omega_{per}^2} \left(\operatorname{sen} \omega_{per} t - \frac{\omega_{per}}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \right).$$

Calculamos $\omega_{per} = \pi n/30 = 62{,}83$ 1/s; $\omega = \sqrt{48E \cdot 2J/(ml^3)} = 67{,}33$ 1/s.

La amplitud máxima es $A = \dfrac{P_1(1 + \omega_{per}/\omega)}{m(\omega^2 - \omega_{per}^2)} = 10{,}47 \cdot 10^{-3}$ m. La flecha estática es $v_{est} = mgl^3/(48E \cdot 2J) = 2{,}164 \cdot 10^{-3}$ m. La tensión estática es $\sigma_{est} = mgl/(4 \cdot 2W) = 15{,}86$ MPa. La tensión dinámica es $\sigma_{din} = \sigma_{est}(1 + A/v_{est}) = 93{,}3$ MPa. Durante el régimen estable la amplitud $A_1 = P_1/[m(\omega^2 - \omega_{per}^2)] = 5{,}47 \cdot 10^{-3}$ m. La tensión dinámica es $\sigma_{din} = \sigma_{est}(1 + A_1/v_{est}) = 55{,}95$ MPa.

9.49. La rigidez es

$$c = \frac{GJ_{p1}}{a} + \frac{GJ_{p2}}{a} = \frac{G\pi}{32a}(d_1^4 + d_2^4) = 236 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

La frecuencia es $\omega = \sqrt{c/J_m} = 7{,}68$ 1/s. El ángulo de giro del volante debido a la acción de un momento igual a la amplitud del momento perturbador es

$$\varphi_0 = M_1/c = 0{,}847 \text{ rad}, \quad 2n = \alpha/J_m = 1{,}5 \text{ 1/s}.$$

La amplitud es

$$A = \frac{\varphi_0}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega_{per}^2}{\omega^2}\right)^2 + \dfrac{4n^2}{\omega^2} \cdot \dfrac{\omega_{per}^2}{\omega^2}}} = 0{,}146 \text{ rad}.$$

El momento correspondiente es $M_{din} = c \cdot A = 34{,}46$ N·m;

$$\tau_1 = \frac{16M_{din}}{\pi d_1^3(1 + d_2^4/d_1^4)} = 69{,}4 \text{ MPa},$$

$$\tau_2 = \frac{16M_{din}(d_2^4/d_1^4)}{\pi d_2^3(1 + d_2^4/d_1^4)} = 58{,}5 \text{ MPa}.$$

9.50. Las ecuaciones de movimiento del sistema son

$$-m\ddot{x}_1 - cx_1 + c(x_2 - x_1) = 0, \quad -m\ddot{x}_2 - c(x_2 - x_1) = 0,$$

donde x_1 es el desplazamiento de la masa superior, x_2, el desplazamiento de la masa inferior, c, la rigidez del resorte.

La solución del sistema se halla en forma: $x_1 = A_1 \cos \omega t$, $x_2 = A_2 \cos \omega t$. Después de efectuar la sustitución obtenemos

$$(2c - m\omega^2) A_1 - cA_2 = 0, \quad -cA_1 + (c - m\omega^2) A_2 = 0.$$

Al igualar a cero el determinante de este sistema de ecuaciones obtenemos la ecuación de frecuencias $m^2\omega^4 - 3cm\omega^2 + c^2 = 0$. Las raíces de esta ecuación son: $\omega_1 = 0{,}618 \sqrt{c/m}$, $\omega_2 = 1{,}618 \sqrt{c/m}$. Calculamos la rigidez del resorte $c = Gd^4/(8D^3n) = 20{,}25 \cdot 10^3$ N/m. Las frecuencias son: $\omega_1 = 19{,}66$ 1/s, $\omega_2 = 51{,}48$ 1/s. La relación de las amplitudes es $A_1/A_2 = (c - m\omega^2)/c = 1 - m\omega^2/c$. Para la primera frecuencia $A_1/A_2 = 0{,}618$; para la segunda, $A_1/A_2 = -1{,}618$.

9.51. Las ecuaciones de movimiento son:

$$-\delta_{11}m_1\ddot{x}_1 - \delta_{12}m_2\ddot{x}_2 = x_1, \quad -\delta_{21}m_1\ddot{x}_1 - \delta_{22}m_2\ddot{x}_2 = x_2.$$

La solución del sistema se halla en la forma: $x_1 = A_1 \cos \omega t$, $x_2 = A_2 \cos \omega t$. Después de efectuar la sustitución obtenemos

$$(\delta_{11}m_1\omega^2 - 1) A_1 + \delta_{12}m_2\omega^2 A_2 = 0,$$
$$\delta_{21}m_1\omega^2 A_1 + (\delta_{22}m_2\omega^2 - 1) A_2 = 0.$$

Al igualar a cero el determinante de este sistema, obtenemos la ecuación de frecuencias $(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) m_1m_2\omega^4 - (\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2) \omega^2 + 1 = 0$. En nuestro caso $m_1 = m_2 = m$, $\delta_{11} = \delta_{22} = 4l^3/(243EJ)$, $\delta_{12} = \delta_{21} = 7l^3/(486EJ)$. La ecuación de frecuencias obtiene la forma $15z^2 - 16z + 1 = 0$, donde $z = m\omega^2l^3/(486EJ)$. La solución de esta ecuación es $z_1 = 1/15$, $z_2 = 1$. Las frecuencias son: $\omega_1 = \sqrt{486EJz_1/(ml^3)} = 73{,}7$ 1/s, $\omega_2 = \sqrt{486EJz_2/(ml^3)} = 285$ 1/s.

9.52. Las ecuaciones de movimiento del sistema son:

$$-\delta_{\varphi\varphi}J_m\ddot{\varphi} - \delta_{\varphi x}m\ddot{x} = \varphi, \quad -\delta_{x\varphi}J_m\ddot{\varphi} - \delta_{xx}m\ddot{x} = x.$$

La ecuación de frecuencias correspondiente es

$$(\delta_{\varphi\varphi}\delta_{xx} - \delta^2_{\varphi x}) mJ_m\omega^4 - (\delta_{\varphi\varphi}J_m + \delta_{xx}m) \omega^2 + 1 = 0.$$

Teniendo en cuenta que $J_m = mD^2/8$ e introduciendo la designación $z = m\omega^2l^2/(EJ)$, obtenemos

$$0{,}00135z^2 - 0{,}2z + 1 = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son: $z_1 = 5{,}18$, $z_2 = 142{,}9$. Las frecuencias son: $\omega_1 = \sqrt{EJz_1/(ml^3)} = 26{,}3$ 1/s, $\omega_2 = \sqrt{EJz_2/(ml^3)} = 138$ 1/s.

9.53. Las ecuaciones de movimiento son:

$$-\delta_{\varphi\varphi}J_m\ddot{\varphi} - \delta_{\varphi x}m\ddot{x} = \varphi, \quad -\delta_{x\varphi}J_m\ddot{\varphi} - \delta_{xx}m\ddot{x} = x.$$

La solución se halla en la forma $\varphi = A_1 \cos \omega t$, $x = A_2 \cos \omega t$. Después de efectuar la sustitución obtenemos

$$(\delta_{\varphi\varphi}J_m\omega^2 - 1) A_1 + \delta_{\varphi x}m\omega^2 A_2 = 0,$$
$$\delta_{x\varphi}J_m\omega^2 A_1 + (\delta_{xx}m\omega^2 - 1) A_2 = 0.$$

La ecuación de frecuencias es

$$(\delta_{\varphi\varphi}\delta_{xx} - \delta^2_{\varphi x}) mJ_m\omega^4 - (\delta_{\varphi\varphi}J_m + \delta_{xx}m) \omega^2 + 1 = 0.$$

En este caso $\delta_{\varphi\varphi} = l/(3EJ)$, $\delta_{\varphi x} = \delta_{x\varphi} = l^2/(3EJ)$, $\delta_{xx} = 2l^3/(3EJ)$, donde $J = \pi d^4/64$ es el momento de inercia de la sección de la estructura.

Al aceptar la designación $m\omega^2 l^3/(3EJ) = z$ la ecuación de frecuencias se representará en la forma

$$\frac{J_m}{m} z^3 - l\left(2 + \frac{J_m}{ml^2}\right) z + 1 = 0$$

o bien

$0{,}02z^3 - 2{,}02z + 1 = 0$. Las raíces de esta ecuación son: $z_1 = 0{,}4975$; $z_2 = 100$. Las frecuencias son: $\omega_i = \sqrt{3EJz_i/(ml^3)}$. La primera frecuencia es $\omega_1 = 5{,}41$ 1/s. La segunda frecuencia es $\omega_2 = 76{,}75$ 1/s. La relación de amplitudes es

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1 - \delta_{\varphi\varphi} J_m \omega^2}{\delta_{\varphi x} m\omega^2} = \frac{1 - lJ_m\omega^2/(3EJ)}{l^3 m\omega^2/(3EJ)} = \frac{1}{z} - \frac{J_m}{lm}.$$

Para la primera frecuencia $A_2/A_1 = 2$ m/rad. Para la segunda frecuencia $A_2/A_1 = -0{,}01$ m/rad.

9.54. La ecuación de frecuencias es: $(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) J_1 J_2 \omega^4 - (\delta_{11} J_1 + \delta_{22} J_2)\omega^2 + 1 = 0$, donde $\delta_{11} = \delta_{22} = 3l/(16GJ_p)$, $\delta_{12} = l/(16GJ_p)$. Al aceptar la designación $\omega^2 l/(16GJ_p) = z$ llegamos a la ecuación

$$8J_1 J_2 z^2 - 3(J_1 + J_2) z + 1 = 0.$$

Los momentos de inercia de la masa de los discos son: $J_1 = m_1 D_1^2/8 = 0{,}1152$ kg·m², $J_2 = m_2 D_2^2/8 = 0{,}256$ kg·m². La ecuación de frecuencias tiene la forma $0{,}2359z^2 - 1{,}113z + 1 = 0$. Las raíces de esta ecuación son: $z_1 = 1{,}205$, $z_2 = 3{,}514$. Las frecuencias son: $\omega_i = \sqrt{16GJ_p z_i/l}$. La primera frecuencia es $\omega_1 = \sqrt{16 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot \pi 2{,}5^4 \cdot 10^{-8} \cdot 1.205/(1{,}2 \cdot 32)} = 223$ 1/s. La segunda frecuencia es $\omega_2 = 379$ 1/s.

9.55. Las ecuaciones de movimiento del sistema son:

$$-J_1\ddot{\varphi}_1 + c_1(\varphi_2 - \varphi_1) = 0,$$

$$-J_2\ddot{\varphi}_2 - c_1(\varphi_2 - \varphi_1) + c_2(\varphi_3 - \varphi_2) = 0,$$

$$-J_3\ddot{\varphi}_3 - c_2(\varphi_3 - \varphi_2) = 0.$$

La solución se halla en la forma $\varphi_i = A_i \cos \omega t$. Después de efectuar la sustitución obtenemos

$$(J_1\omega^2 - c_1) A_1 + c_1 A_2 = 0,$$

$$c_1 A_1 + (J_2\omega^2 - c_1 - c_2) A_2 + c_2 A_3 = 0,$$

$$c_2 A_2 + (J_3\omega^2 - c_2) A_3 = 0.$$

Igualando a cero el determinante del sistema, obtenemos la ecuación de frecuencias

$$\omega^6 - \left(\frac{c_1 + c_2}{J_3} + \frac{c_1}{J_1} + \frac{c_2}{J_3}\right)\omega^4 + c_1 c_2 \frac{J_1 + J_2 + J_3}{J_1 J_2 J_3}\omega^2 = 0.$$

Una de las frecuencias es igual a cero. Las frecuencias que no equivalen a cero se hallan mediante la ecuación $\omega^4 - 3500\omega^2 + 2 \cdot 10^6 = 0$: $\omega_1 = 26{,}8$ 1/s, $\omega_2 = 52{,}74$ 1/s. La relación de las amplitudes es

$$A_1 : A_2 : A_3 = \frac{c_1}{c_1 - J_1\omega^2} : 1 : \frac{c_2}{c_2 - J_3\omega^2}.$$

Para la primera frecuencia $A_1 : A_2 : A_3 = (-2{,}283) : 1 : 1{,}561$. Para la segunda frecuencia $A_1 : A_2 : A_3 = 0{,}219 : 1 : (-2{,}561)$.

9.56. Las ecuaciones de movimiento son:

$$-\delta_{11}m\ddot{x}_1-\delta_{12}m\ddot{x}_2+\delta_{11}P\cos\omega_{per}t=x_1;$$

$$-\delta_{21}m\ddot{x}_1-\delta_{22}m\ddot{x}_2+\delta_{21}P\cos\omega_{per}t=x_2.$$

La solución se halla en la forma $x_i=A_i\cos\omega_{per}t$. Después de efectuar la sustitución obtenemos

$$(1-\delta_{11}m\omega^2)A_1-\delta_{12}m\omega^2A_2=\delta_{11}P,$$
$$-\delta_{21}m\omega^2A_1+(1-\delta_{22}m\omega^2)A_2=\delta_{21}P.$$

De aquí hallamos las amplitudes

$$A_1=\frac{\delta_{11}-m\omega_{per}^2(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}^2)}{(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}^2)m^2\omega_{per}^4-(\delta_{11}+\delta_{22})m\omega_{per}^2+1}P,$$

$$A_2=\frac{\delta_{12}}{(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}^2)m^2\omega_{per}^4-(\delta_{11}+\delta_{22})m\omega_{per}^2+1}P.$$

Calculamos $\delta_{11}=\delta_{22}=3a^3/(4E\cdot 2J)=0{,}4335\cdot10^{-6}$ m, $\delta_{12}=\delta_{21}=7a^3/(12E\cdot 2J)=0{,}3371\cdot10^{-6}$ m, $\omega_{per}=n\pi/30=50{,}27$ 1/s, $A_1=14{,}76\cdot10^{-3}$ m, $A_2=14{,}66\cdot10^{-3}$ m. Las cargas dinámicas correspondientes P_{din1} y P_{din2} se determinan por medio del sistema de ecuaciones

$$\delta_{11}P_{din1}+\delta_{12}P_{din2}=A_1;\quad \delta_{21}P_{din1}+\delta_{22}P_{din2}=A_2.$$

Puesto que los valores de A_1 y A_2 se distinguen poco, suponemos (para simplificar el cálculo) que $A_2=A_1=14{,}76\cdot10^{-3}$ m. Obtendremos

$$P_{din1}=P_{din2}=A_1/(\delta_{11}+\delta_{12})=19{,}15\text{ kN}.$$

Tomando en consideración la carga estática, hallamos

$$P_{máx}=P_{din1}+mg=24{,}05\text{ kN}$$

y la tensión máxima $\sigma_{máx}=M/(2W)=P_{máx}a/(2W)=83{,}2$ MPa.

9.57. Las ecuaciones de movimiento del sistema son:

$$-\delta_{11}m_1\ddot{x}_1-\delta_{12}m_2\ddot{x}_2+\delta_{11}P\cos\omega_{per}t=x_1,$$

$$-\delta_{21}m_1\ddot{x}_1-\delta_{22}m_2\ddot{x}_2+\delta_{21}P\cos\omega_{per}t=x_2.$$

La solución se halla en la forma $x_i=A_i\cos\omega_{per}t$. Después de efectuar la sustitución resolvemos el sistema. Determinamos la amplitud A:

$$A_1=P\,\frac{\delta_{11}(1-\delta_{22}m_2\omega_{per}^2)+\delta_{12}^2m_2\omega_{per}^2}{(1-\delta_{11}m_1\omega_{per}^2)(1-\delta_{22}m_2\omega_{per}^2)-\delta_{12}^2m_1m_2\omega^4}.$$

La condición de amortiguación de las oscilaciones $A_1=0$ da:

$$\delta_{11}(1-\delta_{22}m_2\omega_{per}^2)+\delta_{12}^2m_2\omega_{per}^2=0.$$

De aquí determinamos la masa del amortiguador de oscilaciones $m_2=\delta_{11}/[(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}^2)\omega_{per}^2]$. En este caso $\delta_{11}=\delta_{22}=4l^3/(243EJ)$, $\delta_{12}=7l^3/(486EJ)$, $\omega_{per}=n\pi/30=62{,}83$ 1/s. Tenemos $m_2=259{,}2EJ/(l^3\omega_{per}^2)=16{,}8$ kg.

9.59. La flecha estática es $\Delta_{est}=mgl^3/(48EJ)=0{,}0293\cdot10^{-6}$ m. El coeficiente dinámico es $K_{din}=1+\sqrt{1+2h/\Delta_{est}}=83{,}6$. La flecha dinámica es $\Delta_{din}=K_{din}\Delta_{est}=2{,}54\cdot10^{-3}$ m. La tensión dinámica es $\sigma_{din}=K_{din}\sigma_{est}=K_{din}mgl/(4W)=161{,}4$ MPa.

9.60. El alargamiento estático es $\lambda_{est} = mgl/(EF) = 0{,}0156 \cdot 10^{-3}$ m. El coeficiente dinámico, sin tener en cuenta la masa de la barra, es

$$K_{din} = 1 + \sqrt{2h/\lambda_{est}} = 359.$$

El alargamiento dinámico es $\lambda_{din} = K_{din}\lambda_{est} = 5{,}60 \cdot 10^{-3}$ m. La tensión dinámica es $\sigma_{din} = K_{din}mg/F = 360$ MPa. El coeficiente dinámico, teniendo en cuenta la masa de la barra, es

$$K'_{din} = 1 + \sqrt{\frac{2h}{\lambda_{est}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{m_1}{m}\right)}},$$ donde $m_1 = \frac{\pi d^2 l \rho}{4} = 2{,}47$ kg es la masa de la barra. Obtenemos $K'_{din} = 356$, $\lambda_{din} = K'_{din}\lambda_{est} = 5{,}55 \cdot 10^{-3}$ m, $\sigma_{din} = K'_{din}mg/F = 356$ MPa.

9.63. Después del choque la velocidad del movimiento del sistema es $v_1 = mv/(m + m_1)$. La energía cinética del sistema es $T = (m + m_1)v_1^2/2 = m^2v^2/[2(m + m_1)]$. La energía potencial de la deformación del resorte es $U = P\lambda/2 = 4P^2D^3n/(Gd^4)$. Expresamos P por la tensión: $P = \pi d^2\tau/(8D)$. Obtenemos $U = \pi^2d^2Dn\tau^2/(16G)$. Puesto que $T = U$ hallamos

$$\tau = \frac{mv}{\pi d}\sqrt{\frac{8}{(m + m_1)Dn}} = 327 \text{ MPa}.$$

9.64. Expresamos la energía potencial de la deformación del resorte por la tensión τ:

$$U = P\lambda/2 = \pi^2d^2Dn\tau^2/(16G).$$

Puesto que $U = T = mv^2/2$ hallamos

$$n = \frac{8mv^2G}{\pi^2d^2D\tau^2} = 15.$$

9.66. La tensión varía a lo largo de la barra de acuerdo con la ley lineal $\sigma = \sigma_{din}x/l$. La energía potencial de la deformación es

$$U = \int_0^l \frac{\sigma^2}{2E} F\,dx = \frac{\sigma_{din}^2 F}{2El^2}\int_0^l x^2\,dx = \frac{\sigma_{din}^2 Fl}{6E}.$$

La energía cinética es $T = mv^2/2 = Fl\rho v^2/2$. Puesto que $U = T$ hallamos $\sigma_{din} = v\sqrt{3E\rho} = 206$ MPa.

9.67. La energía cinética es $T = Fl\rho v^2/2$. La energía potencial de la deformación de la barra es $U_1 = \sigma_{din}^2 Fl_1/(6E)$ (véase la solución del problema 9.66). La energía potencial de la deformación del tope (suponiendo que las tensiones son iguales a σ_{din} en todas las secciones) es $U_2 = \sigma_{din}^2 Fl_2/2$. Puesto que $T = U_1 + U_2$ hallamos

$$\sigma_{din} = v\sqrt{\frac{3l_1E\rho}{l_1 + 3l_2}} = 156 \text{ MPa}.$$

9.68. El momento de inercia de la masa del disco es $J_m = mD^2/8 = 0{,}25$ kg·m^2. La velocidad angular es $\omega = \pi n/30 = 10\pi$ 1/s. Igualamos la energía cinética del disco a la energía potencial de la deformación del árbol: $J_m\omega^2/2 = M_{tor}^2 l/(2GJ_p)$. De aquí $M_{tor} = \omega\sqrt{J_mGJ_p}/l$. La tensión tangencial en árbol es

$$\tau_{din} = \frac{M_{tor}}{W_p} = \frac{\omega}{d}\sqrt{\frac{8J_mG}{\pi l}} = 1130 \text{ MPa}.$$

9.69. Puesto que $U = T$, $c\Delta_{din}^2/2 = mv^2/2$, de donde $\Delta_{din} = v\sqrt{m/c}$. La flecha estática es $\Delta_{est} = mg/c$. El coeficiente dinámico es $K_{din} = \Delta_{din}/\Delta_{est} = (v/g)\sqrt{c/m}$, donde $c = \frac{3EJ_x}{l^3} = \frac{3E\pi d^4}{64l^3} = 0{,}6 \cdot 10^4$ N/m es la rigidez. Hallamos $K_{din} = 2{,}23$. La tensión estática es $\sigma_{est} = mgl/W = 200 \cdot 9{,}81 \cdot 3 \cdot 32/\pi 0{,}2^3 = 7{,}49$ MPa. La tensión dinámica es $\sigma_{din} = K_{din}\sigma_{est} = 16{,}6$ MPa.

9.70. La energía cinética de la viga cayente es $T = mv^2/2 = m_0 2l \cdot 2gh/2 = 2m_0 lgh$. La energía potencial de la flexión de la viga cargada con una carga uniformemente distribuida de intensidad q_{din} es

$$U = 2\int_0^l \frac{M^2}{2EJ}\,dx = \frac{1}{EJ}\int_0^l \left(\frac{q_{din}x^2}{2}\right)^2 dx = \frac{q_{din}^2 l^5}{20EJ}.$$

De la condición $T = U$ hallamos q_{din} y luego determinamos el momento flector máximo $M_{máx} = q_{din}l^2/2 = \sqrt{10EJm_0gh}$.

9.71. La ecuación que describe las oscilaciones del anillo tiene la forma

$$\frac{d^2w_k}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{dw_k}{dt} + \Omega_k^2(1 - 2\mu_k\cos\omega t)w_k = 0,$$

donde

$$\Omega_k^2 = \omega_k^2\left(1 - \frac{q_0}{q_{*k}}\right), \quad \mu_k = \frac{1}{2}\frac{q_t}{q_{*k} - q_0};$$

con ω_k sobreentiende la frecuencia de oscilaciones propia cuando $k \geqslant 2$; por q_{*k}, el k-ésimo valor crítico de la carga; con μ_k, el coeficiente de excitación; con q_0 y $q_t\cos\omega t$, las partes constante y variable de la carga.

La resonancia paramétrica de i-ésimo orden tendrá lugar si la frecuencia de excitación se aproxima a $\omega_* = 2\Omega_k/i$ y el coeficiente de excitación supera el valor crítico $\mu_{*i} = \sqrt{\delta}$, donde $\delta = 2\varepsilon/(\omega_k\sqrt{1 - q_0/q_{*k}})$ es el coeficiente de amortiguación de oscilaciones propias, tomando en consideración la componente constante de la carga q_0.

Considerando que $q_0 \ll q_{*k}$, obtenemos la expresión de la carga $q_{*i} = 2\sigma EJ(k^2 - 1)/R$ y del coeficiente de magnetoestricción

$$\lambda_{0*k} = 2\delta\frac{J}{FR^2}(k^2 - 1).$$

Sustituyendo en esta fórmula los valores de las dimensiones y $k = 2$, obtenemos (b es la anchura de la sección)

$$\lambda_{0*2} = 9 \cdot 10^{-8} > 7{,}5 \cdot 10^{-5}.$$

Por consiguiente, las oscilaciones paramétricas no aparecerán.

La frecuencia propia inferior (cuando $k = 2$) es

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{7{,}2}\sqrt{\frac{J}{F}\frac{1}{R^2}} = 900 \text{ Hz}.$$

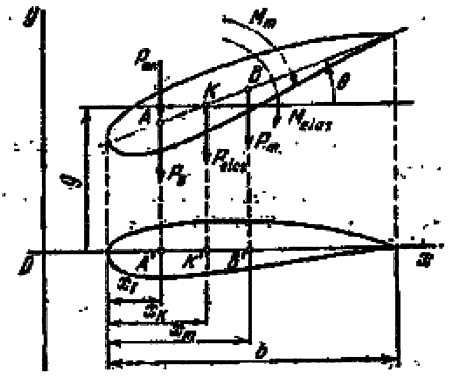
La frecuencia de excitación es $f_* = 2 \cdot 900/i$ Hz; hallamos $f_* = 1800$ Hz cuando tiene lugar la resonancia paramétrica principal ($i = 1$).

9.72. Durante un flameo de flexión y torsión surgen fuerzas variables adicionales aerodinámicas elásticas y de inercia que provocan oscilaciones de la construcción. La fuente de la energía de oscilaciones es la energía de la corriente de aire que el ala encuentra. Cuando la velocidad del vuelo se acerca a su valor crítico la amplitud de oscilaciones crece, lo cual puede llevar a cabo la destrucción del ala.

En la figura están representadas las fuerzas adicionales que se producen durante el movimiento del ala hacia arriba (flexión) y el giro simultáneo, a cierto ángulo, de la sección en el sentido de las agujas del reloj (torsión).

La flexión del ala y el desplazamiento de traslación vertical unido a ésta disminuyen el ángulo de incidencia y provocan la aparición de una fuerza aerodinámica adicional P_y aplicada en el foco del ala A y dirigida en dirección opuesta a la del movimiento del ala durante las oscilaciones:

$$P_y = \frac{dc_y}{da} \dot{y} \frac{\rho v_{\text{ala}}^2}{2} S.$$



Para el problema 9.72

La torsión conduce a la aparición de una fuerza P_θ aplicada también en el foco. Si θ es positivo (el representado en la figura), el ángulo de incidencia del ala disminuye, la fuerza sustentadora disminuye, la fuerza adicional estará dirigida hacia abajo

$$P_\theta = \frac{dc_y}{da} \dot{y}\theta \frac{\rho v_{\text{ala}}^2}{2} S.$$

Además en el centro de flexión del ala K estará aplicada la resultante de las fuerzas elásticas surgidas durante la flexión

$$P_{\text{elas}} = c_f y,$$

donde c_f es la rigidez en flexión del ala.

El momento torsor adicional de las fuerzas elásticas que resisten a la torsión del ala es $M_{\text{elas}} = c_{\text{tor}}\theta/l$. El momento torsor está dirigido al encuentro del ángulo θ.

La fuerza de inercia aplicada al centro de masas B es igual a

$$P_m = m\{\ddot{y} - \ddot{\theta}(x_m - x_k)\}.$$

Esta fuerza crea un momento respecto al centro de flexión K

$$M_m = m[\ddot{y}(x_m - x_K) - \ddot{\theta}(x_m - x_K)^2].$$

Las direcciones de las fuerzas correspondientes a los valores positivos de y, $\dot{y}$ y θ están representadas en la figura.

Componemos la ecuación de equilibrio del ala, teniendo en cuenta las fuerzas de inercia. La suma de las proyecciones de las fuerzas sobre el eje y es

$$c_f y + m\ddot{y} - m\ddot{\theta}(x_m - x_K) + P_\theta + P_y = 0.$$

La suma de momentos respecto al centro de flexión K es

$$\frac{c_{\text{tor}}}{l}\theta + m(x_m - x_K)\ddot{y} - m\ddot{\theta}(x_m - x_K)^2 + (P_y + P_\theta)(x_K - x_f) = 0.$$

La solución de estas ecuaciones se halla en la forma

$$y = y_0 e^{i\omega t}, \quad \theta = \theta_0 e^{i\omega t}.$$

Después de efectuar la sustitución de estas expresiones en las ecuaciones obtendremos la frecuencia de oscilaciones y la velocidad crítica del flámeo

$$v_{\text{ala}} = \sqrt{\frac{2c_h}{(dc_y/d\alpha)(x_K - x_f)\rho Sl}}.$$

Utilizando los datos del problema, hallamos $v_{\text{ala}} = 241$ m/s. A este valor corresponde la velocidad en km/h escrita en la respuesta.

9.73. Escribimos la ecuación de Lagrange (como en la solución del problema 7.84), considerando que la fuerza estática P y su potencial V son iguales a cero:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial U}{\partial q} = 0.$$

aquí T es la energía cinética del sistema

$$T = \frac{\rho F a}{2} \int_0^1 \dot{v}^2 \, ds \tag{1}$$

y U, la energía potencial

$$U = \frac{EJ}{2a^3} \int_0^1 v''^2 \, ds.$$

Recordamos que el punto sobre la letra significa la diferenciación según el tiempo y la raya significa la diferenciación según la coordenada adimensional $s = x/a$, donde a es la longitud del elemento finito.

Haciendo uso de las dependencias y designaciones empleadas en la solución del problema 7.84 (donde están dados los cálculos detallados), hallamos

$$T_{1-2} = \frac{\rho F a}{2.630} \dot{q}^T M_{1-2} \dot{q}, \quad T_{2-3} = \frac{\rho F a}{2.630} \dot{q}^T M_{2-3} \dot{q}.$$

Es fácil ver que las matrices de las masas M_{1-2} y M_{2-3} coincidirán con las matrices de los elementos de frontera del problema 7.84:

$$M_{1-2} = \begin{bmatrix} 234 & -33 \\ -33 & 6 \end{bmatrix}, \quad M_{2-3} = \begin{bmatrix} 234 & 33 \\ 33 & 6 \end{bmatrix}.$$

La energía cinética del sistema completo es

$$T = T_{1-2} + T_{2-3} = \frac{\rho F a}{2.630} \dot{q}^T (M_{1-2} + M_{2-3}) \dot{q} = \frac{\rho F a}{1260} \dot{q}^T M \dot{q},$$

donde M es la matriz global de las masas de toda la barra. Esta se obtiene sumando los elementos correspondientes de las matrices M_{1-2} y M_{2-3}:

$$M = \begin{bmatrix} 468 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

La energía potencial de la barra (véase el problema 7.73) es

$$U=\frac{EJ}{2a^3}\,q^{\mathrm{T}}Kq,$$

donde

$$K=\begin{bmatrix}24 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}.$$

Sustituyendo T y U en la ecuación (1), obtenemos

$$\frac{\rho Fa}{630}M\ddot{q}+\frac{EJ}{a^3}Kq=0. \tag{2}$$

La solución de la ecuación (2) se hallará en la forma

$$q_i=A_i\cos\omega t, \tag{3}$$

donde A_i es la amplitud de oscilaciones, ω es la frecuencia propia.

La sustitución de (3) en la ecuación (2) nos da

$$-\frac{\rho Fa}{630}M\omega^2+\frac{EJ}{a^3}K=0.$$

Teniendo en cuenta que $a=l/2$, escribimos esta ecuación en la forma

$$\begin{bmatrix}24-\frac{13}{280}\lambda_1^4 & 0\\ 0 & 8-\frac{1}{840}\lambda_2^4\end{bmatrix}=0.$$

Abriendo el determinante, obtenemos

$$\left(24-\frac{13}{280}\lambda_1^4\right)\left(8-\frac{1}{840}\lambda_2^4\right)=0,$$

de donde $\lambda_1=4{,}768$ y $\lambda_2=9{,}054$. La comparación con la solución exacta se da en la respuesta.

9.74. En el caso que se examina

$$v\,(s=0)=0,\quad M\,(s=0)=0 \text{ o bien } \partial^2v/\partial s^2=0.$$

Del mismo modo que en la solución del problema 7.74 hallamos para el elemento 1—2

$$v_{1-2}=\vartheta_{12}^0q_3+\vartheta_{22}^0q_4,$$

para el elemento 2—3

$$v_{2-3}=\vartheta_{11}^0q_3+\vartheta_{21}^0q_4.$$

Determinamos la energía cinética de la viga

$$T=T_{1-2}+T_{2-3}=\frac{\rho Fa}{2}\int_0^1\left[(\vartheta_{12}^0\dot{q}_3+\vartheta_{22}^0\dot{q}_4)^2+(\vartheta_{11}^0\dot{q}_3+\vartheta_{21}^0\dot{q}_4)^2\right]ds=$$

$$=\frac{\rho Fa}{2\cdot630}\left(306\dot{q}_3^2+2\cdot54\dot{q}_3\dot{q}_4+12\dot{q}_4^2\right)+\left(306\dot{q}_3^2+2\cdot54\dot{q}_3\dot{q}_4+12\dot{q}_4^2\right)].$$

En la forma matricial será

$$T=\frac{\rho Fa}{2\cdot630}\dot{q}^{\mathrm{T}}(M_{1-2}+M_{2-3})\,\dot{q}=\frac{\rho Fa}{1260}\,q^{\mathrm{T}}M\dot{q}.$$

Aquí por M_{1-2} y M_{2-3} se designan las matrices de las masas de los elementos 1—2 y 2—3; por M, la matriz de las masas de toda la barra:

$$M_{1-2}=\begin{bmatrix} 306 & -54 \\ -54 & 12 \end{bmatrix}, \quad M_{2-3}=\begin{bmatrix} 306 & 54 \\ 54 & 12 \end{bmatrix}, \quad M=\begin{bmatrix} 612 & 0 \\ 0 & 24 \end{bmatrix}.$$

La energía potencial de la barra (véase la solución del problema 7.73) es:

$$U=\frac{EJ}{2a^3}\,q^{\mathrm{T}}Kq.$$

Aquí

$$K=\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)+\frac{\partial U}{\partial q}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho Fa}{630}\,M\dot{q}\right)+\frac{EJ}{a^3}\,Kq=\frac{\rho Fa}{630}\,M\ddot{q}+\frac{EJ}{a^3}\,Kq=0.$$

Expresando la solución en la forma $q_i = A_i \cos \omega t$, tendremos

$$-\frac{\rho Fa}{630}\,M\omega^2+\frac{EJ}{a^3}\,K=0.$$

Teniendo en cuenta que $a = l/2$, llegamos a la ecuación

$$\begin{vmatrix} 6-\frac{51}{840}\lambda_1^4 & 0 \\ 0 & 12-\frac{1}{420}\lambda_2^4 \end{vmatrix}=0.$$

De aquí $\lambda_1 = 3{,}148$, $\lambda_2 = 7{,}078$. La comparación con la solución exacta se da en la respuesta.

9.75. Utilizamos la solución del problema 7.84, considerando que la carga estática $P = 0$. La ecuación de las oscilaciones propias de la barra tendrá la forma

$$\frac{\rho F\,(l/6)}{630}\,M\ddot{q}-\frac{EJ}{(l/6)^3}\,Kq=0. \qquad (1)$$

Elegimos la solución de la ecuación (1) en la forma $q_i = A_i \cos \omega t$. En este caso

$$M\lambda^4 - K_1 = 0, \qquad (2)$$

donde $\lambda^4 = (\lambda_1^4, \lambda_2^4, \ldots)$ es el vector de los coeficientes de frecuencias de las oscilaciones propias de la barra

$$\lambda_i^4=\omega_i^2\,\frac{\rho Fl^4}{EJ}, \quad K_1=Kd, \quad d=630\cdot 6^4.$$

La ecuación (2) puede ser reducida a la forma

$$\lambda^4 I = K_1 M^{-1},$$

donde I es una matriz unitaria.

De este modo el problema se ha reducido a hallar los valores propios de la matriz K_1M^{-1} que puede ser realizado en un ordenador de tipo EC con ayuda del subprograma NROOT. Los valores de las primeras cinco frecuencias $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$, obtenidos de este modo, están dados en la respuesta comparados con la solución exacta.

9.76. En comparación con el problema anterior varían solamente los elementos siguientes de la matriz de masas $M = [m_{ij}]$ y de la rigidez $K = [k_{i,j}]$, $1 \leqslant i \leqslant 10$, $1 \leqslant j \leqslant 10$:

$$m_{1,1} = m_{9,9} = 306 + 234 = 540, \quad m_{1,2} = m_{2,1} = -m_{9,10} =$$
$$= -m_{10,9} = -54 + 33 = -21,$$
$$m_{2,2} = m_{10,10} = 6 + 12 = 18,$$
$$k_{1,1} = k_{9,9} = 12 + 3 = 15, \quad k_{1,2} = k_{2,1} = -k_{2,10} = -k_{10,9} =$$
$$= 6 - 3 = 3,$$
$$k_{2,2} = k_{10,10} = 4 + 3 = 7.$$

Los valores de $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$ obtenidos del mismo modo que en el problema 9.75 se dan en la respuesta comparados con la solución exacta.

CAPÍTULO 10

RESISTENCIA A LA FATIGA Y FLUENCIA

10.1. De los gráficos expuestos en los datos del problema hallamos $K_\sigma = 4{,}8$ (*fig. b*) y $\varepsilon_\sigma = 0{,}7$ (*fig. a*). El coeficiente de asimetría es $R = 0$. La tensión admisible es

$$[\sigma_R] = \frac{2\sigma_{-1P}}{n\left[\dfrac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma}(1-R)+\psi_\sigma(1+R)\right]} = 43 \text{ MPa}.$$

10.2. Las tensiones en el perno son

$$\sigma_{máx} = 4N_{máx}/(\pi d_1^2) = 68 \text{ MPa}, \quad \sigma_{mín} = 4N_{mín}/(\pi d_1^2) = 22{,}7 \text{ MPa},$$
$$\sigma_a = (\sigma_{máx} - \sigma_{mín})/2 = 22{,}7 \text{ MPa}.$$

Por medio de los gráficos del problema 10.1 determinamos $K_\sigma = 3$ y $\varepsilon_\sigma = 0{,}83$. El factor de seguridad es

$$n = \frac{\sigma_{-1P}}{K_\sigma\sigma_a/\varepsilon_\sigma + \psi_\sigma\sigma_m} = \frac{140}{3\cdot 22{,}7/0{,}83} = 1{,}7.$$

10.3. Del gráfico en los datos del problema (*fig. b*) se halla $\varepsilon_\sigma = 0{,}88$. Para el pulido $\beta = 1$. El momento flector máximo es $M_{máx} = \frac{P}{2}(4{,}25 - 1{,}25)\cdot 10^{-2} = 0{,}015P$; $W = \frac{\pi d^3}{32}(1-\alpha^4) = 2{,}75 \text{ cm}^3$ (aquí $\alpha = d_1/d$, $\sigma_{máx} = \frac{0{,}015P_{máx}}{W} = 283{,}6$ MPa, $\sigma_{mín} = \frac{0{,}015P_{mín}}{W} = 162{,}7$ MPa, $\sigma_a = \frac{\sigma_{máx} - \sigma_{mín}}{2} = 173{,}2$ MPa, $\sigma_m = \frac{\sigma_{máx} + \sigma_{mín}}{2} = 110{,}4$ MPa. El factor de seguridad es

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a/\varepsilon_\sigma\beta + \psi_\sigma\sigma_m} = 2{,}1.$$

10.4. Las tensiones del ciclo son:

$$\tau_{máx} = \frac{8P_{máx}D}{\pi d^3} = 422 \text{ MPa},$$

$$\tau_{mín} = \frac{P_{mín}}{P_{máx}}\tau_{máx} = \frac{0{,}17}{0{,}28}\tau_{máx} = 256 \text{ MPa},$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{máx} - \tau_{mín}}{2} = 83 \text{ MPa}, \quad \tau_m = \frac{\tau_{máx} + \tau_{mín}}{2} = 339 \text{ MPa}.$$

El factor de seguridad es $n = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a + \psi_\tau\tau_m} = 4{,}28$.

10.5. Las tensiones del ciclo son:

$$\tau_{máx}=\frac{16M_{máx}}{\pi d^3}=163\ \text{MPa},\qquad \tau_{mín}=\frac{16M_{mín}}{\pi d^3}=49\ \text{MPa},$$

$$\tau_m=106\ \text{MPa},\qquad \tau_a=57\ \text{MPa}.$$

Mediante la tabla 11 (véase el anexo) y tomando en consideración que $\sigma_r = 800$ MPa, $h/r = 5$, $r/d = 0{,}02$ hallamos el coeficiente $K_\tau = 2{,}22$. En los gráficos de los problemas 10.3 y 10.5 hallamos $\varepsilon_\tau = 0{,}8$, $\beta = 0{,}85$. Calculamos el coeficiente $K_{\tau\Sigma}$:

$$K_{\tau\Sigma}=K_\tau/\varepsilon_\tau+1/\beta-1=2{,}95.$$

El factor de seguridad es

$$n=\frac{\tau_{-1}}{K_{\tau\Sigma}\tau_a+\psi_\tau\tau_m}=1{,}27.$$

10.6. Por la tabla 11 del anexo determinamos el coeficiente K_τ; $r/d = 0{,}033 \approx 0{,}03$, $h/r = 2{,}5$ (en la tabla no existe este valor). En la tabla de $\sigma_r = 700$ MPa hallamos que cuando $h/r = 2$ $K_\tau = 1{,}59$, cuando $h/r = 3$ $K_\tau = 1{,}72$. El coeficiente K_τ para $h/r = 2{,}5$ se halla por medio de la interpolación lineal: $K_\tau = 1{,}65$. Con ayuda de los gráficos de los problemas 10.3 y 10.4 hallamos $\varepsilon_\tau = \varepsilon_\sigma = 0{,}78$, $\beta = 0{,}9$ y luego

$$K_{\tau\Sigma}=K_\tau/\varepsilon_\tau+1/\beta-1=2{,}23$$

El coeficiente de asimetría del ciclo $R = \tau_{mín}/\tau_{máx} = M_{mín}/M_{máx} = 0{,}25$. La tensión admisible es

$$[\tau_R]=\frac{2\tau_{-1}}{n\,[K_{\tau\Sigma}(1-R)+\psi_\tau(1+R)]}=104\ \text{MPa}.$$

La tensión admisible según el límite de fluencia es $[\tau] = \tau_{fl}/n = 125$ MPa. El momento máximo admisible es

$$M_{máx}=[\tau_R]\,\pi d^3/16=4{,}411\ \text{kN}\cdot\text{m}.$$

El momento mínimo es $M_{mín} = 0{,}25M_{máx} = 1{,}1$ kN·m.

10.7. Las tensiones del ciclo son: $\sigma_a = 32M_{máx}/(\pi d^3) = 47{,}7$ MPa, $\sigma_m = 0$. El coeficiente de concentración K_σ se halla por la tabla 11 del anexo. Para $\sigma_r = 500$ MPa y $h/r = 2$, $r/d = 0{,}05$ tenemos $K_\sigma = 1{,}76$. Por los gráficos de los problemas 10.3 y 10.4 determinamos $\varepsilon_\sigma = 0{,}85$, $\beta = 0{,}9$;

$$K_{\sigma\Sigma}=K\sigma/\varepsilon_\sigma+1/\beta-1=2{,}18.$$

El factor de seguridad es $n = \sigma_{-1}/(K_{\sigma\Sigma}\sigma_a) = 1{,}92$.

10.8. Las tensiones del ciclo son: $\sigma_a = 32M/(\pi d^3) = 61{,}1$ MPa, $\sigma_m = 0$. Por medio de la tabla 12 del anexo, para el encajado a presión, cuando $\sigma_r = 800$ MPa y $d = 50$ mm hallamos el coeficiente de concentración $K_{\sigma D} = 3{,}96$. El factor de seguridad es $n = \sigma_{-1}/(K_{\sigma D}\,\sigma_a) = 1{,}49$.

10.9. Con ayuda de los gráficos de los problemas 10.3 y 10.4 hallamos $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\tau = 0{,}74$, $\beta = 0{,}85$. En la tabla 11 (véase el anexo) hallamos los coeficientes de concentración de las tensiones $K_\sigma = 1{,}95$, $K_\tau = 1{,}62$. Calculamos los coeficientes $K_{\sigma\Sigma}$ y $K_{\tau\Sigma}$:

$$K_{\sigma\Sigma}=K_\sigma/\varepsilon_\sigma+1/\beta-1=2{,}81,\qquad K_{\tau\Sigma}=K_\tau/\varepsilon_\tau+1/\beta-1=2{,}37.$$

Los factores de seguridad parciales son:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma\Sigma}\sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m} = \frac{360}{2{,}81 \cdot 80} = 1{,}60,$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau\Sigma}\tau_a + \psi_\tau \tau_m} = \frac{210}{2{,}37 \cdot 20 + 0{,}05 \cdot 50} = 4{,}21.$$

El factor de seguridad total es $n = \dfrac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = 1{,}5$

Para el *árbol pulido* $\beta = 1$, $K_{\sigma\Sigma} = 1{,}95 \cdot 0{,}74 = 2{,}64$, $K_{\tau\Sigma} = 1{,}62/0{,}74 = 2{,}19$, $n_\sigma = 306/2{,}64 \cdot 80 = 1{,}70$, $n_\tau = 4{,}54$, $n = 1{,}6$.

10.10. La potencia es $N = M_{tor}\omega = M_{tor}\pi n/30$. El momento torsor en el árbol es $M_{tor} = 30N/\pi n = 382$ N·m. La carga sobre un diente de la rueda dentada es

$$P = 2M_{tor}/D \cos 20° = 6773 \text{ N}.$$

Sección I. El momento flector $M_1 = Pz_1/2 = 6773 \cdot 45 \cdot 10^{-3}/2 = 152{,}4$ N·m. Las tensiones son: $\sigma_a = 32M_1/(\pi d_1^3) = 33{,}27$ MPa. $\sigma_m = 0$, $\tau_{máx} = 16\,M_{tor}/(\pi d_1^3) = 41{,}7$ MPa, $\tau_a = \tau_m = \tau_{máx}/2 = 20{,}85$ MPa. En la tabla 11 (véase el anexo) hallamos los coeficientes de concentración de las tensiones debidas a la arista hueca: $h/r = 2$, $r/d = 0{,}042$. Para $\sigma_r = 500$ MPa y $r/d = 0{,}03$ hallamos $K_\sigma = 1{,}82$. El coeficiente K_σ para $r/d = 0{,}042$ se halla mediante interpolación lineal $K_\sigma = 1{,}82 - 0{,}012 \cdot 0{,}06/0{,}02 = 1{,}78$. $K_\tau = 1{,}54$. Según los gráficos de los problemas 10.3 y 10.4 se determinan $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\tau = 0{,}87$, $\beta = 0{,}9$ y luego $K_{\sigma\Sigma} = K_\sigma/\varepsilon\sigma + 1/\beta - 1 = 2{,}16$, $K_{\tau\Sigma} = K_\tau/\varepsilon_\tau + 1/\beta - 1 = 1{,}88$. Los coeficientes de concentración debidos al ajuste de la rueda dentada se hallan en la tabla 12 del anexo: para $d = 30$ mm $K_{\sigma D} = 2{,}50$, para $d = 50$ mm $K_{\sigma D} = 3{,}05$.

El coeficiente para el árbol de diámetro $d = 36$ mm se calcula por medio de interpolación $K_{\sigma D} = 2{,}66$. $K_{\tau D} = 2{,}0$. Tomamos en consideración los coeficientes de concentración debidos al ajuste, puesto que éstos son mayores que los correspondientes coeficientes para la arista hueca.

Los factores de seguridad parciales son:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D}\sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m} = \frac{200}{2{,}66 \cdot 33{,}27 + 0} = 2{,}26,$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D}\tau_a + \psi_\tau \tau_m} = \frac{120}{2 \cdot 20{,}85 + 0} = 2{,}88.$$

El factor total de seguridad en la sección I es

$$n_1 = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = 1{,}78.$$

Sección II. El momento flector es

$$M_{II} = Pz_{II}/2 = 128{,}7 \text{ N·m}.$$

Las tensiones son:

$$\sigma_a = \frac{32M_{II}}{\pi d_{II}^3} = 33{,}4 \text{ MPa}, \quad \sigma_m = 0,$$

$$\tau_{máx} = \frac{16M_{tor}}{\pi d_{II}^3} = 49{,}5 \text{ MPa}, \quad \tau_a = \tau_m = \frac{1}{2}\tau_{máx} = 24{,}75 \text{ MPa}.$$

Mediante la tabla 11 se hallan los coeficientes de concentración de las tensiones $K_\sigma = 1{,}74$, $K_\tau = 1{,}53$, $K_{\sigma\Sigma} = 2{,}11$, $K_{\tau\Sigma} = 1{,}87$. Los factores parciales de seguridad son: $n_\sigma = 2{,}84$, $n_\tau = 2{,}59$. El factor total de seguridad en la sección II es $n_{II} = 1{,}91$. Determinamos análogamente el factor de seguridad en la sección III, $n_{III} = 1{,}71$.

10.11. La tensión media en el resorte (debida a la carga) es

$$\tau_m = 8mgD/\pi d^3 = 28{,}9 \text{ MPa}.$$

La amplitud de oscilaciones es $A = 8PD^3n/(Gd^4) = \pi D^3 n\tau_a/(Gd)$. De aquí determinamos la amplitud de las tensiones

$$\tau_a = GAd/(\pi D^3 n) = 152{,}8 \text{ MPa},$$

$$\psi_\tau = (2\tau_{-1} - \tau_0)/\tau_0 = 0{,}091.$$

Durante las oscilaciones la tensión media permanece constante, por eso el factor de seguridad es $n = (\tau_{-1} - \psi_\tau\tau_m)/\tau_a = 1{,}95$.

10.12. La rigidez del resorte es $c = Gd^4/(8D^3n) = 2500$ N/m. La frecuencia de oscilaciones propias del sistema es $\omega = \sqrt{c/m} = 35{,}4$ 1/s.

Para que tenga lugar la destrucción por fatiga las tensiones del ciclo deben satisfacer la condición $\tau_a + \psi_\tau\tau_m > \tau_{-1}$. La tensión media en el resorte es $\tau_m = 8mgD/(\pi d^3) = 125$ MPa. En este caso $\tau_a > \tau_{-1} - \psi_\tau\tau_m = 337{,}5$ MPa. La amplitud mínima del alargamiento del resorte (cuando $\tau_a = 337{,}5$ MPa) es

$$A = \pi D^3 n\tau_a/(Gd) = 2{,}12 \text{ cm}.$$

De acuerdo con la resolución del problema 9.45 la amplitud del resorte es

$$A = \frac{r}{(\omega/\omega_{forz})^2 - 1}.$$

De aquí hallamos la frecuencia (límite inferior)

$$\omega_{forz1} = \omega\sqrt{\frac{A}{A+r}} = 30.2 \text{ 1/s}.$$

La correspondiente frecuencia de rotación es

$$n_1 = 30\omega_{forz1}/\pi = 288 \text{ r.p.m.}$$

El límite superior ($\omega_{per} \geqslant \omega$) se halla según la condición

$$A = -\frac{r}{(\omega/\omega_{forz})^2 - 1},$$

de donde obtenemos

$$\omega_{forz2} = \omega\sqrt{A/(A-r)} = 44{,}8 \text{ 1/s}.$$

La correspondiente frecuencia de rotación es $n_2 = 428$ r.p.m.

10.13. Un deterioro de la pieza, acumulado como resultado de la acción de cargas unidas en un bloque (se toman en consideración solamente las tensiones que superan el límite de resistencia a la fatiga de la pieza) es:

$$\sigma_{bl} = \sum \frac{n_i}{N_i} = \frac{1}{N_0} \sum_{\sigma_{ai} > \sigma_{-1\Sigma}} n_i \left(\frac{\sigma_{ai}}{\sigma_{-1\Sigma}}\right)^m =$$

$$= \frac{10^3}{4 \cdot 10^6}\left[0{,}3\left(\frac{150}{95}\right)^6 + 0{,}8\left(\frac{140}{95}\right)^6 + 1{,}5\left(\frac{130}{95}\right)^6 + \right.$$

$$\left. + 3\left(\frac{120}{95}\right)^6 + 2\left(\frac{110}{95}\right)^6 + 2\left(\frac{100}{95}\right)^6\right] = 0{,}0106.$$

La magnitud de cálculo del coeficiente de deterioros es

$$a_{calc} = \left(\frac{\sigma_{a\,máx}}{\sigma_{-1\Sigma}}\xi - k\right) \Big/ \left(\frac{\sigma_{a\,máx}}{\sigma_{-1\Sigma}} - k\right).$$

Supongamos que $k = 0{,}6$. Durante la determinación del coeficiente ξ se tienen solamente en cuenta las tensiones que superan $\sigma_a = k\sigma_{-1\Sigma} = 57$ MPa y el número de ciclos que corresponden a estas tensiones es

$$N_{bl} = 16{,}6 \cdot 10^3;\ \xi = \frac{\sum \sigma_{ai} n_i}{\sigma_{a\,máx} N_{bl}} = \frac{1}{150 \cdot 16{,}6 \cdot 10^3}(150 \cdot 0{,}3 + 140 \cdot 0{,}8 +$$
$$+ 130 \cdot 1{,}5 + 120 \cdot 3 + 110 \cdot 2 + 100 \cdot 2 + 90 \cdot 2{,}5 + 80 \cdot 1{,}5 + 70 \cdot 3) = 0{,}678,$$
$$a_{calc} = \left(\frac{150}{95} \cdot 0{,}678 - 0{,}6\right) \Big/ \left(\frac{150}{95} - 0{,}6\right) = 0{,}48.$$

El número de bloques λ, necesario para la destrucción de la pieza, se determina de la condición $\lambda a_{bl} = a_{calc}$. De aquí $\lambda = 45$. El número de ciclos en un bloque es $n_{bl} = \sum n_i = 19 \cdot 10^3$.

El número total de ciclos hasta la destrucción de la pieza es $N = n_{bl}\lambda = 0{,}855 \cdot 10^6$.

10.14. El número de ciclos en un bloque es $n_{bl} = 19 \cdot 10^3$. La pieza debe trabajar $N = 3 \cdot 10^5$ ciclos. Por consiguiente, el número de bloques es

$$\lambda = N/n_{bl} = 16.$$

Si la tensión actuante aumenta n veces, al repetir este número de bloques, la pieza deberá destruirse, es decir, el grado de destrucción debe llegar a la magnitud de cálculo $a_{calc} = 0{,}48$:

$$\lambda \sum \frac{n_i}{N_0} \left(\frac{n\sigma_{ai}}{\sigma_{-1\Sigma}}\right)^m = a_{calc}.$$

De aquí

$$n^m \frac{\lambda}{N_0} \sum n_i \left(\frac{\sigma_{ai}}{\sigma_{-1\Sigma}}\right)^m = a_{calc} \text{ o bien } n^m \lambda a_{bl} = a_{calc}.$$

El factor de seguridad es $n = \sqrt[m]{a_{calc}/(\lambda a_{bl})} = \sqrt[6]{0{,}48/(16 \cdot 0{,}0106)} = 1{,}20$.

Precisamos la magnitud del factor de seguridad, teniendo en cuenta, al sumar los deterioros, la acción de todas las tensiones, para las cuales $n\sigma_{ai} > \sigma_{-1\Sigma}$:

$$a_{bl1} = \frac{1}{N_0} \sum_{n\sigma_{ai} > \sigma_{-1\Sigma}} n_i \left(\frac{\sigma_{ai}}{\sigma_{-1\Sigma}}\right)^m = a_{bl} + \frac{1}{N_0} \sum_{\substack{\text{miembro} \\ \text{adicional}}} n_i \left(\frac{\sigma_{ai}}{\sigma_{-1\Sigma}}\right)^m =$$
$$= 0{,}0106 + \frac{10^3}{4{,}7 \cdot 10^5}\left[2{,}5\left(\frac{90}{95}\right)^6 + 1{,}5\left(\frac{80}{95}\right)^6\right] = 0{,}0112.$$

El factor de seguridad precisado (segunda aproximación) es

$$n_1 = \sqrt[m]{a_{calc}/(\lambda a_{bl1})} = 1{,}18.$$

10.15. La tensión en la sección es $\sigma = 4P/[\pi (d_0 + az)^2]$, donde $a = (d_1 - d_0)/l = 0{,}025$. Según la teoría de envejecimiento el alargamiento rela-

tivo de fluencia es $\varepsilon_{fl} = \sigma^n \Omega\ (t)$. El alargamiento absoluto de la barra a causa de la fluencia es

$$\Delta l_{fl} = \int_0^l \varepsilon_{fl} dz = \int_0^l \sigma^n \Omega\ (t)\, dz = \Omega\ (t) \int_0^l \left[\frac{4P}{\pi (d_0 + az)^2}\right]^n dz =$$

$$= \left(\frac{4P}{\pi}\right)^n \Omega\ (t) \int_0^l (d_0 + az)^{-2n}\, dz = \left(\frac{4P}{\pi}\right)^n \frac{\Omega\ (t)}{(2n-1)\, a} \left(\frac{1}{d_0^{2n-1}} - \frac{1}{d_1^{2n-1}}\right).$$

La fuerza P en esta fórmula debe ser expresada en MN, porque durante el cálculo de las ordenadas de la curva $\Omega\ (t)$ las tensiones están expresadas en MPa:

$$\Delta l_{fl} = \left(\frac{4 \cdot 0{,}06}{\pi}\right)^{3{,}8} \cdot \frac{0{,}22 \cdot 10^{-12}}{(7{,}6-1)\, 0{,}025} \left[\frac{1}{(1 \cdot 10^{-2})^{6{,}6}} - \frac{1}{(1{,}5 \cdot 10^{-2})^{6{,}6}}\right] =$$

$$= 1{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1{,}3 \text{ mm}.$$

10.16. Las tensiones en la bóveda son:

$$\sigma_1 = \frac{PD}{2\delta} = \frac{1}{\delta}\, 0{,}063 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \frac{N}{\pi D \delta} = \frac{1}{\delta}\, 0{,}0136 \text{ MPa}.$$

a intensidad de las tensiones es

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} = \frac{1}{\delta}\, 0{,}0574 \text{ MPa}.$$

Mediante el gráfico de $\Omega\ (t)$ hallamos $\Omega\ (100) = 0{,}52 \cdot 10^{-12}$. El alargamiento relativo de fluencia es $\varepsilon_1 = (\sigma_1 - 0{,}5\sigma_2) \cdot \sigma_i^{n-1} \Omega\ (t) = \frac{1}{\delta^6} \cdot 1{,}82 \cdot 10^{-20}$. De aquí (teniendo en cuenta que según los datos del problema $\varepsilon_1 = 0{,}01$) $\delta = 1{,}1$ mm.

10.17. En el caso de desplazamiento puro $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \gamma/2$. La intensidad de deformaciones es $\varepsilon_i = (\gamma/\sqrt{3}) \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2} = \gamma/\sqrt{3}$. La intensidad de las tensiones es $\sigma_i = \tau\sqrt{3}$.

Sustituimos esto en la ecuación de la fluencia $\varepsilon_{fl} = \sigma_i^n \Omega\ (t)$. Obtenemos

$$\frac{\gamma_{fl}}{\sqrt{3}} = \tau^n (\sqrt{3})^n \Omega\ (t) \text{ o bien } \gamma_{fl} = 3^{(n+1)/2} \tau^n \Omega\ (t). \qquad (1)$$

La tensión tangencial es $\tau = 2M_{tor}/(\pi D_{med}^2 \delta) = 30{,}8$ MPa. Según el gráfico hallamos $\Omega\ (t) = \Omega\ (80) = 0{,}43 \cdot 10^{-12}$ y mediante la fórmula (1) determinamos el desplazamiento relativo $\gamma_{fl} = 1{,}72 \cdot 10^{-2}$.

El ángulo de torsión es $\varphi = \theta l = 2\gamma_{fl} l / D_{med} = 0{,}156$ rad $= 9°$.

10.18. Las tensiones en la bóveda son:

$$\sigma_x = N/(\pi D \delta) = 7{,}96 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = pD/(2\delta) = 46{,}7 \text{ MPa}.$$

$$\tau_{xy} = 2M_{tor}/(\pi D^2 \delta) = 12{,}2 \text{ MPa}.$$

La intensidad de las tensiones es

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} = 48{,}2 \text{ MPa}.$$

En el gráfico del problema 10.16 hallamos $\Omega\ (t) = \Omega\ (90) = 0{,}48 \cdot 10^{-12}$. El alargamiento relativo por la circunferencia de la bóveda es

$$\varepsilon_y = (\sigma_y - 0{,}5\sigma_x)\, \sigma_i^{n-1} \Omega\ (t) = 5{,}34 \cdot 10^{-5}.$$

El incremento del diámetro de la bóveda, debido a la fluencia, es

$$\Delta D = \varepsilon_y D = 2{,}14 \text{ mm}.$$

10.19. Por la teoría de envejecimiento la ecuación del relajamiento en magnitudes adimensionales tiene la forma

$$\chi = (1 - \nu)/\nu^n. \qquad (1)$$

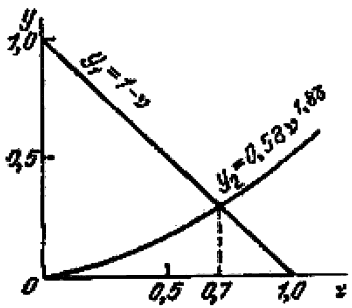
El parámetro de la tensión es $\nu = \sigma/\sigma_0 = 0{,}75$. El parámetro del tiempo es $\chi = E\sigma_0^{n-1}\Omega\ (t)$.

De la ecuación (1) tenemos $\chi = (1 - \nu)/\nu^n = 0{,}423$. De aquí

$$\Omega\ (t) = \chi/(E\sigma_0^{n-1}) = 0{,}307 \cdot 10^{-7}.$$

En el gráfico de la función $\Omega\ (t)$ hallamos el tiempo $t = 300$ h.

10.20. En el gráfico (véase las condiciones del problema anterior) para $t = 500$ h hallamos $\Omega\ (t) = 0{,}43 \cdot 10^{-7}$. De aquí



Para el problema 10.20

$$\chi = E\sigma_0^{n-1}\Omega\ (t) =$$

$$= 1{,}8 \cdot 10^5 \cdot 180^{0{,}63} \cdot 0{,}43 \cdot 10^{-7} = 0{,}58.$$

Para determinar el parámetro ν tenemos la ecuación $(1 - \nu)/\nu^{1{,}63} = 0{,}58$. Resolvemos la ecuación gráficamente, para lo cual construimos los gráficos de las funciones $y_1 = 1 - \nu$ e $y_2 = 0{,}58\nu^{1{,}63}$. La solución gráfica da $\nu = 0{,}7$. Por consiguiente, $\sigma = 0{,}7\sigma_0$, es decir, la tensión en el perno disminuyó en un 30%.

10.21. La pieza con grieta se destruirá a tensiones σ_{cr} menores que σ_r. El coeficiente de seguridad disminuirá $k = \sigma_r/\sigma_{cr}$ veces. La tensión crítica σ_{cr} se halla de la relación $K_{1cr} = \sigma_{cr}\sqrt{\pi l}$. De este modo el coeficiente de seguridad debe ser aumentado multiplicándolo por

$$k = \frac{\sigma_r \sqrt{\pi l}}{K_{1cr}} = 1{,}1.$$

10.22. La longitud crítica de la grieta $2l_c$ se determina por medio de la fórmula

$$K_{1cr} = \sigma_{cr}\sqrt{\pi l}, \qquad (1)$$

donde l es una mitad de la longitud de la grieta. Cuando $\sigma_{cr} = \sigma_r/2$ obtendremos

$$2l_{cr} = 8K_{1cr}^2/(\pi\sigma_r^2) = 8{,}5 \text{ mm}.$$

10.23. En el momento de la destrucción la tensión es $\sigma_{cr} = P/F = 150$ MPa. La longitud crítica de la grieta es $2l_{cr} = \dfrac{2K_{1cr}^2}{\pi\sigma_{cr}^2} = 25{,}4$ mm.

10.24. $K_{1cr} = \sigma\sqrt{\pi l} = 1{,}95 \cdot 10^6$ N·m$^{-3/2}$.

10.25. Mediante la fórmula (1) de la resolución del problema 10.22 determinamos la longitud crítica de la grieta $2l = K_{1cr}^2/(\pi\sigma_{máx}^2)$.

Tomando en consideración que según los datos $\sigma_{máx} = 50$ MPa, obtenemos $l = 51$ mm.

Aprovechamos la dependencia entre ΔK, la tensión máxima del ciclo $\sigma_{máx}$ y la mitad de la longitud de la grieta l: $\Delta K = \sigma_{máx}\sqrt{\pi l}$; en este caso la velocidad de crecimiento de la grieta (véase los datos del problema) es

$$dl/dN = \pi 10^{-6}\sigma_{máx}^2 l.$$

Después de efectuar la integración obtendremos

$$\ln l - \ln l_0 = \pi 10^{-8} \sigma^2_{\text{máx}} N;$$

el número límite de ciclos hasta la destrucción es

$$N = \frac{10^8}{\pi \sigma^2_{\text{máx}}} \ln \left(\frac{l}{l_0} \right) = \frac{10^8}{\pi 50^2} \ln (51/0{,}25) = 67\,700.$$

§ 4. Seguridad en el caso de cargas accidentales

10.26. La posibilidad incógnita es igual a la probabilidad del suceso que la tensión actuante superará el nivel de σ_{fl}, es decir, será igual al área sombreada en la figura, donde $f(\sigma)$ es la densidad de distribución de la probabilidad de las tensiones que actúan:

$$P\{\sigma > \sigma_{fl}\} = \int_{\sigma_{fl}}^{\infty} f(\sigma)\, d\sigma.$$

En nuestro caso

$$f(\sigma) = \frac{1}{S_\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\sigma - \bar{\sigma})^2}{2S^2_\sigma} \right].$$

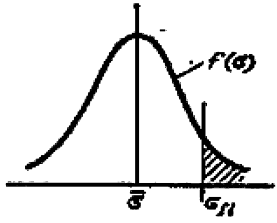
Entonces

$$P\{\sigma > \sigma_{fl}\} = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{\sigma_{fl} - \bar{\sigma}}{S_\sigma \sqrt{2}} \right) \right],$$

donde la letra Φ significa la función de Laplace

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Cuando las magnitudes son dadas en el problema, $P\{\sigma > \sigma_{fl}\} = 0{,}00003$. Por consiguiente, en tres piezas de cada 100 000 hace falta esperar la aparición de deformaciones plásticas.



Para el problema 10.26

10.27. La probabilidad incógnita P es igual a

$$P\{\sigma > \sigma_{fl}\} = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{\bar{\sigma}_{fl} - \sigma}{\sqrt{2(S^2_\sigma + S^2_{\sigma(fl)})}} \right) \right].$$

Sustituyendo los datos numéricos, hallamos

$$P\{\sigma > \sigma_{fl}\} \approx 0{,}0001.$$

De este modo aquí ya es en 10 piezas de cada 100 000 (en una de cada 10 000) se espera la aparición de deformaciones plásticas.

10.28. La probabilidad de que como resultado de una carga no aparecerán deformaciones plásticas es igual a 0,99997 (véase la solución del problema 10.26). En dos cargas este suceso no se producirá con una probabilidad $(0{,}99997)^2 \approx 0{,}99994$. Por consiguiente, la probabilidad incógnita es

$$P_2\{\sigma > \sigma_{fl}\} \approx 0{,}00006.$$

De este modo la probabilidad de aparición de deformaciones plásticas en dos cargas supera la correspondiente probabilidad en el caso de una sola carga aproximadamente en dos veces.

CAPITULO 11

LÁMINAS Y BÓVEDAS

11.1. La lámina libre flexa por una superficie de doble curvatura. Cada tira de lámina, perpendicular al eje y, se somete a flexión bajo la acción de los momentos M_x igual que una simple viga. Las tensiones son:

$$\sigma_{x,\,máx}=\frac{M_x}{W_x}=\frac{6M_x}{1\cdot h^2}=10^8\ \text{Pa}=100\ \text{MPa}.$$

En dirección del eje y no existen momentos flectores y $\sigma_y=0$. Las tensiones tangenciales máximas son: $\tau_{máx}=\dfrac{\sigma_{x,\,máx}-\sigma_y}{2}=50$ MPa. El momento torsor máximo es $K_{máx}=\tau_{máx}\cdot\dfrac{1\cdot h^2}{6}=300$ N·m/m.

Los radios de curvatura principales son:

$\rho_x=\dfrac{EJ}{M_x}=\dfrac{2\cdot10^{11}\cdot1\cdot6^3\cdot10^{-9}}{600\cdot12}=6$ m (la convexidad está dirigida hacia abajo),

$\rho_y=-\dfrac{EJ}{\mu M_x}=-20$ m (la convexión está dirigida hacia arriba).

11.2. $\sigma_{x,\,máx}=\dfrac{6M_x}{h^2}=112{,}5$ MPa, $\sigma_{y,\,máx}=\dfrac{6M_y}{h^2}=37{,}5$ MPa,

$$\tau_{máx}=\frac{\sigma_{x,\,máx}-\sigma_{y,\,máx}}{2}=37{,}5\ \text{MPa}.$$

En la teoría energética la condición de resistencia se cumple:

$$\sigma_0=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{75^2+37{,}5^2+112{,}5^2}=$$

$$=99\ \text{MPa}<120\ \text{MPa}.$$

11.6. Según los datos $\dfrac{1}{\rho_y}=\dfrac{M_y-\mu M_x}{EJ}=0$, de aquí $M_y=\mu M_x=$ $=37{,}5$ N·m/m.

La lámina flexa según una superficie cilíndrica cuyo radio de curvatura es igual a

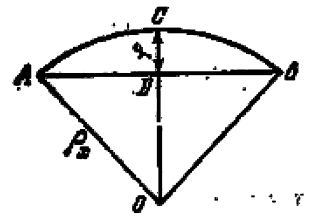
$$\rho_x=\frac{EJ}{M_x-\mu M_y}=3{,}32\ \text{m}.$$

Las tensiones son:

$$\sigma_{x,\,máx}=\frac{M_x}{W_x}=\frac{6M_x}{h^2}=60\ \text{MPa},\quad \sigma_{y,\,máx}=\frac{M_y}{W_y}=\frac{6M_y}{h^2}=21\ \text{MPa},$$

$$\tau_{máx}=\frac{\sigma_{x,\,máx}-\sigma_{y,\,máx}}{2}=19{,}5\ \text{MPa}.$$

11.7. Hallamos la relación entre la flecha f y el radio de curvatura ρ_x de la lámina (véase la figura): $OA=\rho_x$, $OD=\rho_x-f$, $AD=a/2=12$ cm $=0{,}12$ m, $\rho_x^2=(\rho_x-9\cdot10^{-4})^2+0{,}12^2$, $\rho_x=8$ m. Por otro lado



Para el problema 11.7

$$\rho_x=\frac{EJ}{M_x-\mu M_y}=\frac{Eh^3}{12M_x(1-\mu^2)}.$$

De aquí $M_x=0.48$ N·m/m, $M_y=\mu M_x=0{,}12$ N·m/m. Las tensiones son:

$$\sigma_{x\,máx}=6M_x/h^2=80\ \text{MPa},$$

$$\sigma_{y\,máx}=6M_y/h^2=20\ \text{MPa},$$

$$\tau_{máx}=(\sigma_{x\,máx}-\sigma_{y\,máx})/2=30\ \text{MPa}.$$

11.8. La rigidez cilíndrica de la lámina es

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}=54.3\ \text{N·m}.$$

El momento flector máximo (en el punto medio de la lámina) es

$$M_{x,\,máx}=\frac{pb^2}{8}=15{,}6\ \text{N·m/m}.$$

La tensión es $\sigma_{x,\,máx}=\dfrac{6M_{x,\,máx}}{h^2}=23{,}4$ MPa. La flecha máxima es $f=$

$$=\frac{5}{384}\frac{pb^4}{D}=0{,}3\ \text{mm}.$$

11.9. Cuando la relación entre los lados de la lámina es $a/b\geqslant 3$ se puede considerar aproximadamente que la lámina soporta una flexión cilíndrica, porque la influencia del apoyo de los bordes cortos sobre las tensiones máximas y las flechas en el centro de la lámina es pequeña,

$$M_{x,\,máx}=\frac{pb^2}{8}=200\ \text{N·m/m},\qquad M_{y,\,máx}=\mu M_x=50\ \text{N·m/m}.$$

$$\sigma_{máx}=\frac{6M_{x,\,máx}}{h^2}=75\ \text{MPa},\qquad K_{máx}=\frac{M_{x,\,máx}-M_{y,\,máx}}{2}=75\ \text{N·m/m},$$

$$\tau_{máx}=\frac{6K_{máx}}{h^2}=28.1\ \text{MPa}.$$

La rigidez cilíndrica de la lámina es

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}=1{,}14\ \text{kN·m}.$$

La flexión máxima (en el centro de la lámina) es

$$f=\frac{5}{384}\frac{pb^4}{D}=0{,}73\ \text{mm}.$$

11.10. $\sigma_{máx}=\dfrac{6M_{x,\,máx}}{h^2}=\dfrac{3pb^2}{4h^2}=1{,}3\cdot10^2p,$

$$D=\frac{Eh^3}{12\,(1-\mu^2)}=3{,}84\ \text{kN}\cdot\text{m},\qquad f=\frac{5pb^4}{384D}=1{,}32\cdot10^{-8}p\ \text{m}.$$

La presión debe ser disminuida en la magnitud

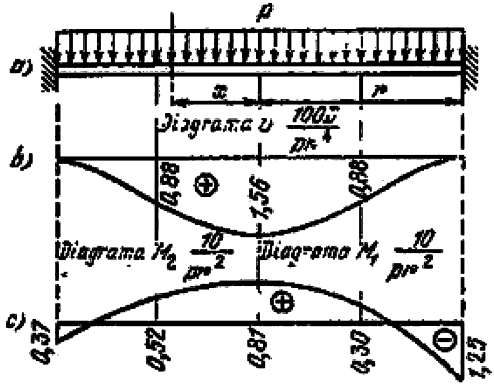
$$\Delta p=p\cdot\frac{\Delta f}{f}=\frac{10^{-3}}{1{,}32\cdot10^{-8}}=7{,}5\cdot10^4\ \text{Pa}=75\ \text{kPa},$$

$$\Delta\sigma_{máx}=\sigma_{máx}\frac{\Delta p}{p}=1{,}3\cdot10^2\cdot7{,}5\cdot10^4=97{,}5\ \text{MPa}.$$

11.11. a) La ecuación diferencial de la flexión de la lámina tiene la forma

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\theta}{dx}-\frac{\theta}{x^2}=-\frac{Q}{D},$$

donde x es el radio; θ, el ángulo de giro; Q, el esfuerzo cortante.



Para el problema 11.11 (a)

Supongamos que esta ecuación tiene las formas siguientes

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\theta}{dx}+\frac{\theta}{x}\right)=-\frac{Q}{D}\ \text{o bien}\ \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x\theta)\right]=-\frac{Q}{D}.$$

Hacemos una integración

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x\theta)=-\int\frac{Q}{D}\,dx+C_1$$

o bien

$$\frac{d}{dx}(x\theta)=-x\int\frac{Q}{D}\,dx+C_1x.$$

Integramos una vez más y dividimos ambos miembros entre x. Obtenemos

$$\theta(x)=-\frac{1}{x}\int x\,dx\int\frac{Q}{D}\,dx+\frac{C_1x}{2}+\frac{C_2}{x}. \qquad (1)$$

La expresión de la flecha es

$$v(x)=-\int\theta\,dx+C_3=\int\frac{dx}{x}\int x\,dx\int\frac{Q}{D}\,dx-\frac{C_1x^2}{4}-C_2\ln\frac{x}{r}+C_4 \qquad (2)$$

En nuestro caso $Q = \pi x^2 p/(2\pi x) = px/2$. Sustituyéndolo en las ecuaciones (2) y (1) y tomando también en consideración que $C_2 = 0$ (porque cuando $x = 0$, $\theta = 0$), obtendremos

$$v(x) = \frac{px^3}{64D} - \frac{C_1 x^2}{4} + C_3, \quad \theta(x) = \frac{-px^3}{16D} + \frac{C_1 x}{2}.$$

De las condiciones $v(r) = 0$ y $\theta(r) = 0$ hallamos $C_1 = pr^2/(8D)$, $C_3 = pr^4/(64D)$. Por consiguiente,

$$v = \frac{p}{64D}(r^2 - x^2)^2, \quad \theta = -\frac{px}{16D}(r^2 - x^2).$$

La flecha máxima (en el centro) es igual a $pr^4/(64D) = 4{,}85 \cdot 10^{-2}$ cm. Los momentos flectores:

en dirección radial $M_1 = D\left(\theta' + \mu\frac{\theta}{x}\right)$, (3)

en dirección circunferencial $M_2 = D\left(\frac{\theta}{x} + \mu\theta'\right)$ (4)

se hallan haciendo uso del valor obtenido de θ (véase la respuesta).

Los diagramas v, M_1 y M_2 están representados en la figura.

11.18. Como $Q = 0$ de la ecuación (1) (véase la solución del problema 11.11 a)) obtendremos: $\theta = C_1 x/2 + C_2/2$. Sustituyéndolo en las fórmulas (3) y (4) hallaremos

$$M_1 = D\left[\frac{C_1}{2}(1+\mu) - \frac{C_2}{x^2}(1-\mu)\right],$$

$$M_2 = D\left[\frac{C_1}{2}(1+\mu) + \frac{C_2}{x^2}(1-\mu)\right].$$

Utilizamos las condiciones límites: cuando $x = r$ $M_1 = m$, cuando $x = R$ $M_1 = M$. Obtenemos

$$C_1 = \frac{2(MR^2 - mr^2)}{D(1+\mu)(R^2 - r^2)} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{R^2 r^2 (M - m)}{D(1-\mu)(R^2 - r^2)}$$

y luego se determinan los valores de M_1 y M_2 escritos en la respuesta.

11.22. Las tensiones críticas son

$$\sigma_{cr} = \frac{k_\sigma \pi^2 D}{b^2 h}(1), \text{ donde } k_\sigma = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb}\right)^2. \quad (2)$$

La condición del paso de la forma de pérdida de estabilidad de la lámina de m semiondas a $m + 1$ semiondas: $\sqrt{m(m+1)} = a/b$.

Con las dimensiones dadas de la lámina $a : b = 40 : 25 = 1{,}6 > \sqrt{2}$. Por consiguiente, la lámina perderá su estabilidad cuando en ella se formen dos semiondas: $k_\sigma = 4{,}2$.

La rigidez cilíndrica de la lámina es

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = 3{,}47 \text{ N·m}; \quad (3)$$

$$\sigma_{cr} = 2{,}88 \text{ MPa} < \sigma_{prop},$$

es decir, el cálculo mediante la fórmula (1) es legítimo. En caso de aplicación de la carga a los lados largos de la lámina $m = 1$, $k_\sigma = 4.95$, $\sigma_{cr} = 1{,}32$ MPa.

11.24. La tensión crítica es $\sigma_{cr}=\frac{Pn}{bh}=\frac{4{,}5\cdot10^3}{h}$; la rigidez cilíndrica de la lámina (véase la fórmula (3) en la solución del problema 11.22) es $D = 1{,}8\cdot10^{10}\,h^3$.

Si la relación entre las longitudes de los lados es $a/b = 3{,}5 > \sqrt{12}$, la lámina perderá la estabilidad con la formación de $m = 4$ semiondas a lo largo de la lámina. Por eso (véase la fórmula (2) en la solución del problema 11.22) $k_\sigma = 4{,}07$.

El grosor de la lámina se determina a partir de la condición $\frac{k_\sigma\pi^2D}{b^2h}=\frac{4{,}5\cdot10^5}{h}$. De aquí, teniendo en cuenta la fórmula (3), hallamos $h=1{,}84\cdot10^{-3}$ m $=1{,}84$ mm.

11.25. La lámina cuadrada perderá su estabilidad, formando una semionda en cada sentido de compresión: $m = n = 1$.

La tensión crítica es

$$\sigma_{cr,x}=\sigma_{cr,y}=\frac{k_\sigma\pi^2D}{b^2h},\quad \text{donde } k_\sigma=\frac{\left[\left(\frac{mb}{a}\right)^2+n^2\right]^2}{\left(\frac{mb}{a}\right)^2+n^2}=2,$$

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}=410\ \text{N}\cdot\text{m},\quad \sigma_{cr,x}=\sigma_{cr,y}=50{,}6\ \text{MPa}.$$

11.26. $\sigma_{cr}=\frac{k_\sigma\pi^2D}{b^2h}$, $D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}=480\ \text{N}\cdot\text{m}$.

Si la compresión es unidireccional $k_\sigma = 4$, $\sigma_{cr} = 158\cdot10^6$ Pa $= 158$ MPa.

Si la compresión es en dos direcciones mutuamente perpendiculares, $N_y : N_x = 0{,}5$ tenemos

$$k_\sigma=\frac{(0{,}5^2+1^2)^2}{0{,}5^3+0{,}5\cdot1^2}=2{,}08,\quad \sigma_{cr}=82\ \text{MPa},$$

$$\Delta\sigma_{cr}=158-82=76\ \text{MPa}.$$

11.27. $\tau_{cr}=\frac{0{,}9k_\tau E}{(b/h)^2}$. Para el caso de apoyo articulado de todos los bordes de la lámina $k_\tau=5{,}35+4\left(\frac{b}{a}\right)^2=6{,}9$. Obtenemos $\tau_{cr}=114$ MPa.

11.28. En el caso de empotramiento rígido de los bordes de la lámina $k_\tau = 9 + 5{,}6\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 14{,}6$ y por medio de la fórmula en la solución del problema 11.27 hallamos $\tau_{cr} = 122{,}6$ MPa.

11.33. Las tensiones tangenciales en el caso de torsión de la bóveda cerrada son

$$\tau=\frac{M_{cr}}{\omega_{cr}h}=\frac{5\cdot10^4}{2\cdot0{,}2\cdot0{,}6\cdot2\cdot10^{-2}}=1{,}04\cdot10^8\ \text{Pa}=104\ \text{MPa}.$$

La distancia entre larguerillos se halla a partir de las condiciones de estabilidad de la lámina de 25 cm de longitud y de ancho x bajo la acción de tensiones tangenciales debidas al momento torsor

$$k_\tau=5{,}35+4\left(\frac{x}{0{,}25}\right)^2,$$

$$\tau_{cr}=\frac{0{,}9\cdot7{,}2\cdot10^{10}\cdot4\cdot10^{-6}}{x^2}\left[5{,}35+4\left(\frac{x}{0{,}25}\right)^2\right]=1{,}04\cdot10^8\ \text{Pa},\quad x=0{,}107\ \text{m}.$$

11.34. La tensión tangencial en la pared del panel es

$$\tau = \frac{nP_{ad}}{bh} = 4{,}17 \cdot 10^3 \, P_{ad} \text{ Pa};$$

hace falta igualarla a la tensión crítica determinada por la fórmula de la solución del problema 11.27. Obtenemos $k_\tau = 5{,}99$, $4{,}17 \cdot 10^3 \, P_{ad} = 7{,}49 \cdot 10^7$; de aquí $P_{ad} = 1{,}8 \cdot 10^4 = 18$ kN.

11.35. En el caso de acción simultánea de la compresión y el cizallamiento las tensiones críticas σ_{cr} y τ_{cr} deben satisfacer la condición

$$\sigma_{cr}/\sigma_{cr.e} + (\tau_{cr}/\tau_{cr.e})^2 = 1, \qquad (1)$$

donde $\sigma_{cr.e} = k_\sigma \pi^2 D/(b^2 h)$ es la tensión crítica en el caso de compresión simple, $\tau_{cr.e} = 0{,}9 k_\tau E/(b/h)^2$ es la tensión crítica en cizallamiento puro.

Calculamos $\sigma_{cr} = N_{cr}/h = 10^3 \, q$; $\tau_{cr} = q/h = 5 \cdot 10^2 \, q$. La rigidez cilíndrica de la lámina es $D = Eh^3/(12 \, (1 - \mu^2)) = 51{,}3$ N·m. La pérdida de estabilidad debida a la compresión se efectuará con la formación de dos semiondas a lo largo de la lámina ($m = 2$), porque la relación entre los lados del rectángulo es igual a $1{,}8 > \sqrt{2}$, de acuerdo con la fórmula (2) en la solución del problema 11.22 $k_\sigma = 4{,}04$ y según la fórmula (1) tomando en consideración la (3) $\sigma_{cr.e} = 40{,}9$ MPa. Mediante las fórmulas en la solución del problema 11.27 determinamos $k_\tau = 6{,}58$. $\tau_{cr.e} = 1{,}18 \cdot 10^8$ Pa $= 118$ MPa.

Ahora hacemos uso de la condición (1)

$$10^3 \, q/(4{,}09 \cdot 10^7) + (5 \cdot 10^2 \, q/(1{,}18 \cdot 10^8))^2 = 1;$$

obtenemos $q = 40$ kN/m, $N = 2q = 80$ kN/m.

11.37. La pared del perfil en U reforzada por las alas contiguas a ésta, debe ser considerada como una lámina larga apoyada articuladamente por todo el contorno

$$\sigma_{cr} = 3{,}6Eh^2/b^2 = 72 \text{ MPa}.$$

Las alas se examinan como láminas apoyadas articuladamente por tres lados y con un borde libre. En este caso $k_\sigma = 0{,}45$. Según la fórmula (1) de la resolución del problema 11.22 hallamos para el ala

$$\sigma_{cr} = 4{,}67 \cdot 10^7 \text{ Pa} = 46{,}7 \text{ MPa}.$$

La fuerza crítica se halla a partir de la pérdida de estabilidad de las alas, cuya tensión crítica es menor que la de la pared:

$$P_{cr} = \sigma_{cr,\,min} F = 4.67 \cdot 10^7 \, (2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-2}) \cdot 10^{-4} = 5140 \text{ N} = 5{,}14 \text{ kN}.$$

Con un coeficiente de seguridad dado la fuerza admisible será dos veces menor que la crítica.

11.42. La tensión crítica máxima (superior) es $\sigma_{cr,\,máx} = 0{,}6Eh/R = 210$ MPa; la fuerza crítica es $P_{cr,\,máx} = 2\pi Rh \cdot \sigma_{cr,\,máx} = 264$ kN. La fuerza crítica mínima (inferior) es tres veces menor.

11.45. La presión crítica es

$$P_{cr} = Eh^3/[4 \, (1 - \mu^2) \, R^3] = 2{,}05 \cdot 10^4 \text{ Pa}.$$

11.47. La magnitud del momento torsor crítico para la bóveda larga se determina mediante la fórmula aproximada

$$M_{cr} = \frac{\pi R}{2} \sqrt{Rh^3} = 6{,}2 \cdot 10^3 \text{ N·m} = 6{,}2 \text{ kN·m},$$

$$\tau_{cr} = M_{cr}/W_{cr} = M_{cr}/2\pi R^2 h) = 4.1 \text{ MPa}$$

11.48. La combinación crítica de tensiones σ_{cr} y τ_{cr} en el caso de acción simultánea de torsión y compresión axial debe satisfacer la condición

$$\sigma_{cr}/\sigma_{cr.0} + (\tau_{cr}/\tau_{cr.0})^3 = 1,$$

donde $\sigma_{cr.0} = 0{,}2Eh/R$ es la tensión crítica inferior (mínima) en el caso de compresión axial simple de la bóveda, $\tau_{cr.0} = \frac{E}{4}\left(\frac{h}{R}\right)^{3/2}$ es la tensión crítica durante la torsión.

Tenemos $\sigma_{cr.0} = 210$ MPa, $\tau_{cr.0} = 1{,}86 \cdot 10^7$ Pa $= 18{,}6$ MPa,

$$\sigma_{cr} = N/F = N/(2\pi Rh) = 79{,}6 \text{ MPa},$$

$$79{,}6/210 + (\tau_{cr}/18{,}6)^3 = 1, \quad \tau_{cr} = 15{,}9 \text{ MPa},$$

$$M_{cr} = \tau_{cr} W_{cr} = \tau_{cr} \cdot 2\pi R^2 h = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

11.49. Una bóveda con relación entre la longitud y el radio igual a $l/R > 4$ puede considerarse larga, por eso la magnitud crítica del momento se calcula mediante la fórmula

$$M_{cr} = 0{,}95ERh^2 = 380 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

La magnitud admisible del momento es $M_{adj} = M_{cr}/n = 190$ kN·m. Si disminuimos h en dos veces, el momento resultará cuatro veces menor.

11.50. Para las bóvedas cortas ($l/R < 4$), en el caso de flexión transversal, las tensiones críticas se determinan por medio de la fórmula empírica

$$\sigma_{cr} = \frac{0{,}35E}{(1-\mu^2)^{1/6}}\left(\frac{h}{R}\right)^{5/4}\frac{l}{R} = 90{,}9 \text{ MPa}.$$

El momento crítico es $M_{cr} = \sigma_{cr} W = 13{,}7$ kN·m. El esfuerzo cortante crítico es $Q_{cr} = M_{cr}/l = 34{,}3$ kN.

11.52. En la primera aproximación suponemos que la relación entre el radio y el grosor es igual a 500. En este caso según la tabla 13 del anexo $k = 0{,}24$. Mediante la fórmula $q = kE\,(h/R)^2$ hallamos $h_1 = 9{,}6 \cdot 10^{-3}$ m. Entonces, $R/h_1 = 416$. En la segunda aproximación, considerando $R/h_1 = 416$ y haciendo una interpolación, hallamos en la tabla $k = 0{,}26$, de aquí $h_2 = 9{,}1 \cdot 10^{-3}$ m. Siguiendo el cálculo, obtenemos $h_3 \approx 9{,}3$ mm. Remarcamos que, según el cálculo, el aumento del grosor del fondo superior en el caso de un enrarecimiento profundo no es razonable: es necesario tener una masa grande del fondo. De aquí surge la exigencia de aumentar la seguridad de los sistemas de drenaje.

11.53. En las condiciones nuevas la presión en el tanque es $q_2 = \frac{T_2}{T_1} q_1 = 88$ kPa. La sobrepresión exterior es $\Delta q = q_1 - q_2 = 12$ kPa. El coeficiente k, siendo R/h_1 igual a 667 es, según la tabla 13, igual a 0,66.

11.54. Valoramos el nivel de las tensiones de origen térmico en la sección media del tanque ($\varphi = \pi$), donde éstas se suman a la tensión de compresión máxima debida al peso propio y al del producto. Según la fórmula escrita en los datos del problema la tensión de origen térmico es igual a $\sigma_t(\pi) = 12 \cdot 10^{-6} \times 2 \cdot 10^5 \cdot (-155) \cdot \left[\frac{3}{4} + \frac{2}{\pi} \cdot 0{,}71 \cdot (-1)\right] = -114$ MPa.

Construimos el diagrama de los momentos flectores debidos al peso propio y al del producto, designando la intensidad de la carga distribuida longitudinalmente por q MN/m (véase la figura). Cuando la carga Q es completa la magnitud q es igual a

$$q = Q/(2L_1 + L_2) = 250 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81/(10^6 \cdot 33) = 0{,}074 \text{ MN/m}.$$

Determinamos el momento flector M en la sección media del tanque:

$$M = (qL/4)\,(L_2 - L/2) = 2{,}15 \text{ MN} \cdot \text{m}.$$

La tensión de compresión en el punto superior de la sección media es:

$$\sigma_M = -M/W = -M/(\pi R^2 h) = -35 \text{ MPa}.$$

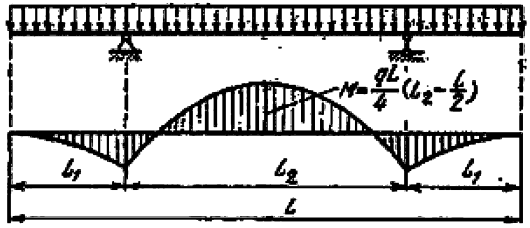
Las tensiones de compresión sumarias en el punto superior de la sección media son iguales a

$$\sigma = \sigma_t + \sigma_M = -149 \text{ MPa}.$$

Determinamos la tensión crítica de cálculo (inferior) en el caso de compresión axial de la bóveda. Cuando $R/h = 140$, según la tabla, será $\sigma_{cr} = 0{,}18Eh/R$,

$$\sigma_{cr.inf} = 0{,}18 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-2}/1{,}4 = 258 \text{ MPa}.$$

Esta tensión es menor que el límite de proporcionalidad $\sigma_{prop} = 0{,}96\sigma_{0.2} = 260$ MPa. El coeficiente de seguridad de estabilidad es $n_{est} = 258/149 = 1{,}71$.

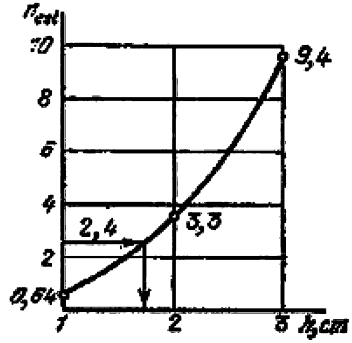


Para el problema 11.54

Puesto que este régimen tiene carácter temporal se puede aceptar el valor mínimo $n_{est} = 1{,}5$ igual al valor del régimen de ensayo. La condición de estabilidad se cumple.

11.55. Fijamos una serie de grosores de la funda $h_1 = 1$ cm, $h_2 = 2$ cm, $h_3 = 3$ cm y determinamos la carga crítica de cálculo (inferior) para cada grosor por la fórmula $p_{cr} = kE\,(h/R)^2$. Según la tabla 13 del anexo, cuando $h = 1 \times 10^{-2}$ m y $R/h = 800$, tenemos $k = 0.20$; cuando $h = 2 \cdot 10^{-2}$ m y $R/h = 400$, $k = 0{,}25$; cuando $h = 3 \cdot 10^{-2}$ m y $R/h = 266$, $k = 0{,}29$.

Los valores correspondientes de la presión crítica son: $p_{cr.1} = 0{,}064$ MPa, $p_{cr.2} = 0{,}33$ MPa, $p_{cr.3} = 0{,}84$ MPa. Los coeficientes de seguridad de estabilidad son respectivamente: $n_{est.1} \approx 0{,}64$, $n_{est.2} \approx 3{,}3$, $n_{est.3} \approx 8{,}4$. Construyendo la dependencia gráfica $n_{est}\,(h)$ (véase la figura) determinamos que al coeficiente de seguridad $n_{est} = 2{,}4$ le corresponde el grosor de la bóveda $h \geqslant 1{,}75 \times 10^{-2}$ m.



Para el problema 11.55

11.56. La magnitud crítica de cálculo (inferior) de la sobrepresión se determina por la fórmula $q_{cr} = kE\,(h/R)^2$. Según la tabla 13 del anexo para $R/h = 500$ $k = 0{,}24$.

11.57. La carga radial lineal crítica para la cuaderna es $p_{cr} = 3EJ/R^3$.

11.58. La parte de la lámina que perdió su estabilidad durante la compresión seguirá trabajando junto con los larguerillos. La tensión máxima que puede soportar un larguerillo es $\sigma_{cr.lar} = 200$ MPa.

El coeficiente de reducción que determina la parte del área de la lámina que recibe la compresión después de perder la estabilidad es

$$\varphi = 1{,}9\,\frac{h}{b}\sqrt{\frac{E_{lar}}{\sigma_{lar}}} = 0{,}75. \qquad (1)$$

El área efectiva de la sección del panel antes de la destrucción es

$$F_{ef} = 2F_{lar} + \varphi bh = 15{,}4 \text{ cm}^2. \quad (2)$$

La carga destructora del panel es

$$N = \sigma_{cr.lar} \cdot F_{ef} = 3{,}08 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

11.59. Utilizando las indicaciones de los captadores hallamos las tensiones en los nervios por medio de la ley de Hooke $\sigma_{lar} = \varepsilon E = 140$ MPa.

Según la fórmula (1) de la resolución del problema 11.58 el coeficiente de reducción de la lámina es

$$\varphi = 0{,}135.$$

Determinamos el área efectiva de la sección del panel por la fórmula (2) y hallamos la fuerza comprimente

$$N = \sigma_{lar}(2F_{lar} + \varphi bh) = 3{,}22 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

11.60. Utilizando el método de aproximaciones sucesivas primero nos proponemos fijar la magnitud del coeficiente de reducción, por ejemplo, $\varphi_1 = 0{,}5$. El área efectiva de la sección del panel es, en la primera aproximación, $F_1 = 2F + \varphi_1 bh = 8$ cm^2. La tensión en el larguerillo es $\sigma_{lar.1} = N/F_1 = 1{,}25 \times 10^8$ Pa.

Calculamos el coeficiente de reducción en la segunda aproximación

$$\varphi_2 = 1{,}9 \frac{h}{b} \sqrt{\frac{E}{\sigma_{lar.1}}} = 0{,}76,$$

$$F_2 = 6 + 0{,}76 \cdot 20 \cdot 0{,}2 = 9{,}04 \text{ cm}^2.$$

La tensión en el larguerillo en la segunda aproximación es

$$\sigma_{lar.2} = N/F_2 = 111 \text{ MPa}.$$

El coeficiente de reducción en la tercera aproximación es

$$\varphi_3 = 1{,}9 \frac{2}{200} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{111}} = 0{,}806.$$

El área efectiva de la sección es $F_3 = 6 + 0{,}806 \cdot 20 \cdot 0{,}2 = 9{,}23$ cm^2;

$$\sigma_{lar.3} = 10^5/(9{,}23 \cdot 10^{-4}) = 108 \text{ MPa}.$$

Aquí paramos el cálculo, puesto que $\sigma_{lar.3}$ se diferencia de $\sigma_{lar.2}$ en menos de un 3%. La tensión buscada es igual a 108 MPa.

11.61. La ecuación diferencial de la superficie deformada en este problema tiene la forma

$$\frac{D}{h}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) - \sigma x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

Pasamos a las diferencias finitas, utilizando operadores centrales del tipo

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}(w_{i+1,\,j} - 2w_{i,\,j} + w_{i-1,\,j}),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}(w_{i,\,j+1} - 2w_{i,\,j} + w_{i,\,j-1}),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{4c^2}(w_{i+1,\,j+1} - w_{i-1,\,j+1} + w_{i-1,\,j-1} - w_{i+1,\,j-1}),$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{c^4}(w_{i+2,\,j} - 4w_{i+1,\,j} + 6w_{i,\,j} - 4w_{i-1,\,j} + w_{i-2,\,j}),$$

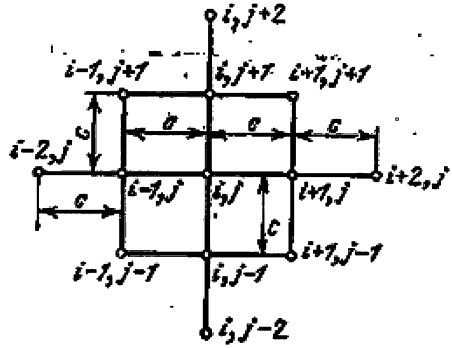
$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{c^4}(w_{i,\,j+2} - 4w_{i,\,j+1} - 6w_{i,\,j} - 4w_{i,\,j-1} + w_{i,\,j-2}),$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} = \frac{1}{c^4}[4w_{i,\,j} - 2(w_{i+1,\,j} + w_{i,\,j+1} + w_{i-1,\,j} + w_{i,\,j-1}) +$$

$$+ w_{i+1,\,j+1} + w_{i-1,\,j+1} + w_{i-1,\,j-1} + w_{i+1,\,j-1}],$$

la numeración de los nudos está representada en la figura.

En la primera aproximación, colocando el nudo i, j en el centro de la lámina y considerando para el caso del apoyo articulado que $w_{i-2,\,j} = w_{i+2,\,j} = w_{i,\,j+2} = w_{i,\,j-2} = -w_{i,\,j}$, $c = a/2$, hallamos $k^2 = \sigma_{x.cr}a^2h/D = 32$. La comparación con el valor exacto de k^2 está dada en la respuesta.



Para el problema 11.61

11.62. La ecuación matricial para el caso de $c = a/4$ tiene la forma $k^2 = \sigma_{x.cr}a^2/(16D)$,

$$Aw - k^2Bw = 0,$$

donde

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 20 & -16 & -16 & 8 \\ -16 & 40 & 8 & -32 \\ -16 & 8 & 40 & -32 \\ 8 & -32 & -32 & 80 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

Calculando los valores propios de la matriz $A \cdot B^{-1}$ con ayuda del ordenador (subprograma NROOT), hallamos el valor mínimo de $k^2 = 39{,}25$. Véase en la respuesta la comparación con el valor exacto.

11.63. En el caso del ala de un solo larguero el centro de rigidez (el centro de flexión) de la sección se encuentra en el punto K de la pared del larguero. El momento torsor es igual a

$$M_{tor} = Qa = 1{,}8 \cdot 10^5 \cdot 0{,}32 = 5{,}76 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

El área doble que abraza el contorno de la sección es igual a

$$\omega_{cont} = \pi \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}11 + (0{,}22 + 0{,}18) \cdot 0{,}8 = 0{,}527 \text{ m}^2.$$

Consideramos que el contorno izquierdo de la sección es una semielipse y el contorno derecho, un trapecio. La parte de la cola representada en la figura del problema con línea de trazos se desprecia.

El esfuerzo cortante es absorbido generalmente por la pared del larguero. Las tensiones tangenciales en la pared son

$$\tau_1 = \frac{Q}{h_1 t_1} = \frac{1{,}8 \cdot 10^6}{0{,}22 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 1{,}64 \cdot 10^8 \text{ Pa}.$$

Las tensiones tangenciales en el revestimiento debidas al momento torsor son

$$\tau_2 = \frac{M_{tor}}{\omega_{cont} \cdot t_2} = \frac{5{,}76 \cdot 10^4}{0{,}527 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 5{,}42 \cdot 10^7 \text{ Pa}.$$

11.64. Consideramos que el momento torsor lo recibe el revestimiento. La pared del larguero prácticamente no trabaja.

$$\omega_{tor} = \pi \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}12 + (0{,}24 + 0{,}18) \cdot 1 = 0{,}59 \text{ m}^2.$$

$$\tau = \frac{M_{tor}}{\omega_{cont} t} = \frac{1{,}6 \cdot 10^5}{0{,}59 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}} = 10{,}9 \cdot 10^7 \text{ Pa}.$$

11.65. En el ala de dos largueros el centro de rigidez (centro de flexión) K divide la distancia B entre los largueros en partes inversamente proporcionales a los momentos de inercia de los largueros. Calculamos los momentos de inercia de los largueros, tomando en consideración solamente las áreas de los cordones y despreciando la pared:

$$J_1 = 2F_1 \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 = \frac{F_1 h_1^2}{2} = 1{,}56 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4,$$

$$J_2 = 2F_2 \left(\frac{h_2}{2}\right)^2 = \frac{F_2 h_2^2}{2} = 4{,}38 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4.$$

Hallamos la distancia entre la pared del larguero delantero y el punto K

$$x_K = \frac{BJ_2}{J_1 + J_2} = 0{,}526 \text{ m}$$

El esfuerzo cortante crea respecto al punto K un momento torsor adicional

$$M_{tor,\,Q} = Q(a - x_K) = 3{,}8 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

El momento torsor total es igual a

$$M_{tor,\,tot} = M_{tor} + M_{tor,\,Q} = 1{,}13 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

El esfuerzo cortante se distribuye entre las paredes de los largueros, del mismo modo que el momento torsor, proporcionalmente a los momentos de inercia de los largueros.

Sobre el larguero delantero actúan

$$Q_1 = \frac{QJ_1}{J_1 + J_2} = 6{,}25 \cdot 10^5 \text{ N}, \quad M_{f\cdot 1} = \frac{M_\pi J_1}{J_1 + J_2} = 5{,}93 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Para el larguero trasero quedan $Q_2 = 1{,}75 \cdot 10^6$ N y $M_{f\,2} = 1{,}67 \cdot 10^7$ N·m.

El área doble que abraza el contorno es igual a

$$\omega_{cont} = \pi b h_1/2 + (h_1 + h_2) B = 4{,}74 \text{ m}^2.$$

Las tensiones en el revestimiento provocadas por el momento torsor son

$$\tau_{tor} = \frac{M_{tor}}{\omega_{cont} t_2} = 9{,}54 \cdot 10^7 \text{ Pa.}$$

Las tensiones tangenciales en la pared del larguero, tomando en consideración el ángulo de conicidad γ se calculan mediante la fórmula

$$\tau = \frac{1}{ht}\left(Q - \frac{M_t \gamma}{h}\right).$$

Para el larguero delantero $\tau_1 = 1{,}46 \cdot 10^8$ Pa.
Para el larguero trasero $\tau_{2,Q} = 7{,}66 \cdot 10^7$ Pa.
Es necesario tener en cuenta que por la pared del larguero además de una corriente de esfuerzos tangenciales debidos a la fuerza cortante pasa una corriente de esfuerzos tangenciales debidos a la torsión que absorbe el contorno exterior. Por eso las tensiones totales en la pared del larguero trasero se determinan como la suma de los esfuerzos debidos a la fuerza cortante y a la torsión:

$$\tau_2 = \tau_{2,Q} + \frac{M_{tor}}{\omega_{cont} t_2} = 1{,}72 \cdot 10^8 \text{ Pa.}$$

11.67. Antes de la rotura del ala el área doble del contorno de la sección es

$$\omega_{cont} = \pi \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}15 + (0{,}3 + 0{,}24) \cdot 1 = 0{,}82 \text{ m}^2.$$

El esquema del ala es de dos largueros

$$J_1 = \frac{F_1 h_1^2}{2} = 8{,}1 \cdot 10^{-4} F_2, \quad J_2 = \frac{F_2 h_2^2}{2} = 2{,}88 \cdot 10^{-4} F_2,$$

$$X_K = \frac{BJ_2}{J_1 + J_2} = 0{,}26 \text{ m}, \quad M_{tor} = Q(a - x_K) = 3{,}8 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

La corriente de esfuerzos tangenciales en el revestimiento es igual a

$$q_{tor} = \frac{M_{tor}}{\omega_{cont}} = 4{,}63 \cdot 10^4 \text{ N/m}.$$

El larguero delantero está sometido a la acción de la fuerza

$$Q_1 = \frac{QJ_1}{J_1 + J_2} = 1{,}48 \cdot 10^4 \text{ N}, \quad q_1 = \frac{Q_1}{h_1} = 4{,}92 \cdot 10^5 \text{ N/m}.$$

El larguero trasero está sometido a la acción de $Q_2 = (2 - 1{,}48) \cdot 10^4 = 5{,}2 \times \times 10^4$ N. La corriente de esfuerzos tangenciales debidos a la fuerza cortante es

$$q_{2,Q} = \frac{5{,}2 \cdot 10^4}{0{,}24} = 2{,}17 \cdot 10^5 \text{ N/m}.$$

La corriente sumaria en la pared trasera debida a la fuerza cortante y al momento torsor es

$$q_2 = q_{2,Q} + q_{tor} = 2{,}63 \cdot 10^5 \text{ N/m}.$$

Después de la rotura del larguero trasero la parte restante del ala trabaja según el esquema de un solo larguero. El centro de rigidez se traslada a la pared del larguero delantero intacto (el punto A)

$$M_{tor} = Q \cdot a = 9 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad \omega_{cont} = \pi \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}15 = 0{,}283 \text{ m}^2,$$

$$q_{rev} = \frac{M_{tor}}{\omega_{cont}} = 3{,}18 \cdot 10^5 \text{ N/m}.$$

La fuerza cortante es absorbida totalmente por la pared intacta del larguero delantero $q_1 = Q/h_1 = 6{,}67 \cdot 10^5$ N/m. Puesto que la pared del larguero forma parte del contorno cerrado ésta recibe también q_{tot}. La corriente sumaria de esfuerzos tangenciales en la pared del larguero es

$$q_{par} = q_{rev} + q_1 = 9{,}85 \cdot 10^5 \text{ N/m}.$$

11.68. En la sección intacta el momento torsor crea una corriente de esfuerzos tangenciales por el contorno exterior de la sección. El área limitada por el contorno es igual a

$$\omega_{cont.1} = \pi \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}125 + (0{,}25 + 0{,}2) \cdot 1 = 0{,}65 \text{ m}^2.$$

La magnitud límite del momento torsor se determina a partir de la tensión límite τ_{lim} con la cual se produce la destrucción. Según el material y la construcción del ala para τ_{lim} se toman las tensiones críticas o el límite de fluencia del material:

$$M_{lim,\,1} = \omega_{cout.\,1} \cdot i_{2.\,1} \tau_{lim} = 0{,}65 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \tau_{lim} = 1{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot \tau_{lim}.$$

Una vez deteriorada la punta del ala, disminuye el área que abraza el contorno de la sección

$$\omega_{cont.2} = (0{,}25 + 0{,}2) \cdot 1 = 0{,}45 \text{ m}^2.$$

El grosor mínimo de la pared del contorno restante es $i_{min,\,2} = i_3 = 1{,}5$ mm; $M_{lim,\,2} = \omega_{cont.2} i_3 \tau_{lim} = 0{,}45 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} \tau_{lim} = 0{,}675 \cdot 10^{-3} \tau_{lim}$.

El valor límite del momento disminuirá en un 48%.

CAPÍTULO 12

PROBLEMAS DE OLIMPIADAS ESTUDIANTILES

12.1. El desplazamiento total del punto A consta del alargamiento del cable ACB bajo la acción de la fuerza P y del alargamiento doble del cable CD bajo la acción de la fuerza $2P$.

12.2. Los esfuerzos en las barras son iguales a la fuerza aplicada: $N = P/(2 \operatorname{sen} 30°) = P = 200$ kN. Las tensiones en las barras superan a σ_0; $\sigma = N/F = 200$ MPa. A partir del diagrama hallamos el alargamiento relativo de cada barra $\varepsilon = \sigma_0/E + (\sigma - \sigma_0)/(0{,}5E) = (2\sigma - \sigma_0)/E = 4 \cdot 10^{-4}$. Luego determinamos el alargamiento absoluto de las barras y el desplazamiento total del nudo.

12.6. Suponiendo que el alargamiento de las barras BB' y CC' es elástico, calculamos los esfuerzos en ellas aprovechando la ley de Hooke:

$$N_B = \Delta l_B EF/l = -8 \cdot 10^4 \text{ N (compresión)},$$
$$N_C = \Delta l_C EF/l = 2 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

El esfuerzo en la barra AA' se determina a partir de la condición de equilibrio de la barra AB componiendo la ecuación de momentos de las fuerzas que actúan sobre la barra respecto al punto B.

12.8. Primeramente hallamos el ángulo φ con el cual la fuerza P crea la carga máxima sobre las barras. La fuerza longitudinal N en la barra más cargada es $N_{AB} = \dfrac{P}{2}\left(\dfrac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\alpha}\right)$. Ella es máxima cuando $\varphi = \alpha$: $\text{máx}\, N_{AB} = P/\operatorname{sen} 2\alpha$. La tensión mínima y, por consiguiente, la masa mínima necesaria de las barras será cuando $\operatorname{sen} 2\alpha = 1$, $\alpha = \pi/4$.

12.9. El alargamiento $A'A''$ de la barra AC (véase la fig. del problema) según la ley de Hooke es $\Delta l = Nl/(EF)$, donde N es la fuerza longitudinal en la barra. De la condición de equilibrio del nudo en la posición A' tenemos $N = P/(2 \operatorname{sen} \alpha)$. En este caso $\cos\alpha = l/(l + \Delta l)$. Teniendo en cuenta las relaciones obtenidas, tenemos una ecuación no lineal para determinar el ángulo α

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{sen}\alpha = P/(2EF).$$

Descomponiendo $\operatorname{tg}\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$ en series exponenciales de α, obtendremos para él valores pequeños de α

$$\alpha = \sqrt[3]{P/(EF)}.$$

12.10. Aprovechar la solución del problema 12.9 considerando que en el punto de aplicación de la fuerza hay una articulación.

12.12. La eliminación de la barra 4 equivale a la carga de la viga OA con la fuerza $-N_0$ (dirigida hacia arriba) en el punto de aplicación de esta barra. Esta fuerza equilibra la tensión inicial N_0 en la barra 4. Los esfuerzos adicionales que aparecen en este caso en las tres barras restantes se hallan de las condiciones de equilibrio de la viga y de las condiciones de simultaneidad de las deformaciones.

12.13. Las magnitudes de los esfuerzos en las barras *1* y *4*, así como en las barras *2* y *3* deben ser iguales, pero sus signos deben ser contrarios: $N_1 = -N_4$; $N_2 = -N_3$. El alargamiento de la primera barra es tres veces mayor del alargamiento de la segunda barra. Por consiguiente, $N_1 = 3N_2$. Componemos la ecuación de equilibrio de la barra inferior, igualando a cero la suma de los momentos de las fuerzas que actúan sobre la barra respecto al punto O:

$$3N_2 \cdot 4a + N_2 \cdot 3a - N_2 \cdot 2a - 3N_2 a - M = 0.$$

Hallamos $N_2 = 0{,}1\ M/a$, $N_1 = 0{,}3\ M/a$.

12.19. Debido a la simetría del sistema, la barra AB puede efectuar solamente movimientos de traslación. Según la condición de equilibrio $N_2 = -N_1/2$. Por eso las magnitudes de los alargamientos elásticos de las tres barras son iguales, pero sus signos son distintos:

$$|\Delta l_1| = N_1 l/(E \cdot 2F) = |\Delta l_2| = N_1 l/(2EF).$$

Estos alargamientos compensan por completo las deformaciones de origen térmico. La viga AB y toda sección de cada barra permanecen inmóviles. Las tensiones en las barras son $\sigma = \varepsilon_t E = \alpha \Delta t \cdot E$.

12.20. Antes de cerrar la holgura los desplazamientos máximos w de las secciones de las barras están dirigidos al encuentro uno de otro y sus magnitudes son iguales. Después de cerrar el huelgo aparece una fuerza longitudinal N que se determina a partir de la condición de igualdad del alargamiento sumario de ambas barras al huelgo Δ:

$$2\alpha ta - \frac{Na}{E \cdot 2F} - \frac{Na}{EF} = \Delta; \qquad N = \frac{(2\alpha ta - \Delta)\, 2EF}{3a}.$$

El desplazamiento de la sección B (hacia la derecha) es $w_B = \alpha ta - Na/(2EF)$. El desplazamiento de la sección C (hacia la izquierda) es $w_C = \alpha ta - Na/(EF)$.

12.21. Aprovechar la fórmula para la variación relativa del volumen del cubo.

12.22. La variación del volumen del espacio interior del cubo se determina solamente mediante la variación de la longitud de la arista del cubo a consecuencia de la compresión de cada cara del cubo por las presiones interior y exterior $\Delta V = \varepsilon_V V = 3\mu p a^3/E$.

12.23. Cuando $k \leqslant 3{,}5$, $\sigma_1 = 1{,}5\ \sigma_x$, $\sigma_2 = -k\sigma_x$, $\sigma_3 = -3{,}5\ \sigma_x$. Según la teoría de Mohr la tensión equivalente es

$$\sigma_e^V = \sigma_1 - 0{,}5\sigma_3 = 3{,}25\sigma_x.$$

Cuando $k > 3{,}5$; $\sigma_1 = 1{,}5\sigma_x$, $\sigma_2 = -3{,}5\sigma_x$, $\sigma_3 = -k\sigma_x$. La tensión equivalente es

$$\sigma_e^V = \sigma_1 - 0{,}5\sigma_3 = \frac{3+k}{2}\,\sigma_x;$$

la resistencia de la pieza disminuirá en la relación de $\dfrac{3+k}{2} : 3{,}25$.

12.25. Para el estado de tensión a) la tensión equivalente según la III teoría de resistencia $\sigma_e^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$. Para el estado de tensión b) tenemos, cuando $\sigma \geqslant \tau$ $\sigma_e^{III} = \sigma + \tau$, cuando $\sigma < \tau$ $\sigma_e^{III} = 2\tau$. De aquí se deduce que cuando $\sigma < 3\tau/2$ el estado de tensión a) es peligroso, cuando $\sigma > 3\tau/2$ es más peligroso el estado de tensión b).

12.28. De las condiciones de equilibrio del triángulo en el lado AC $\sigma_1 = 3{,}73\tau$, las tensiones tangenciales son iguales a cero. La segunda tensión principal se halla mediante la fórmula para el estado tensional plano $\sigma_2 = 1{,}42\tau$. Utilizamos la II teoría de resistencia $\sigma_e^{II} = 3{,}73\tau - 0{,}25 \cdot 1{,}42\tau = 3{,}375\,\tau = 33{,}75$ MPa < 80 MPa. La condición de resistencia se cumple.

12.36. Hallamos los momentos en los empotramientos A y B

$$\varphi_{AB}=\frac{M_A kl}{G\cdot 0{,}1D^4}+\frac{(M_A-K)l\,(1-k)}{G\cdot 0{,}1d^4}=0,$$

$$M_A=\frac{2{,}07\,(1-k)}{2{,}07-1{,}07k}K;\quad M_B=\frac{k}{2{,}07-1{,}07k}K.$$

La magnitud k se determina a partir de la condición $M_A/(0{,}2D^3)=M_B/(0{,}2d^3)$. Después de sustituir los valores obtenidos más arriba hallamos $k=0{,}545$.

12.41. $J_y=J_z=a^4/24$ son los momentos de inercia de la mitad del cuadrado. El momento de inercia respecto al eje OA es también igual a $a^4/24$. De aquí se deduce que $J_{yz}=0$.

12.43. Dividir la sección en dos angulares iguales. El primer eje principal pasa por los centros de gravedad de los angulares (por la línea O_1O_2), el segundo es perpendicular al primero y pasa por el centro de gravedad de la sección O y por el punto B.

12.45. El momento de inercia de la figura exterior rayada es igual a $J_1=\frac{a^4}{12}-\frac{1}{12}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4=\frac{a^4}{16}$. Las dimensiones lineales de cada figura posterior interior son dos veces menores que las dimensiones de la anterior y el momento de inercia, 16 veces menor. Sumando todos los momentos de inercia obtenemos la suma de una progresión decreciente infinita con el denominador igual a 1/16:

$$J_z=J_1+J_2+J_3+\ldots=\frac{a^4}{16}\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{256}+\ldots\right)=\frac{a^4}{15}.$$

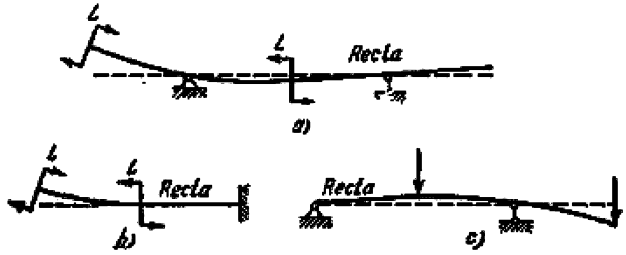
12.46. Entre h y b debe mantenerse la relación $h^2+b^2=D^2$, donde D es el diámetro del círculo. $W_z=bh^2/6=b\,(D^2-b^2)/6$. Hacemos la diferenciación de esta expresión respecto a b e igualamos el resultado a cero. Obtendremos $h/b=\sqrt{2}$.

12.50. Una vez calculados los momentos de inercia de la figura respecto a los ejes y y z nos convencemos de que estos momentos son iguales. Éstos son los momentos principales de inercia, puesto que el eje y es el eje de simetría de la figura. Por consiguiente, la magnitud del momento de inercia no depende del ángulo α.

12.51. El ancho de la viga debe ser $b=Bx/l$, donde B es el ancho de ésta junto al empotramiento; x, la distancia entre la sección y el extremo libre.

En este caso la rigidez en una sección arbitraria es igual a $EJ=E\frac{BH^3}{12}\frac{x}{l}$ y la curvatura es $\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EJ}=\frac{12l}{EBH^3x}Px=\text{const}$.

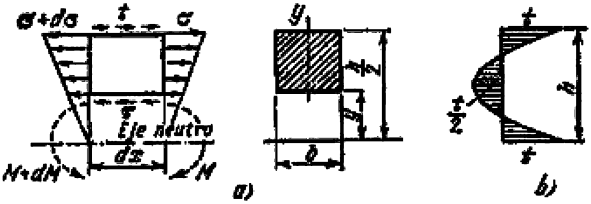
12.52. Las formas de la curvatura están representadas en la figura. Primeramente hace falta construir los diagramas M.



Para el problema 12.52

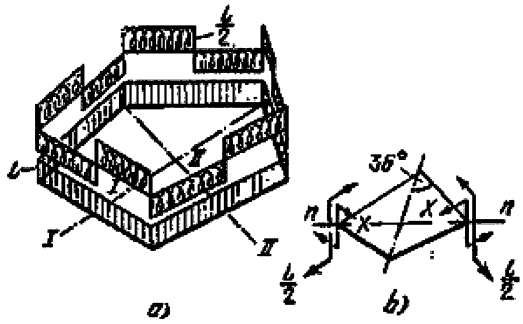
12.53. Examinamos, igual que durante la deducción de la fórmula de Zhuravski, un elemento de la viga de longitud dx limitado por una sección horizontal a una distancia y del eje neutro (fig. *a*). Considerando que las tensiones τ son constantes a lo ancho de la viga, obtenemos a partir de la condición de equilibrio del elemento: $\tau b\,dx = -dN + tb\,dx$, donde $dN = \frac{dM_z}{J_z} S_z^{sec}$.

Por consiguiente, $\tau = -\frac{dM}{dx}\frac{S_z^{sec}}{J_z b} + t$. El momento flector M en la sección $1-1$ es igual a $tbhx$; de aquí $dM/dx = tbh$ (observemos que en este caso la viga está sometida a la acción de un momento exterior distribuido de intensidad $m = tbh$, por eso $dM/dx = m$; $dM/dx = Q$. Como resultado obtenemos $\tau = t\left(-\frac{hS_z^{sec}}{J_z} + 1\right)$. El diagrama τ en la sección transversal está representado en la figura *b*.



Para el problema 12.53

12.54. Teniendo en cuenta que la estructura tiene ejes de simetría y está cargada con momentos dispuestos en planos perpendiculares al plano de la estructura podemos concluir que en las secciones transversales $I-I$ y $II-II$ (fig. *a*) surgen solamente momentos torsores iguales a $L/2$ y momentos flectores incógnitos X en los planos perpendiculares al plano de la estructura. El momento



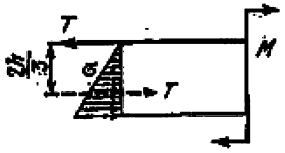
Para el problema 12.54

flector no cambia a lo largo de los tramos y es igual a X, puesto que los esfuerzos cortantes son nulos. Por consiguiente, los diagramas de los momentos flectores y torsores tienen la forma representada en la figura *a*. La magnitud del momento flector X se determina a partir de la condición de equilibrio del elemento de la estructura representado en la figura *b*. Sumando los momentos respecto al eje $n-n$, obtenemos

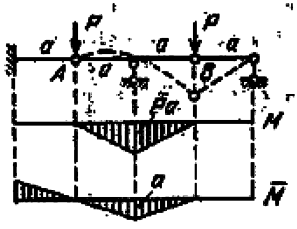
$$2X \operatorname{sen} 36° - 2\frac{L}{2}\cos 36° = 0,$$

de donde $X = 0{,}69L$.

12.70. Por cuanto la cinta es fina se puede considerar que en su sección surge solamente la fuerza longitudinal T y no un momento flector. El aspecto del diagrama de deformación está representado en la figura (consecuencia de la hipótesis de secciones planas). Un aspecto semejante tiene el diagrama de tensiones normales por la sección transversal. La resultante de las tensiones normales actúa a una distancia igual a $2h/3$ de la cinta. La magnitud de esta resultante debe ser igual al esfuerzo T en la cinta, puesto que la fuerza longitudinal total en la sección transversal de la construcción es igual a cero. Por consiguiente, todas las fuerzas que actúan en la sección transversal de la construcción se reducen al par T $(2h/3)$. Según la condición de equilibrio de la parte cortada de la construcción $M = T\,(2h/3)$. El momento será tope cuando $T = P$, es decir, $M_{tope} = 2Ph/3$.



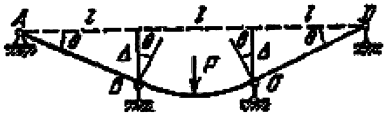
Para el problema 12.70



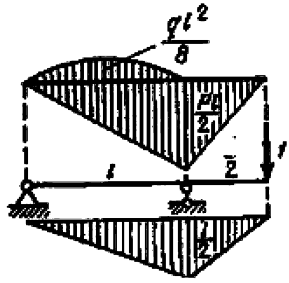
Para el problema 12.71

12.71. La forma del eje deformado de la viga está representada en la figura con línea de puntos. El desplazamiento de la articulación B se calcula más fácilmente mediante la regla de Vereschaguin $\delta_B = 2Pa^3/(3EJ)$. El desplazamiento de la articulación A es igual a cero.

12.72. Los momentos flectores en las secciones B y C son: $M_B = V_A l$ y $M_C = V_A l$. Puesto que según los datos del problema estos momentos son iguales a cero, no tendremos reacciones en los apoyos extremos A y D a causa de estos desplazamientos incógnitos: $V_A = 0$, $V_D = 0$. Esto significa que los momentos flectores en las secciones de los tramos extremos AB y CD son iguales a



Para el problema 12.72



Para el problema 12.74

cero, es decir, estos tramos de la viga al producirse los desplazamientos de los apoyos de la viga permanecen rectilíneos. El esquema de la deformación de la viga está representado en la figura. La magnitud Δ puede ser expresada por el ángulo de giro θ de la sección sobre el apoyo B (o de la sección C). En vista de que los desplazamientos son pequeños $\Delta = l\theta$. Los ángulos de giro de las secciones B y C determinados para la viga BC sobre apoyos articulados y cargada con una fuerza concentrada pueden ser determinados por cualquiera de los procedimientos conocidos (método de parámetros de origen, método grafoanalítico, por la fórmula de Mohr, etc.): $\theta = Pl^2/(16EJ)$. De este modo hallamos el desplazamiento incógnito de los apoyos: $\Delta = Pl^3/(16EJ)$.

12.73. El peso lineal de la banda es $q = bh\gamma$. En la sección A, donde la parte levantada de la banda pasa a ser horizontal, el momento flector es igual a cero. De aquí se deduce que $Px = qx^2/2$, de donde $x = 2P/q$ o $P = qx/2$. La otra mitad del peso de la parte levantada de la banda se transmite al plano en el punto A como fuerza concentrada. La magnitud de la flecha se halla mediante la fórmula (5) (pág. 283). Al elegir el origen de coordenadas en la sección A y tomando en consideración que $M(0) = 0$, $Q(0) = qx/2$, $v(0) = 0$, $\theta(0) = 0$, tenemos

$$f = \left(\frac{qx}{2} \cdot \frac{x^3}{6} - q\frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}\right) \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{qx^4}{24EJ} = \frac{2P^4}{3q^3EJ},$$

donde $J = bh^3/12$.

12.74. Utilizando la regla de Vereschaguin (véase la figura) determinamos que el desplazamiento en el punto de aplicación de la fuerza P es

$$\delta = \frac{1}{EJ}\left(-\frac{2}{3}\frac{ql^2}{8} l \frac{l}{4} + \frac{1}{2}\frac{Pl}{2}\frac{l}{2}\frac{l}{3} + \frac{1}{2}\frac{Pl}{2} l \frac{l}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{EJ}\left(-\frac{ql^4}{48} + \frac{Pl^3}{8}\right).$$

Igualando este desplazamiento a cero, obtendremos

$$q = 6P/l.$$

Capítulo 1

1.1. $N = 400$ kN, $\sigma = 204$ MPa $< \sigma_{prop}$. 1.2. $E = 7{,}01 \cdot 10^4$ MPa, aleación de aluminio. 1.3. $\delta_{unif} = 0{,}13$, $\delta_{med} = 0{,}27$, $\delta_{máx} = 0{,}9$, $\psi = 0{,}64$. 1.4. $E = 1{,}98 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{0{,}002} = 273$ MPa. 1.5. $E = 1{,}9 \cdot 10^5$ MPa, $\mu = 0{,}28$. 1.6. $\mu = 0{,}28$. 1.7. $\Delta\sigma_{med} = 50$ MPa, máx $\Delta\sigma = 95$ MPa, $\alpha_{fl} = 1{,}9$. 1.8. $\sigma_r = 579$ MPa, $\delta = 0{,}26$, $\psi = 0{,}51$, $a = 128$ MJ/m^3. $\sigma_{máx} = 1000$ MPa. 1.9. $s = 2$ cm, $\sigma_{máx} = 400$ MPa. 1.10. $\Delta E = \pm 4{,}6\%$. 1.11. $\sigma = 200$ MPa, $\Delta l = 0{,}25$ mm $\varepsilon = 10^{-3}$. 1.12. $P = 110$ kN, $\sigma = 200$ MPa. 1.13. $\sigma_1 = 47{,}7$ MPa, $\sigma_2 = 131$ MPa, $\Delta l = 0{,}18$ mm. 1.14. $\sigma_{CB} = 200$ MPa, $\sigma_{AB} = -64{,}7$ MPa (compresión). Después del giro del brazo: $\sigma_{CB'} = 346$ MPa, $\sigma_{AB'} = -67$ MPa (compresión). 1.15. $\sigma_{AB} = -20$ MPa, $\sigma_{BF} = 150$ MPa, $\sigma_{BC} = 174$ MPa, $\sigma_{AC} = 55{,}4$ MPa, $\Delta l_{AC} = 1{,}85$ mm. 1.16. $\sigma_{AB} = 24{,}6$ MPa, $\Delta_C = 1{,}14$ mm. 1.17. $\sigma = 70{,}7$ MPa, $\varepsilon = 5{,}9 \cdot 10^{-4}$, $\Delta l = 0{,}59$ mm. 1.18. $N_{máx} = 100$ kN, $\sigma_{máx} = 141$ MPa, $w_{máx} = 0{,}3$ mm. 1.19. $N_{máx} = -80$ kN (compresión), $\sigma_{máx} = -53{,}3$ MPa (compresión), $\varepsilon_{máx} = -2{,}66 \cdot 10^{-4}$, $w_{máx} = -0{,}133$ mm (sección III—III). 1.20. $c_{esc} = \dfrac{\pi E D^2 \alpha^3}{4l_1(1+\alpha^2\beta)}$ $c_{huec} = \dfrac{\pi E D^2 (1-\alpha^3)}{4l_1(1+\beta)}$, $\beta = \dfrac{(1-2\alpha^2)}{\alpha^4}$. 1.21. $d = 15$ mm. 1.22. En la varilla: $\sigma = 153$ MPa < 160 MPa, en el cilindro: $\sigma = 250$ MPa < 300 MPa. 1.23. $P = 50$ kN, $\Delta_B = 4{,}62$ mm. 1.24. $F_{AB} = 24{,}2$ cm^2, $F_{AC} = 82$ cm^2. 1.25. $\Delta_x = 0{,}033$ mm, $\Delta_y = 0{,}115$ mm, $\theta = 74^\circ$, $\Delta = 0{,}12$ mm. 1.26. $\Delta_y = 1{,}25$ mm (está dirigido hacia arriba). 1.27. $\Delta_y = 4$ mm (está dirigido hacia arriba). 1.28. $F = 4{,}42$ cm^2, $\Delta_y = 3{,}9$ mm. 1.29. $\Delta_x = 2$ mm, $\Delta_y = 2$ mm, $\Delta = 2{,}83$ mm. 1.30. $\Delta_x = 4$ mm, $\Delta_y = 4$ mm, $\Delta = 5{,}66$ mm. 1.31. $P = 60$ kN, aumentará en un 4%. 1.32. $N_{AB} = 0{,}634P$, $N_{AC} = 0{,}112P$, $N_{AD} = -0{,}463P$, $N_{AE} = -0{,}522P$. 1.33. $P = 55$ kN (disminuirá en un 3%). 1.34. $N_{AB} = 0{,}365P$, $N_{AC} = 0{,}464P$, $N_{AD} = -0{,}17P$, $N_{AD} = 0{,}197P$, $N_{AE} = -0{,}268P$. 1.35. $N_{AB} = 0{,}584P$; $N_{AC} = 0{,}476P$, $N_{AD} = 0{,}247P$, $F = 3{,}65$ cm^2. 1.36. $N_{AB} = 0{,}388P$, $N_{AC} = N_{AD} = 0{,}612P$; $N_{BD} = N_{BC} = -0{,}224P$, $F = 5{,}74$ cm^2. 1.37. $P = 150$ kN aumentará hasta 200 kN. 1.38. $X_A = 2{,}2$ kN, $X_B = 0{,}8$ kN. 1.39. $X_A = 268$ kN, $X_B = 734$ kN, $\sigma_{máx} = -155$ MPa (compresión), $w_{máx} = 0{,}155$ mm. 1.40. $F = 5$ cm^2, $w_C = 0{,}2$ m (desplazamiento hacia abajo), $\Delta l_{CD} = -0{,}04$ mm (compresión). 1.41. $P_{ac} = 0{,}28P$, $P_{dur} = 0{,}72P$, $P = 697$ kN, el acortamiento de los angulares $\Delta = 0{,}4$ mm, en este caso $P = 940$ kN. 1.42. $P_{ac} = 0{,}75P$, $P_{dur} = 0{,}25P$, $[P] = 160$ kN. 1.43. $H_A = 44{,}2$ kN, $H_B = 45{,}8$ kN, $w_{máx} = 0{,}45$ mm, $\sigma_{máx} = 368$ MPa. 1.44. $N_{máx} = 300$ kN, $F = 16{,}7$ cm^2. 1.45. $q = 153{,}4$ kN/m. 1.46. $N_{AA'} = 0{,}619P$, $N_{BB'} = 0{,}143P$, $N_{CC'} = 0{,}238P$; $P = 258$ kN. Cuando $x = 2a$ es el desplazamiento de traslación, $P = 280$ kN.

1.47. $N_{AD} = N_{AE} = 8$ kN, $F = 0{,}8$ cm², $\Delta = 31$ mm. 1.48. $N_A = -42$ kN, $N_B = -25$ kN, $N_C = -8$ kN, $N_D = -25$ kN, $F = 8{,}4$ cm², $\Delta_A = 0{,}25$ mm. 1.49. $N_1 = 1{,}92P$, $N_2 = 2{,}2P$, $N_3 = 2{,}2P$, $P \leqslant 14{,}5$ kN. 1.50. $N_{CD} = 1{,}524P$, $N_{BD} = 0{,}508P$, $F = 4{,}76$ cm². 1.51. $\sigma = 125$ MPa; cuando $T = 275$ K. 1.52. 1) En la parte delgada de la barra $\sigma = 125$ MPa, $N = 25$ kN; 2) $\sigma = 75$ MPa, $N = 15$ kN; 3) $\sigma = 75$ MPa, $N = 30$ kN. 1.53. $\sigma_{AC} = 48$ MPa, $\sigma_{AB} = \sigma_{AD} = -13{,}8$ MPa (compresión), $\Delta_A = 2{,}5$ mm. 1.54. $N_{DB} = -260$ kN, $\sigma_{DB} = -520$ MPa (compresión), $N_{DC} = 192{,}5$ kN, $\sigma_{DC} = 192{,}5$ MPa. 1.55. $N = 23{,}3$ kN, $\sigma_{perno} = 116{,}5$ MPa, $\sigma_{casquillos} = -51{,}5$ MPa. 1.56. $\sigma_{AB} = -2{,}1$ MPa, $\sigma_{AC} = 8{,}4$ MPa, $\sigma_{AD} = -7{,}27$ MPa. 1.57. a) $\sigma_1 = \sigma_2 = -33{,}3$ MPa, $\sigma_3 = 66{,}7$ MPa; b) $\sigma_1 = \sigma_3 = 16{,}7$ MPa, $\sigma_2 = -33{,}3$ MPa. 1.58. $\sigma_1 = \sigma_3 = 32{,}6$ MPa, $\sigma_2 = -56{,}5$ MPa. 1.59. $\sigma_{CD} = 58{,}8$ MPa. $\sigma_{BE} = 167{,}5$ MPa. 1.60. $\sigma_{AB} = 88{,}4$ MPa, $\sigma_{AC} = -88{,}4$ MPa, $\sigma_{AD} = 125$ MPa. 1.61. $\sigma = 0{,}77$ MPa, $w_{máx} = 0{,}0183$ mm, $l_{máx} = 2080$ m. 1.62. $F = 260$ cm², $w_{máx} = 0{,}392$ mm. 1.63. $d_1 = 1{,}21$ cm, $d_2 = 1{,}215$ cm, $d_3 = 1{,}22$ cm, $d_4 = 1{,}225$ cm. La varilla escalanada es más ligera en 10,5 N.

1.64. $V_A = \dfrac{\rho g a F_a}{2} \dfrac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2+2\frac{b}{a}\frac{F_a}{F_b}}{1+\frac{b}{a}\frac{F_a}{F_b}}$, $V_B = \rho g\,(aF_a+bF_b) - V_A$. 1.65. $\sigma_{máx} = 90$ MPa, $w_{máx} = 4{,}4 \cdot 10^{-3}$ mm, $l_{lím} = 22{,}5$ cm. 1.66. $F = 0{,}51$ cm². 1.67. $G = P\rho g \dfrac{[\sigma]\,l - \rho g\,(l-x)\,x}{([\sigma]-\rho g x)\,([\sigma]-\rho g(l-x))}$. Cuando $x = \dfrac{l}{2} - \dfrac{[\sigma]}{\rho g} + \sqrt{\dfrac{l^2}{4} + \left(\dfrac{[\sigma]}{\rho g}\right)^2}$ el peso es mínimo. 1.68. $x = 3$m. 1.69. a) $G = \dfrac{\rho g P l}{[\sigma]_{tr} \cos^2 \alpha}$, $\alpha = 0°$, b) $G = \dfrac{3\rho g P l}{[\sigma]_{tr} \operatorname{sen} 2\alpha}$, $\alpha = 45°$. 1.70. $h = 2{,}83$ m, $G = 92{,}8$ N. 1.71. $P_{lím} = 142$ kN, $[P] = 71$ kN (aumentará en un 18,3%). 1.72. $P_{lím} = 219$ kN. 1.73. $P_{lím} = 180$kN. 1.74. $P_{lím} = 120$ kN, $\Delta = 0{,}6$ mm. 1.75. $P_{lím} = 350$ kN, $n = 1{,}5$. 1.76. $P_{lím} = 437$ kN, $n = 1{,}17$. 1.77. $P_{lím,\,2} : P_{lím,\,1} = 2$. 1.78. $P_{lím}$ disminuirá en 167 kN. 1.79. $[P] = 1{,}57$ MN, $[P]_{lím} = 1{,}73$ MN. 1.80. $[P] = 3{,}7$ MN, $[P]_{lím} = 4{,}4$ MN. 1.81. $\sigma = 25$ MPa, $\tau = 43{,}4$ MPa, $\sigma_{máx} = 100$ MPa, $\tau_{máx} = 50$ MPa. 1.82. $P = 80$ kN. 1.83. $\varphi = 39° 12'$. 1.84. $\alpha = 21°48'$, $\sigma_{máx} = -116$ MPa (compresión), $\tau_{máx} = 58$ MPa. 1.85. $d = 3{,}57$ cm, $\sigma_{45°} = 60$ MPa. 1.86. $\alpha = 31°$, $\sigma_\alpha = 147$ MPa, $\tau_\alpha = 88{,}3$ MPa. 1.87. $\sigma_\alpha = 147$ MPa, $\tau_\alpha = 17$ MPa, $\sigma_{\alpha+90} = 53$ MPa, $\tau_{\alpha+90} = -17$ MPa. 1.88. $\alpha_1 = 45°$, $\alpha_2 = -45°$, $\tau = \pm 120$ MPa. 1.89. $\varepsilon_v = 4{,}5 \cdot 10^{-4}$. 1.90. $\Delta_1 = 0{,}225$ mm, $\Delta_2 = -0{,}15$ mm, $\Delta F = 0{,}14$ cm², $\Delta V = 0{,}1$ cm³. 1.91. $\sigma_1 = 142$ MPa, $\sigma_2 = -242$ MPa, $\alpha = -19° 21'$. 1.92. $\sigma_{1,2} = \pm 67$ MPa, $\alpha = -31° 43'$. 1.93. $\alpha = 17° 45'$, $\varepsilon_1 = 6{,}5 \cdot 10^{-4}$, $\Delta n = 6{,}5$. 1.94. $\varphi = 38°$. 1.95. $\varepsilon_v = -0{,}467 \cdot 10^{-3}$. 1.96. $\mu = 0{,}3$, $\varepsilon_v = -3{,}3 \cdot 10^{-4}$, $\Delta l = -0{,}034$ mm. 1.97. $\varepsilon_v = -3{,}25 \cdot 10^{-4}$, $\tau_{máx} = 12{,}1$ MPa, $\tau_{oct} = 11{,}4$ MPa. 1.98. $\tau_{máx} = 395$ MPa, $\sigma_{oct} = -737$ MPa, $\tau_{oct} = 372$ MPa. Después de aplicar la fuerza N $\tau_{máx} = 592$ MPa, $\sigma_{oct} = -859$ MPa, $\tau_{oct} = 558$ MPa. 1.99. $\tau_{máx} = 70$ MPa, $\sigma_{oct} = 40$ MPa, $\tau_{oct} = 58{,}9$ MPa, $\varepsilon_v = 5 \cdot 10^{-4}$. 1.100. $\sigma_1 = 144{,}7$ MPa, $\sigma_2 = 100$ MPa, $\sigma_3 = 55{,}3$ MPa, $\sigma_{oct} = 100$ MPa, $\tau_{oct} = 36{,}5$ MPa, $\varepsilon_v = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$, $\tau_{máx} = 44{,}7$ MPa. 1.101. $\sigma_{e,\,II} = 76$ MPa, $\sigma_{e,\,III} = 120$ MPa, $\sigma_{e,\,IV} = 112$ MPa, $\sigma_{e,\,V} = 78$ MPa. 1.102.

$\sigma_{e,\,II} = 92{,}5$ MPa, $\sigma_{e,\,III} = 160$ MPa, $\sigma_{e,\,IV} = 139{,}0$ MPa, $\sigma_{e,\,V} = 115{,}0$ MPa. 1.103. $p = 1{,}5$ MPa. 1.104. $h = 6{,}5$ mm. 1.105. $\sigma_{e,\,V} = 19{,}2$ MPa < 20 MPa, la condición de resistencia se cumple. 1.106. $\tau = 86{,}6$ MPa. 1.107. $\sigma_1 = 140$ MPa, $\sigma_2 = 70$ MPa, el factor de seguridad disminuirá en un 22%. 1.108. $\sigma_{e,\,V} = 180$ MPa > 160 MPa, la condición de resistencia no se cumple. 1.109. $\sigma_x = 42{,}4$ MPa, $\sigma_y = 21{,}2$ MPa, $\tau = 10{,}6$ MPa. Se aumentará en un 12%. 1.110. $\sigma_{e,\,II} = 171$ MPa, $\sigma_{e,\,IV} = 178$ MPa. 1.111. $T = 630$ N, $H = 615$ N, $f = 0{,}5$ m. 1.112. $\sigma = 430$ MPa, $f = 36{,}1$ cm. 1.113. $\Delta = 0{,}48$ m, $E = 1$ cm^2. 1.114. $H = 432$ N. 1.115. $H = 2{,}6$ kN, $f = 0{,}118$ m. 1.116. $p_{destr} = 72$ MPa. 1.117. Cuando $90° > \alpha > 45°$ $\sigma_2 = \dfrac{\rho g r^2}{h}\left(\dfrac{1 + \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}{3(1+\operatorname{sen}\alpha)} = 0{,}355\right)$, $\sigma_1 = \dfrac{\rho g r^2}{h}\cdot(\operatorname{sen}\alpha - 0{,}707) - \sigma_2$; cuando $\alpha < 45°$ $\sigma_2 = -\sigma_1 = \dfrac{0{,}0382\rho g r^2}{h\cos^2\alpha}$. La tensión máxima es $\sigma_{máx} = 0{,}15\dfrac{\rho g r^2}{h} = 4{,}5$ MPa. Cuando el vaso está lleno hasta los bordes $\sigma_{máx} = 0{,}5\dfrac{\rho g r^2}{h} = 15$ MPa. 1.118. $p = 3{,}2$ MPa, $\sigma_1 = 160$ MPa, $\sigma_2 = 80$ MPa. 1.119. $p = 0{,}96$ MPa. 1.120. $p = 1{,}5$ MPa, $\sigma_{ac} = 75$ MPa, $\sigma_{cob} = -18{,}8$ MPa (compresión). 1.121. $p = 2{,}6$ MPa, $\sigma_{ac} = 73$ MPa, $\sigma_{lat} = -24{,}3$ MPa (compresión). 1.122. $\Delta T = 52{,}5$ K, $\sigma_{ac} = 108$ MPa, $\sigma_{cob} = -13{,}5$ MPa (compresión). 1.123. $\sigma_1 = 250$ MPa, $\sigma_2 = 0$ (parado), $\sigma_1 = 125$ MPa, $\sigma_2 = 62{,}5$ MPa (después del despegue). 1.124. $p_{llm} = 45$ MPa, $p = 18{,}2$ MPa. 1.125. En la parte cilíndrica $\sigma_1 = \dfrac{\rho g R}{h}(H - y)$, máx $\sigma_1 = \dfrac{\rho g R}{h}(H - R) = 7{,}84$ MPa (cuando $y = R$); $\sigma_2 = \text{const} = \dfrac{\rho g R}{2h}\left(H - \dfrac{R}{3}\right) = 5{,}22$ MPa. En la parte esférica máx $\sigma_1 =$ máx $\sigma_2 = \dfrac{\rho g H R}{2h} = 5{,}88$ MPa (cuando $y = 0$). 1.126. $\sigma_1 = \dfrac{p + \rho g y}{2h} D$, $\sigma_2 = \text{const} = \dfrac{\rho D}{4h}$. 1.127. $\sigma_{máx} = 25$ MPa para la bóveda cónica, $\sigma_{máx} = -25$ MPa para la bóveda cilíndrica (compresión). 1.128. Cuando $y < H$, $\sigma_1 = \dfrac{\rho g \operatorname{tg}\alpha}{h\cos\alpha}(Hy - y^2)$, $\sigma_2 = \dfrac{\rho g \operatorname{tg}\alpha}{h\cos\alpha}\left(\dfrac{H}{2}y - \dfrac{y^2}{3}\right)$; cuando $y > H$ $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \dfrac{\rho g \operatorname{tg}\alpha H^3}{6hy\cos\alpha}$. El valor máximo de la tensión es $\sigma_{máx} = 13{,}9$ MPa. 1.129. $\sigma_1 = \dfrac{x\operatorname{tg}\alpha}{(b-a)h\cos\alpha}[p_a(b-x) + p_b(x-a)]$, $\sigma_2 = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{6x(b-a)h\cos\alpha}[p_a[3(x^2-a^2)b - 2(x^3-a^3)] + p_b(2x^3 - 3x^2a + a^3)]$. 1.130. $p = 11{,}4$ MPa, $\Delta d = 0{,}05$ mm.

Capítulo 2

2.1. $\gamma = 12{,}8'$, $\Delta = \pm 0{,}66$ mm. 2.2. $\tau_{máx} = 120$ MPa, $\alpha = \pm 45°$, $\gamma = 5{,}2'$. 2.3. $\mu = 0{,}33$, $E = 2\cdot 10^5$ MPa, $G = 7{,}5\cdot 10^4$ MPa, acero. 2.4. $\tau = 80$ MPa, $a = 40$ kJ/m^3. 2.5. $\gamma = 1{,}92\cdot 10^{-3}$ rad, $\Delta_C = 0{,}48$ mm, $\sigma_1 = -\sigma_2 = 50$ MPa, $\Delta l_{AC} = -\Delta l_{BC} = 0{,}338$ mm. 2.6. $P = 198$ kN. 2.7. $B = 1{,}5d$, $h = 0{,}7d$, $d = 20$ mm. 2.8. $[M] = 600$ N·m. 2.9. $b = 8$ mm, $D = 56$ mm. 2.10. $[P] = 50$ kN. 2.11. $n = 4$ según la condición de resistencia al cizallamiento. 2.12. $n = 10$ según la condición de resistencia al aplastamiento. 2.13. $P = 312$ kN, la resistencia de las hojas disminuirá un 20%. 2.14. $\tau = 53$ MPa < 80 MPa, $\sigma_{ap} = 121{,}5$ MPa < 200 MPa. La resistencia de la unión está asegurada. 2.15. $d = 19$ mm. 2.16. El remache 2 está más cargado. $\tau = 101{,}5$ MPa < 110 MPa, $\sigma_{ap} = 138$ MPa < 200 MPa. Las condiciones de resistencia se cumplen. 2.17. $P_1 = P_3 = 6{,}85$ kN; $P_2 = P_4 = 7{,}28$ kN. El fac-

tor de seguridad disminuirá en un 6%. 2.18. $e = 1{,}5d$. 2.19. $b = 11$ cm, el material se aprovecha en un 65%. 2.20. $P_{máx} = 202$ kN, el material se aprovecha en un 80%. 2.21. $l = 24$ cm (se añaden 2 cm para compensar la soldadura incompleta), el material se aprovecha al 100%. 2.22. $h = 8{,}5$ mm. 2.23. $b = 170$ mm, $l = 40$ cm (se añaden 2 cm para compensar la soldadura incompleta. 2.24. $l_1 = 30$ cm, $l_2 = 13$ cm. 2.25. Las condiciones de resistencia se cumplen. 2.26. $\mu = 0{,}29$, $G = 7{,}75 \cdot 10^4$ MPa. 2.27. $G = 2{,}75 \cdot 10^4$ MPa, $\Delta\varphi = 1°10'$. 2.28. $G = 7{,}1 \cdot 10^4$ MPa. 2.29. $N = 188$ kW, $\varphi = 35'$. 2.30. $M_{tor} = 185$ kN·m, $D = 22{,}8$ cm. 2.31. Según la resistencia mecánica $D = 6{,}7$ cm, según la rigidez, $D = 6{,}4$ cm, definitivamente $D = 6{,}7$ cm. 2.32. $N = 10{,}8$ kW. 2.33. máx $M_{tor} = 9$ kN·m, $\tau_{máx} = 50$ MPa, máx $\varphi' = 1{,}29 \cdot 10^{-2}$, $\varphi_{máx} = 53{,}5'$, $D = 9{,}7$ cm. 2.34. $W_{hue}/W_{mac} = 2{,}73$, $J_{p.\,hue}/J_{p.\,mac} = 4{,}56$, $Q_{mac}/Q_{hue} = 1{,}96$. 2.35. $\varphi_{al}/\varphi_{ac} = 1{,}43$, $m_{ac}/m_{al} = 2{,}22$. 2.36. $D = 18$ cm, $d = 16{,}5$ cm, $m_{mac} = 133$ kg, $m_{hue} = 48{,}2$ kg. 2.37. $D_0 = 4{,}32$ cm, $D = 4{,}74$ cm. 2.38. $D_1/D_2 = 1{,}26$. 2.39. $D = 6{,}8$ cm, $d = 4$ cm, $\varphi_{máx} = 13{,}3'$ (el extremo izquierdo es fijo). 2.40. $M_{máx} = 12$ kN·m, $D_1 = 6{,}35$ cm, $D_2 = 11{,}5$ cm, $D_3 = 10$ cm, $\varphi_{máx} = 52'$. 2.41. $D = 5{,}75$ cm. 2.42. $M_{máx} = 8{,}8$ kN·m, $\varphi_{máx} = 4{,}1°$. 2.43. $M_{máx} = 137{,}7$ kN·m, $\varphi_{máx} = 15'$, la condición de resistencia junto al empotramiento izquierdo no se cumple, la condición de rigidez se cumple. 2.44. $\frac{K_1}{K_2} = \frac{(a + l_1 - l_2)}{(a - l_1 + l_2)}$. 2.45. $M = 5{,}25$ kN·m. 2.46. $x = 1{,}43$ cm, $K = 5{,}5$ kN·m. 2.47. $M_A = 1{,}96$ kN·m, $M_B = 0{,}84$ kN·m 2.48. $K = 15{,}7$ kN·m, $\varphi_{máx} = 39'$. 2.49. $K = 16{,}55$ kN·m, $\varphi_{máx} = 28{,}7'$. 2.50. $x = 0{,}482$ m. 2.51. $M_{lim} = 4{,}9$ kN·m. 2.52. $M_{lim} = 4{,}3$ kN·m. 2.53. $m_1/m_2 = 0{,}83$. 2.54. $K_{lim} = 10$ kN·m, disminuirá en dos veces. 2.55. $K_{lim} = 63{,}5$ kN·m, disminuirá en 5,6 veces. 2.56. $N = 40$ kW, $\varphi = 1°$ por 1 m. 2.57. $a = 9{,}4$ cm. 2.58. $\tau_{máx} = 62{,}5$ MPa, $\varphi = 1{,}8°$. 2.59. $b = 11$ cm. 2.60. $d = 4{,}8$ cm, $\tau_{máx} = 48{,}7$ MPa, $\varphi_{máx} = 19'$. 2.61. Para el continuo: $W_p = 42{,}4$ cm^3, $J_p = 186{,}6$ cm^4; con el corte longitudinal: $W_{tor} = 1{,}47$ cm^3; $J_{tor} = 0{,}59$ cm^4. La resistencia disminuirá en 28,8 veces, la rigidez disminuirá en 316 veces. 2.62. $M_{tor} = 2{,}22$ kN·m. 2.63. $\tau_{máx} = 40$ MPa, $\varphi_{máx} = 1{,}43°$. 2.64. $M_{tor} = 10{,}8$ kN·m, disminuirá en 75 veces. 2.65. $\tau_1 = 50$ MPa, $\tau_2 = 37{,}5$ MPa. 2.66. $\tau_{máx} = 300$ MPa, $\Delta = 6{,}5$ cm. 2.67. $c = 5{,}18$ MN/m. 2.68. $d = 22$ m. 2.69. $n = 9$ espiras de trabajo. 2.70. $d = 20$ mm, $P = 15{,}7$ kN.

Capítulo 3

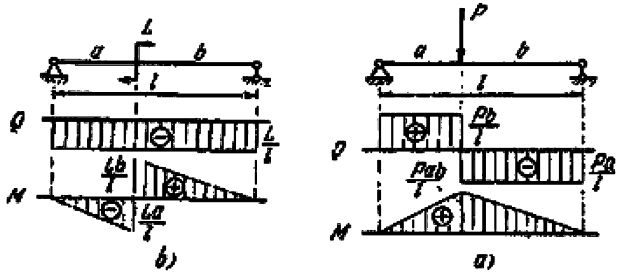
3.1. a) $x_C = 0$, $y_C = h/3$, b) $x_C = b/3$, $y_C = h/3$, c) $x_C = (b - a)/3$, $y_C = h/3$, d) $x_C = (a + 2b)/3$, $y_C = h/3$. 3.2. $y_C = \frac{a + 2b}{a + b} \cdot \frac{h}{3}$, $x_C = \frac{1}{3}\left(a + c + b\frac{b + c}{a + b}\right)$. 3.3. a) $x_C = 0$, $y_C = 4R/(3\pi)$, b) $x_C = y_C = 4R/(3\pi)$, c) $x_C = 0$, $y_C = \frac{4R \operatorname{sen}^3 \alpha}{3(2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha)}$, d) $x_C = \frac{4}{3} R \frac{\operatorname{sen} \alpha (1 + 2 \operatorname{sen}^2 \alpha)}{6\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}$, $y_C = 0$. 3.4. a) $x_C = 0$, $y_C = -(l/2) \cos \alpha$, b) $x_C = 0$, $y_C = 2R/\pi$, c) $x_C = 0$, y_C ($R \operatorname{sen} \alpha$)/$\alpha$. 3.5. $F = 42$ cm^2, $x_C = 0$, $y_C = 3{,}78$ cm. 3.6. 1) $F = 32{,}9a^2$, $x_C = 0$, $y_C = -0{,}32a$. 3.7. $F = 20$ cm^2, $x_C = 3$ cm, $y_C = 2$ cm. 3.8. 1) $F = 16a^2$, $x_C = 2{,}875a$, $y_C = 2{,}5a$. 3.9. $x_C = 0{,}5a$, $y_C = 0{,}633a$. 3.10. $x_1 = 0{,}75l$, $y_1 = 0{,}3h$, $x_2 = 0{,}375l$, $y_2 = 0{,}8h$. 3.11. 1) $J_{x_C} = J_{y_C} = a^4/12$, $J_{x_C y_C} = 0$, $J_x = a^4/3$, $J_y = 7a^4/48$, $J_{xy} = a^4/8$, 2) $J_{x_C} = J_{y_C} = \pi D^4/64$, $J_{x_C y_C} = 0$, $J_x = 5\pi D^4/64$, $J_y = \pi D^4/32$, $J_{xy} = \pi D^4/8$, 3) $J_{x_C} = J_{y_C} = \sqrt{3}\, b^4/96$, $J_{x_C y_C} = 0$, $J_x = \sqrt{3}\, b^4/32$, $J_y = \sqrt{3}\, b^4/16$, $J_{xy} = b^4/8$. 3.12. 1) $J_x = ah^3/12$, $J_{x_C} = ah^3/36$, 2) $J_x = \pi D^4/128$,

$J_{x_C} = D^4/18\pi$, 3) $J_x = \frac{1}{12}(a+3b)h^3$, $J_{x_C} = \frac{1}{36}\left(a+b+\frac{2ab}{a+b}\right)h^3$. 3.13. 1) $J_x = \frac{592}{3}a^4$, $J_y = \frac{223}{3}a^4$. 3.14. $J_{x_C} = 193a^4$; $J_{y_C} = 79{,}4a^4$. 3.15. 1) $\alpha = 45°$, $J_{máx} = a^4/24$, $J_{mín} = a^4/72$, 2) $\alpha = 45°$, $J_{máx} = 0{,}071R^4$, $J_{mín} = 0{,}0384R^4$, 3) $\alpha = 45°$, $J_{máx} = 5{,}42b^4$, $J_{mín} = 1{,}82b^4$. 3.16. 1) $\alpha = 25°$, $J_{máx} = 1{,}78a^4$, $J_{mín} = 0{,}43a^4$. 3.17. $x_C = y_C = 0{,}777R$, $J_{x_C} = J_{y_C} = 0{,}0075R^4$. 3.18. 1) $J_x = \frac{36}{13}a^4$, 2) $J_x = \frac{32}{15}a^4$. 3.19. 1) $J_{x_C} = 81{,}3a^4$, $J_{y_C} = 25{,}05a^4$, $J_{x_C y_C} = 15a^4$, $\alpha = -14°$, $J_{máx} = 85{,}05a^4$, $J_{mín} = 21{,}3a^4$, $i_{máx} = 2{,}3a$, $i_{mín} = 1{,}15a$. 3.20. $J = bh^3/24$. 3.21. $J_{xy} = -105$ cm^4, $J_{x_1y_1} = 48{,}8$ cm^4. 3.22. $J_1/J_2 = 3{,}46$. 3.23. El error es menor de un 0,6%. 3.24. $J_{máx} = 750$ cm^4, $J_{x_C y_C} = -212{,}9$ cm^4, $J_{x_1y_1} = 88{,}8$ cm^4. 3.25. Los momentos de inercia respecto al eje y tienen los valores máximos. Para la sección en T $J_{máx} = 21{,}46$ cm^4; para la sección en cruz $J_{máx} = 17{,}5$ cm^4. 3.26. $J_x = 498$ cm^4, $J_\alpha = 153$ cm^4. 3.27. $a = 6{,}04$ cm. 3.28. La sección en doble T compuesta: $J_x = 3{,}04 \cdot 10^4$ cm^4, $J_y = 2{,}21 \cdot 10^3$ cm^4; la sección tubular: $J_x = 3{,}04 \cdot 10^4$ cm^4, $J_y = 1{,}07 \cdot 10^4$ cm^4. 3.29. $x_C = -0{,}415$ cm, $y_C = 13{,}31$ cm, $\alpha = 18°15'$, $J_{máx} = 2420$ cm^4, $J_{mín} = 540{,}4$ cm^4. 3.30. 1) $x_C = -3{,}77$ cm, $y_C = 9{,}77$ cm, $\alpha = 9°20'$, $J_{máx} = 1830$ cm^4, $J_{mín} = -430$ cm^4, $i_{máx} = 11{,}7$ cm, $i_{mín} = 5{,}7$ cm. 3.31. $J_x = \frac{hl}{3}(y_A^2 + y_A y_B + y_B^2)$. 3.32. $J_p = \frac{\pi h}{4} d_{med}^3$, $J_x = \frac{\pi h}{8} d_{med}^3$. 3.33. $y_C = \frac{2r_{med}}{\pi}$, $J_{x_C} = \frac{\pi h}{2}\left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) r_{med}^3$, $J_{y_C} = \frac{\pi h}{2} r_{med}^3$. 3.34. $J_x = 11\,250$ cm^4, $J_y = 5333$ cm^4, $J_{xy} = -6000$ cm^4, $J_{máx} = 14\,980$ cm^4, $J_{mín} = 1600$ cm^4. 3.35. $J_{máx} = 2026$ cm^4, $J_{mín} = 140$ cm^4. 3.36. $J_{máx} = \frac{2}{3}bl(y_A^2 + y_A y_B + y_B^2) + \frac{dh^3}{12} = 2062$ cm^4, $J_{mín} = \frac{1}{6}tb^3 \cos^2\alpha = 105$ cm^4. 3.37. $x_C = 2{,}5$ cm, $y_C = 0$, $J_{máx} = 364{,}8$ cm^4, $J_{mín} = 45{,}3$ cm^4. 3.38. $x_C = -5{,}53$ cm, $y_C = 1{,}05$ cm, $\alpha = 2°50'$, $J_{máx} = 7467$ cm^4, $J_{mín} = 2268$ cm^4. 3.39. $J_{máx} = 1{,}72 \cdot 10^6$ cm^4, $J_{mín} = 3{,}885 \cdot 10^6$ cm^4. 3.40. $J_x = 5240$ cm^4, $i_x = 10{,}75$ cm.

Capítulo 4

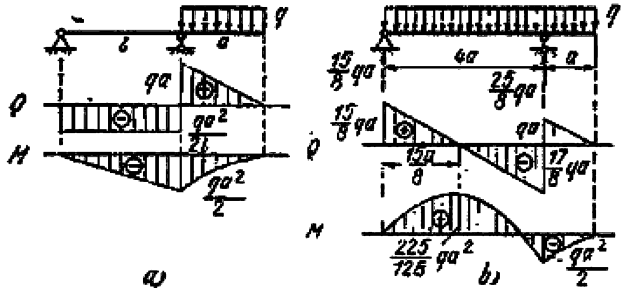
En las respuestas las reacciones en los apoyos están designadas por V y H. *Reglas de los signos.* Se considera positivos: a) las reacciones en los apoyos dirigidas hacia arriba y hacia la derecha; b) los factores de fuerzas interiores en las secciones: el momento flector M que provoca compresión de las fibras superiores (y tracción de las fibras inferiores) de la viga; el esfuerzo cortante Q que provoca el giro del elemento de la viga o de la estructura en el sentido de las agujas del reloj; la fuerza longitudinal N que provoca tracción.

4.1. máx $M = 3aP$, $Q = P$. 4.2. Véase la figura. 4.3. Cuando $q_1 = q_2 = q$, máx $M = gl^2/8$. 4.4. 1) *a*) $V_A = V_B = P/2$, máx $M = Pa/2$, *b*) $V_A = V_B = 0$, máx $|M| = Pa/2$; 2) $V_A = 2{,}5P$, $V_B = 3{,}5P$, máx $M = 4Pa$; 3) $V_A = P$, $V_B = 0$, máx $M = 2Pa$; 4) $V_A = -V_B = 0{,}6$ kN, máx $M = 0{,}6$ kN·m; 5) *a*) $V_B = -P$, $M_B = -2Pa$, *b*) $V_B = M_B = 0$, máx $M = Pa$; 6) *a*) $V_A = 2P$, $M_A = -3Pl/2$, *b*) $V_A = 0$, $M_A = Pl/2$; 7) $V_A = -P$, máx $|Q| = 2P$, máx $|M| = 3Pa$; 8) $V_B = -2P$, máx $Q = 2P$, máx $M = Pa$; 9) $V_A = -P$, $V_B = 0$, máx $Q = P$, máx $|M| = Pa$; 10) $V_A = 3P/4$, $V_B = P/4$, máx $|Q| = 5P/4$, máx $M = 3Pa/2$. 4.5. 1) $V_A = qa(1 - a/(2l))$, $V_B = qa^2/(2l)$, $x_0 = a(1 - a/(2l))$, máx $M = (qa^2/2)(1 - a/(2l))$; 2) $V_A =$

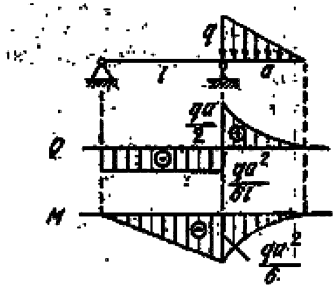


Para el problema 4.2

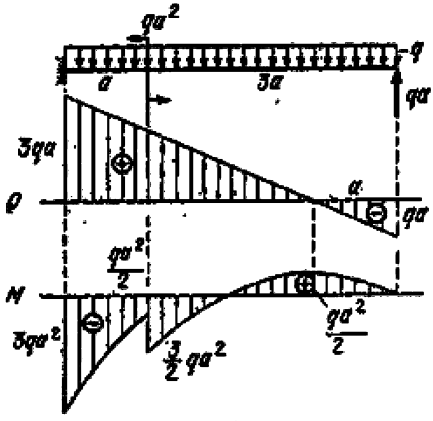
$= (qa/l)(c + a/2)$, $V_D = (qa/l)(b + a/2)$, $M_C = (qab/l)(c + a/2)$, $M_D = (qac/l)(b + a/2)$; 3) $V_A = -V_B = ql/4$, $x_0 = l/4$, máx $M = ql^2/32$, $M_{C_1} = 0$; 4) $V_A = -V_B = ql/3$, $x_0 = l/6$, máx $M = ql^2/36$, $x_0' = 2l/3$, máx $|M| = ql^2/18$; 5) $V_A = 5ql/9$, $V_B = 7ql/9$, $x_0 = 5l/9$, máx $M = 25ql^2/162$; 6) $V_A = V_B = qa$, $x_0 = a$, máx $M = qa^2/2$; 7) $V_B = -V_A = 2qa/3$, máx $|Q| = 2qa/3$ (junto al apoyo), máx $M = 2qa^2/9$ (a la distancia $2a/3$ del apoyo); 8) $V_A = 7qa/6$, $V_B = 11qa/6$, máx $Q = 11qa/6$ (junto al apoyo B) máx $M = 121qa^2/72$ (a la distancia $11a/12$ del apoyo B); 9) $V_A = 5qa/3$, $V_B = qa/3$, máx $Q = 5qa/3$ (junto al apoyo A), máx $M = 25qa^2/18$ (a la distancia $5a/3$ del apoyo A); 10) $V_A = -7qa/6$, $V_B = qa/6$, máx $|Q| = 7qa/6$ (junto al apoyo A), máx $M = 49qa^2/72$ (a la distancia $7a/6$ del apoyo A). 4.6. *a*) máx $|M| = 1{,}5L$, *b*) máx $|M| = Pa$. 4.7. Véase la figura. 4.8. máx $|M| = ql^2/6$. 4.9. Véase la figura. 4.10. Véase la figura. 4.11. *a*) máx $|M| = 4P\alpha/3$ (en el punto



Para el problema 4.7

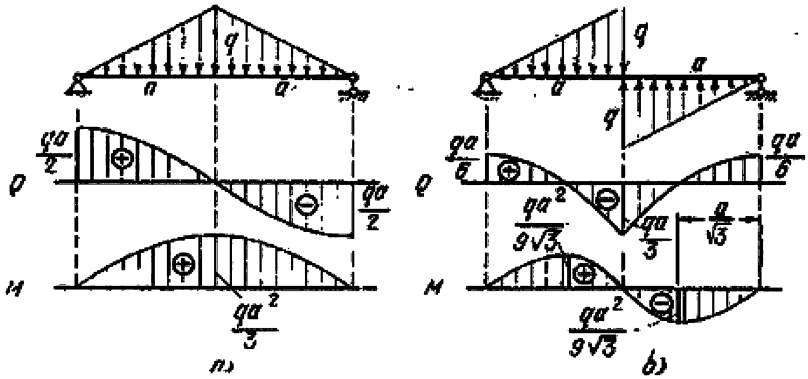


Para el problema 4.9



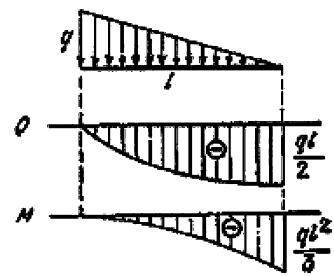
Para el problema 4.10

C, a la derecha); b) máx $M = 49qa^2/32$ (a la distancia $7a/4$ del apoyo derecho). 4.12. 1) Véase la solución; 2) $V_A = -qa/4$, $V_B = 9qa/4$, máx $|M| = qa^2$ (en la sección sobre el apoyo B); 3) $V_A = qa/4$, $V_B = 11qa/4$, máx $M = 3qa^2/4$ (en el punto C, a la derecha); 4) $V_A = 7qa/5$, $V_B = 8qa/5$, máx $|Q| = 8qa/5$, máx $|M| = 2qa^2$; 5) máx $|M| = qa^2/2$; 6) $V_A = -qa$, $V_B = qa$, máx $Q = qa$, máx $M = qa^2$ (en la sección C); 7) $V_A = 11qa/4$, $V_B = 5qa/4$, máx $Q = 7qa/4$ (junto al apoyo A, a la derecha), máx $M = 3qa^2/4$ (en la sección C); 8) $V_A = -3qa/2$, $V_B = -qa/2$, máx $Q = qa$ (junto al apoyo A, a la izquierda), máx $M = qa^2/2$ (en la sección A); 9) $-V_A = V_B = \frac{3L}{2a}$, máx $Q = \frac{3L}{2a}$ (en el tramo AB), máx $|M| = L$ (en los voladizos); 10) $V_A = 9qa/4$, $V_B = 5qa/4$, máx $Q = 5qa/4$ (junto al apoyo A, a la derecha), máx $|M| = qa^2$ (en la sección A). 4.13. Véase la figura. 4.14. a) máx $|M| = qa^2/6$, b) máx $|M| = qa^2/6$.

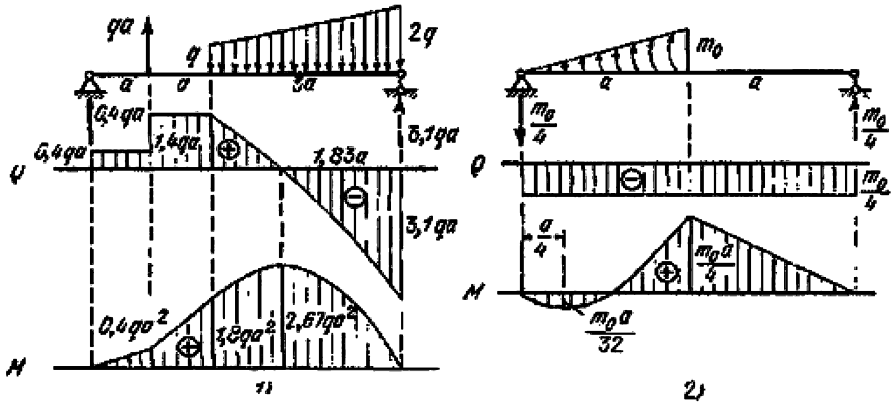


Para el problema 4.13

4.15. Véase la figura. 4.16. 1) $Q = -m$, $M = 0$; 2) $Q = -m/2$, máx $M = ma/2$ (en el punto medio de la luz); 3) $Q = -3m/2$ (entre los apoyos), máx $|M| = ma$ (junto al apoyo derecho); 4) $Q = -2m$ (entre los apoyos), máx $|M| = ma$ junto a los apoyos; 5) $Q = 0$, máx $M = qa$ (en el punto medio de la luz); 6) $Q = m/3$; 7) $Q = -2m/3$, máx $|M| = ma/3$ (en los límites de los tramos); 8) $Q = 0$, máx $M = ma$ (en los límites de los tramos); 9) $Q = 0$, máx $M = 2ma$ (en los límites de los tramos); 10) $Q = -m/3$, máx $|M| = 2ma/3$ (en los límites de los tramos); 11) $Q = -m$ (entre los apoyos), máx $|M| = am$ (en el tramo CB). 4.17. 1) $Q_{máx} = 3P/2$ (en el tramo AB), máx $|M| = 3Pa/2$ (junto al empotramiento); 2) véase los diagramas Q y M en la solución; 3) máx $|Q| = 2P$ (en el tramo AB), (máx $|M| = 2Pa$ (junto al empotramiento derecho); 4) máx $|Q| = 2aq$ (junto al empotramiento derecho), máx $|M| = 3qa^2/2$. 4.18. máx $|M| = 2{,}5qa^2$ (junto al empotramiento). 4.19. Véase la figura. 4.20. $V_A = 7qa/18$, $V_D = 11qa/18$, máx $Q = 8qa/9$ (en la sección B), máx $M = 0{,}77qa^2$ (en el tramo BC a la distancia $0{,}51a$ del punto B). 4.21. Véase la figura. 4.22. Véase la solución 4.23. Véase la figura. 4.24. 1) $M_A = -ql^2/2$, $M_B = ql^2/2$, $M_C = -ql^2/2$; 2) $M_D = -M_A = M_C = -M_B = l/2$; 3) $V_A = 2ql$, $H_A = 7ql/4$, $H_B = -3ql/4$, $M_C = -7ql^2/8$, $M_D = 3ql^2/8$; 4) $V_B = -V_A = P/2$, $H_A = -P$, $H_B = 0$, $M_D = Pl/2$, $M_C = 0$; 5) $V_B = -V_A = P/2$, $H_A = 0$, $H_B = -P$, $M_D = -Pl/2$, $M_C = -Pl$;

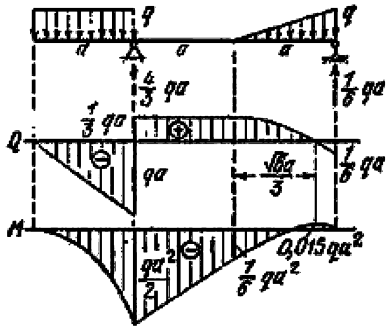


Para el problema 4.15

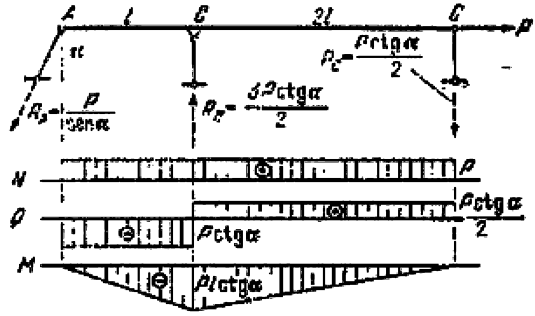


Para el problema 4.19

6) $M_C = Pl/8$, $M_D = 13Pl/8$, $M_B = M_F = 7Pl/8$, máx $M = 7Pl/4$; 7) máx $M = Pa$, máx $Q = P$, máx $N = P$; 8) máx $M = Pa$, máx $Q = P$, máx $|N| = P$; 9) máx $M = 2a^2q$, máx $Q = 2aq$, $N = -2aq$; 10) máx $M = Pa$, máx $|Q| = P$, máx $N = P$, 11) $V_A = P$, $H_A = -H_B = -2P$,



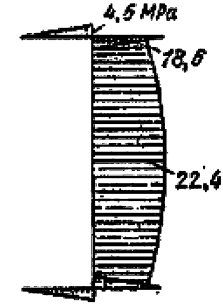
Para el problema 4.21



Para el problema 4.23

$M_{CA} = -M_{CE} = Pl$, $M_{CD} = -2Pl$; 12) Véase la solución; 13) Véase la solución. 4.25. 1) máx $M = Pa$ (en el nudo D); 2) máx $M = 2Pa/3$ (en las secciones A y B); 3) máx $M = Pr(\sqrt{2} - 1)/2$ (en el punto medio del arco); 4) máx $Q = 0{,}414qr$, máx $M = 0{,}215qr^2$; 5) $M(\varphi) = qr^2\varphi$; 6) $M(\varphi) = qr^2\varphi - (\pi qr^2/2) \times (1 - \cos\varphi)$, cuando $\varphi = \arcsen(2/\pi)$ $M(\varphi) = M_{máx}$; 7) $M(\varphi) = mr\varphi - (\pi mr/2)(1 - \cos\varphi)$, cuando $\varphi = \arcsen(2/\pi)$ $M(\varphi) = M_{máx}$ 4.26. 1) $W_z = \frac{bh^2}{6}$, $W_y = \frac{hb^2}{6}$. 2) $W_z = \frac{7bh^2}{48}$, $W_y = \frac{hb^2}{72}$. 3) $W_z = \frac{bh^2}{24}$, $W_y = \frac{hb^2}{24}$; 4) $W_z = \frac{11bh^2}{160}$, $W_y = \frac{3hb^2}{32}$. 5) $W_z = \frac{3bh^2}{32}$, $W_y = \frac{3hb^2}{32}$; 6) $W_z = W_y = \frac{\pi D^3}{32}$. 7) $W_z = W_y = \frac{\pi D^3}{32}\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$. 8) $W_z = W_y = \frac{\pi D^2 t}{4}$. 9) $W_z = \frac{\pi D^3}{64}$, $W_y = \frac{9\pi^2 + 64}{192(3\pi - 4)} D^3 \approx 0{,}147D^3$. 10) $W_z = W_y = \frac{256 - 9\pi}{192} a^3 \approx 1{,}28a^3$. 4.27. Disminuirá en 1,41 veces. 4.28. $W_1 : W_2 : W_3 = 10{,}67 : 10{,}5 : 10$. 4.29. $y = \frac{a}{9\sqrt{2}}$.

En un 5,4%. 4.30. a) en k^2 veces; b) en k veces. 4.31. $W_{z1} = (2 + \pi/4)\, r^3$, $W_{y1} = 2{,}955r^3$, $W_{z2} = (2 - \pi/4)\, r^3$, $W_{y2} = 1{,}758r^3$. 4.32. 1) $W_z = 5b^3$, $W_y = 1{,}5b^3$; 2) $W_z = 3b^3$, $W_y = 2{,}5b^3$. 4.33. El rectángulo: $b = 14$ cm, $F = 392$ cm^2, el círculo: $D = 26{,}5$ cm, $F = 551$ cm^2, el tubo: $D = 37{,}9$ cm, $F = 214$ cm^2. 4.34. $W_z = 282{,}8$ cm^3, $W_y = 46{,}2$ cm^3. 4.35. Para la sección en cruz $W_z = 1071$ cm^3, para la sección de tubo cuadrado $W_z = 3703$ cm^3. 4.36. máx $\sigma = 6M/(bh^2)$. 4.37. máx $\sigma = 206$ MPa, $\rho = 25{,}5$ m. 4.38. $P_{ad} = 62$ kN. 4.39. 41,0 MPa, 82,0 MPa. 4.40. máx $\sigma = 206$ MPa. 4.41. máx $\sigma = 130$ MPa. 4.42. N° 10 (máx $\sigma = 128$ MPa). 4.43. máx $\sigma = 150$ MPa, máx $\tau = 3$ MPa. 4.44. máx $\sigma = 138$ MPa, máx $\tau = 14$ MPa. 4.45. $\sigma = 4{,}16$ MPa. $\tau = 0{,}18$ MPa. 4.46. a) $h = 3{,}3$ mm; b) $e = 12{,}2$ cm. 4.47. N° 10, $W = 34{,}8$ cm^3 (se necesita $W = 27{,}8$ cm^3). 4.48. $b = 7{,}1$ cm. 4.49. N° 36, $W = 743$ cm^3 (se necesita $W = 667$ cm^3). 4.50. $d = 8{,}75$ cm. 4.51. El lado de la sección debe ser igual a 8 cm. 4.52. $D = 4{,}45$ cm. 4.53. $P_{ad} = 2{,}77$ kN. 4.54. $[M_z] = 9{,}30$ kN·m, $[M_y] = 1{,}38$ kN·m. 4.55. $F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = 4{,}5 : 5{,}6 : 1{,}7 : 1$. 4.56. a) $e = 31$ cm; b) $h = 1{,}6$ mm; c) $e = 9{,}4$ cm. 4.57. $e = 28$ cm según la condición de resistencia del remache al cizallamiento. 4.58. a) $b = \dfrac{3q}{h^2[\sigma]}x^2$; b) $b = \dfrac{6P}{h^2[\sigma]}x$.



Para el problema 4.61(1)

4.59. La altura h debe variar de acuerdo con la ley lineal $h(x) = cx$, donde $c = \sqrt{3q/(b\sigma_{máx})}$, x es la distancia a partir del extremo libre del voladizo. 4.60. $[P] = 12$ kN. 4.61. 1) Véase en la figura el diagrama τ; 2) véase la solución. 4.62. El centro de flexión se halla a una distancia igual a 1,60 cm de la pared del perfil en U, a la derecha, $\tau_{máx} = 18{,}3$ MPa. 4.63. a) $\tau_{máx} = 1{,}35Q/(ta)$ a la distancia $0{,}6a$ del borde del ala; b) $\tau_{máx} = \dfrac{P}{2}\dfrac{S_{z\,máx}}{tJ_z}$, donde $S_{z\,máx} = \dfrac{tcb}{4} + \dfrac{tb^2}{8}$, $J_z = 2 \cdot \dfrac{c}{2} t \cdot b^2 + tb^3/12$. 4.64. a) $\tau = \dfrac{Q}{2tb}$. b) $\tau = \dfrac{Q}{4tb}$. c) $\tau_{máx} = \dfrac{3Q}{11tb}$. 4.65. Véase la solución. 4.66. Véase la solución. 4.67. a) $\tau_{máx} = \dfrac{0{,}68Q}{ta}$; b) $\tau_{máx} = 0{,}775\dfrac{Q}{ta}$; c) $\tau_{máx} = 0{,}138\dfrac{Q}{ta}$. 4.68. $\sigma_{máx} = -\sigma_{mín} = 28{,}4$ MPa. 4.69. $\sigma_{máx} = 112$ MPa, $\sigma_{mín} = -6$ MPa. 4.70. $[P] = 2bh\tau_b/3$. 4.71. *a*) Por arriba de la barra superior $|\sigma| = \dfrac{20M}{11bh^2}$, por abajo de la barra inferior $|\sigma| = \dfrac{14M}{11bh^2}$; *b*) por arriba de la barra superior $|\sigma| = \dfrac{5M}{17bh^2}$ por abajo de la barra inferior $|\sigma| = \dfrac{3M}{34bh^2}$. 4.72. Véase la solución. 4.73. $q_{1fm} = 236$ N/cm. 4.74. $M_{f1} = 5{,}00$ kN·m. 4.75. Véase la solución. 4.76. Para la sección circular $k_{1fm} = 1{,}7$; para la sección cuadrada $k_{1fm} = 1{,}5$, es decir, mucho mayor que para la sección en doble T (1,15). De este modo el valor pequeño de k_{1fm} responde a una forma racional de la sección. 4.77. El eje neutro de la sección pasa a una distancia b del ala. 4.78. $b = 7$ mm. 4.79. El momento flector junto al empotramiento es igual a Pb, en el lugar de la dobladura es igual a Pa, el momento torsor en el tramo AB es igual a Pa, en el voladizo es igual a cero. 4.80. *a*) $M_C = Pc/2$; *b*) $M = (L \cos \alpha)/2$. 4.81. El momento flector es $M = ma$. El momento torsor

es igual a cero. 4.82. máx $M = Pa/2$, máx $|M_{tor}| = 0{,}21Pa$. 4.83. máx $M = qa^2$, máx $|M_{tor}| = 0{,}335qa^2$. 4.84. Véase la solución. 4.85. Véase la solución. 4.86. Cuando $\alpha > 45°$: máx $M = L \operatorname{sen} \alpha$, máx $M_{tor} = L \operatorname{sen}^2 \alpha$; cuando $\alpha < 45°$: máx $M = L \cos \alpha$, máx $M_{tor} = L \cos^2 \alpha$. 4.87. 1) Cuando $a > b$ máx $M = Pa$, máx $M_{tor} = Pa$; cuando $a < b$ máx $M = Pb$, máx $M_{tor} = Pb$; 2) máx $M =$ máx $M_{tor} = Pa/2$, $Q = P$; 3) $M = L\sqrt{2}$, $M_{tor} = 0$, $Q = 0$; 4) $M = 0$, $M_{tor} = L\sqrt{2}$, $Q = 0$; 5) máx $M = qa^2/4$ (junto a los nudos), $M_{tor} = qa^2/4$, máx $Q = qa$ (junto a los nudos A y B); 6) $M = am/2$, máx $M_{tor} = am/2$ (junto a los nudos), $Q = 0$; 7) máx $M = Pr$ (en las secciones A y B), máx $M_{tor} = 2rP$ (en la sección C), $Q = P$; 8) máx $M = L$ (en las secciones A y B), máx $M_{tor} = L$ (en los lugares de aplicación de la carga), $Q = 0$; 9) $M = M_{tor} = L \cos \alpha + L \operatorname{sen} \alpha$, máx $M =$ máx $M_{tor} = L$ (en los lugares de aplicación de la carga), $Q = 0$; 10) máx $M = L$ (en los lugares de aplicación de la carga), máx $M_{tor} = L\sqrt{2}$, $Q = 0$.

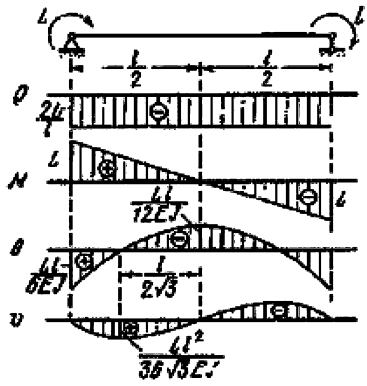
Capítulo 5[1]

5.1. *1)* $\theta(l) = \frac{Ll}{EJ}$, $v(l) = \frac{Ll^2}{2EJ}$; *1')* $\theta(0) = \frac{Ll}{EJ}$; $v(0) = \frac{Ll^2}{2EJ}$; *2)* $\theta(l) = \frac{ql^3}{6EJ}$; $v(l) = \frac{ql^4}{8EJ}$; *2')* $\theta(0) = -\frac{ql^3}{6EJ}$; $v(0) = \frac{ql^4}{8EJ}$; *3)* $\theta(l) = \frac{Pa^2}{2EJ}$, $v(l) = \frac{Pa^2(3l-a)}{6EJ}$; *4)* $\theta(l) = -\frac{La}{EJ}$, $v(l) = \frac{La(2l-a)}{2EJ}$; *5)* $\theta(l) = \frac{qa^3}{6EJ}$, $v(l) = \frac{qa^3(4l-a)}{6EJ}$; *6)* $\theta(l) = \frac{q(l^3-a^3)}{6EJ}$, $v(l) = \frac{q(3l^4-4la^3+a^4)}{24EJ}$; *7)* $\theta(2a) = \frac{3Pa^2}{EJ}$, $v(2a) = \frac{13Pa^3}{3EJ}$; *8)* $\theta(2a) = \frac{5qa^3}{2EJ}$, $v(2a) = \frac{89qa^4}{24EJ}$; *9)* $\theta(2a) = -\frac{a}{2EJ}(4L+Pa)$; $v(2a) = -\frac{a^2}{EJ}\left(2L+\frac{5}{6}Pa\right)$; *10)* $\theta(2a) = -\frac{a}{EJ}(2Pa+L)$, $v(2a) = \frac{a^2}{EJ}\left(\frac{8}{3}Pa - \frac{3}{2}L\right)$; *11)* $\theta(l) = \frac{Pl^2}{2EJ}$, $v(l) = \frac{Pl^3}{3EJ}$; *11')* $\theta(0) = -\frac{Pl^2}{2EJ}$, $v(0) = \frac{Pl^3}{3EJ}$; *12)* $\theta(l) = \frac{ql^3}{24EJ}$; $v(l) = \frac{ql^4}{30EJ}$; *13)* $\theta(l) = \frac{ql^3}{8EJ}$, $v(l) = \frac{11ql^4}{120EJ}$; *14)* $\theta(l) = \frac{qa^3}{24EJ}$, $v(l) = \frac{qa^3(5l-a)}{120EJ}$; *15)* $\theta(l) = \frac{(q_0+3q_l)l^3}{24EJ}$, $v(l) = \frac{(4q_0+11q_l)l^4}{120EJ}$; *16)* $\theta(l) = \frac{(q_0-3q_l)l^3}{24EJ}$; $v(l) = \frac{(4q_0-11q_l)l^4}{120EJ}$; *17)* $\theta(l) = \frac{(q_0+3q_a)a^3}{24EJ}$, $v(l) = \frac{[(q_0+3q_a)5l-(q_0+4q_a)a]a^3}{120EJ}$; *18)* $\theta(l) = \frac{qb(a^2+ab+b^2)}{24EJ} - \frac{qa^3}{8EJ}$, $v(l) = \frac{q(b-a)[(5l-b)(3a^2+2ab+b^2)-4a^3]}{120EJ}$; *19)* $\theta(l) = \frac{q(l+a)(l^2+a^2)}{24EJ}$; $v(l) = \frac{q(a^5-5a^4l+4l^5)}{120(l-a)EJ}$. 5.2. $v = \frac{Pl^3}{3EJ} = 0{,}706$ cm. 5.3. *1)* $\theta_A = \frac{Ll}{3EJ}$, $\theta_B = -\frac{Ll}{6EJ}$, $\theta_{med} = -\frac{Ll}{24EJ}$, $v_{med} = \frac{Ll^2}{16EJ}$; *2)* $\theta_A = -\theta_B = \frac{Ll}{2EJ}$,

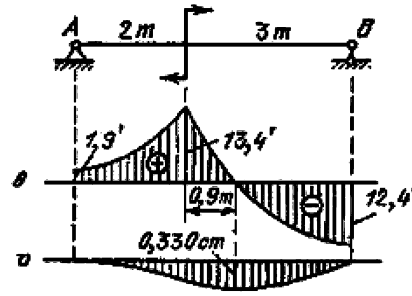
[1] El eje x está dirigido hacia la derecha; el eje v, hacia abajo. Las secciones se asignan mediante la abscisa (por ejemplo: $v(x)$, $\theta(l)$, etc.) o mediante el índice (por ejemplo, θ_A, θ_B, etc.).

$\theta_{med}=0$, $v_{med}=\frac{Ll^2}{8EJ}$; 3) $\theta_A=-\theta_B=\frac{Pa(l-a)}{2EJ}$, $\theta_{med}=0$, $v_{med}=$ $=\frac{Pa(3l^2-4a^2)}{24EJ}$; 4) $\theta_A=\frac{Pba(l+b)}{6lEJ}$, $\theta_B=-\frac{Pab(l+a)}{6lEJ}$, $EJ\theta_{med}=$ $=\frac{Pal(l+b)}{6l}-\frac{Pbl}{8}$, $EJv_{med}=\frac{Pb(3l^2-4b^2)}{48}$ (cuando $a>b$); 5) $\theta_A=$ $=\frac{Lb}{6EJ}\left(\frac{3b}{l}-\frac{l}{b}\right)$, $\theta_B=\frac{La}{6EJ}\left(\frac{3a}{l}-\frac{l}{a}\right)$, $\theta_{med}=\frac{Lb}{2EJ}\left(\frac{b}{l}-\frac{l}{12b}\right)$, $v_{med}=\frac{Lbl}{4EJ}\left(\frac{b}{l}-\frac{l}{4b}\right)$ cuando $a>b$; 6) $\theta_A=\theta_B=\frac{Pab(l-a)}{6lEJ}$, $\theta_{med}=$ $=-\frac{Pab(l+2a)}{12lEJ}$, $v_{med}=0$; 7) $\theta_A=-\theta_B=-\frac{Lb}{2EJ}$, $\theta_{med}=0$, $v_{med}=$ $=-\frac{Lb(b+4a)}{8EJ}$; 8) $\theta_A=\theta_B=\frac{Lb}{4EJ}\left(\frac{b}{l}-\frac{l}{3b}\right)$, $\theta_{med}=\frac{La}{EJ}\left(\frac{a}{l}-\frac{l}{12a}\right)$, $v_{med}=0$; 9) $\theta_A=-\theta_B=\frac{qb}{48EJ}(3l^2-b^2)$, $\theta_{med}=0$, $EJv_{med}=$ $=\frac{qb(8l^3-4b^2l+b^3)}{384}$; 10) $\theta_A=\frac{3ql^3}{128EJ}$, $\theta_B=-\frac{7ql^3}{384EJ}$; $\theta_{med}=-\frac{ql^3}{384EJ}$, $v_{med}=\frac{5ql^4}{768EJ}$; 11) $\theta_A=-\theta_B=\frac{Pl^2}{16EJ}$, $\theta_{med}=0$, $v_{med}=\frac{Pl^3}{48EJ}$, 12) $\theta_A=$ $=\theta_B=\frac{Ll}{24EJ}$, $\theta_{med}=-\frac{Ll}{12EJ}$, $v_{med}=0$; 13) $\theta_A=-\theta_B=\frac{ql^3}{24EJ}$, $\theta_{med}=0$, $v_{med}=\frac{5ql^4}{384EJ}$; 14) $\theta_A=\theta_B=-\theta_{med}=\frac{ql^3}{192EJ}$, $v_{med}=0$; 15) $\theta_A=\frac{qb^3}{12EJ}\left(\frac{1}{b}-\frac{b}{2l}\right)$, $\theta_B=-\frac{qb^3}{6EJ}\left(\frac{1}{b}+\frac{b}{4l}-1\right)$; cuando $a>b$ $\theta_{med}=$ $=\frac{qb^3}{48EJ}\left(\frac{l}{b}-\frac{2b}{l}\right)$, $v_{med}=\frac{qb^3l}{48EJ}\left(\frac{3l}{2b}-\frac{b}{l}\right)$; cuando $a<b$ $\theta_{med}=$ $=\frac{qb^3l}{48EJ}\left[1-\frac{2b^2}{l^2}+\frac{(l-2a)^3}{b^3l}\right]$, $v_{med}=\frac{qb^3l^3}{48EJ}\left[1{,}5-\frac{b^2}{l^2}+\frac{(l-2a)^4}{8b^3l^2}\right]$; 16) $\theta_A=\frac{7ql^3}{360EJ}$, $\theta_B=-\frac{ql^3}{45EJ}$, $\theta_{med}=\frac{7ql^3}{5760EJ}$, $v_{med}=\frac{5ql^4}{768EJ}$; 17) $\theta_A=$ $=-\theta_B=\frac{ml^2}{16EJ}$; $v_{med}=\frac{ml^3}{48EJ}$; 18) $\theta=0$, $v=0$; 19) $\theta_A=-\theta_B=\frac{m_1l^2}{24EJ}$, $v_{med}=\frac{5m_1l^3}{384EJ}$; 20) $\theta_A=\frac{mab(l+b)}{6lEJ}$, $\theta_B=-\frac{mab(l+a)}{6lEJ}$, $EJ\theta_{med}=$ $=\frac{mab(l+b)}{6l}-\frac{mbl}{8}$, $v_{med}=\frac{mb(3l^2-4b^2)}{48EJ}$ cuando $a>b$; 5.4. $v=\frac{Pl^3}{48EJ}=$ $=0{,}119$ cm. 5.5. $v=\frac{5ql^4}{384EJ}=0{,}63$ cm. 5.6. $v=\frac{Ll^2}{16EJ}=1{,}12$ cm, $\theta_A=$ $=\frac{Ll}{3EJ}=0{,}0595$, $\theta_B=\frac{Ll}{6EJ}=0{,}0297$. 5.7. Véase la solución. 5.8. $b=10$ cm, $\sigma=6{,}0$ MPa. Según la condición de resistencia $b=6$ cm, es decir, la viga es más ligera en un 40%. 5.9. 1) $v(0)=1{,}74$ cm; 2) $b=18{,}6$ cm; Según la condición de resistencia $b=12{,}6$ cm. 5.10. Véase la solución. 5.11. Véase la solución. 5.12. $\theta(0)=\theta(l)=-\theta_{med}=\frac{Pa^2}{16EJ}$, $\theta\frac{a}{2}=\theta\left(\frac{3a}{2}\right)=0$. 5.13. $Q(0)=\frac{2L}{l}$, $M(0)=L$, $\theta(0)=\frac{Ll}{6EJ}$, $\theta_{med}=-\frac{Ll}{12EJ}$, $v_{máx}=\frac{Ll^2}{EJ36\sqrt{3}}$ (a la distancia igual a $\frac{l}{2\sqrt{3}}$

del punto medio de la luz). Véase en la figura los diagramas. 5.14. El punto de inflexión se encuentra a la distancia $l/3$ del apoyo izquierdo A. Los ángulos de giro son $\theta_A = 0$, $\theta\left(\frac{l}{3}\right) = -\frac{L_1 l}{EJ}$. 5.15. $l = 6{,}75$ m. 5.16. $E = 1{,}156 \cdot 10^3$ MPa. 5.17. $q = 3{,}40$ kN/m. 5.18. a) $v_B = \frac{37qa^4}{48EJ}$; $\theta_A = -\frac{11qa^3}{48EJ}$; b) $v_B = -\frac{qa^4}{24EJ}$, $\theta_A = \frac{qa^3}{EJ}$. 5.19. $v_C = -\frac{43qa^4}{24EJ}$, $\theta_C = -\frac{25qa^3}{12EJ}$. 5.20.



Para el problema 5.13

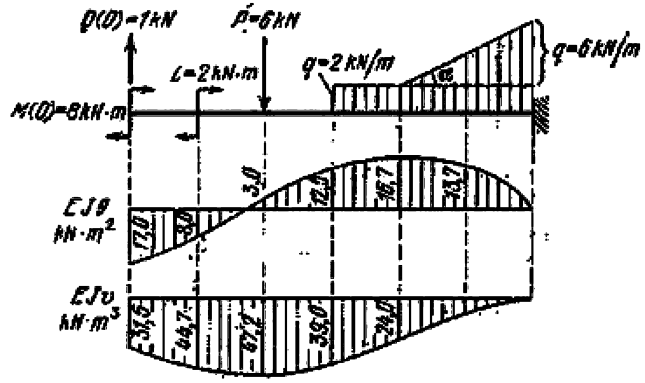


Para el problema 5.25

$v_C = \frac{31qa^4}{36EJ}$, $v_D = \frac{67qa^4}{72EJ}$. 5.21. $v_C = \frac{47qa^4}{72EJ}$. 5.22. $\theta_{AC} = \frac{14qa^3}{3EJ}$, $v_C = \frac{25qa^4}{8EJ}$. 5.23. $v_C = \frac{7qa^4}{4EJ}$, $\theta_A = -\frac{2qa^3}{3EJ}$. 5.24. a) $\theta_c = -\frac{Pcl}{2kEJ}$; $v_c = -\frac{Pcl^2}{16EJ}$, $\theta_D = \frac{Pc(2l+3c)}{6EJ}$, $v_D = \frac{Pc^2(l+c)}{3EJ}$, $\theta_A = -\frac{Pc}{6EJ}$, $\theta_B = \frac{Plc}{16EJ}$; b) $\theta_c = \frac{Ll}{24EJ}$, $v_c = \frac{Ll^2}{16EJ}$, $\theta_D = -\frac{L(l+3c)}{3EJ}$, $v_D = -\frac{Lc(2l+3c)}{6EJ}$, $\theta_A = \frac{Ll}{6EJ}$, $\theta_B = -\frac{Ll}{3EJ}$; c) $v_D = -\frac{Pl^2c}{16EJ}$; d) $v_D = \frac{qc^3(3c+4b)}{24EJ}$; e) $v_D = \frac{qc^4}{8EJ} + \frac{qcl(4c^2-l^2)}{24EJ}$. 5.25. $\theta_A = 1{,}9'$; $\theta_B = -12{,}4'$; $\theta(2\text{ m}) = 13{,}4'$; $v(2\text{ m}) = 0{,}330$ cm, máx $v = 0{,}552$ cm (cuando $x = 2{,}90$ m). Véase la figura. 5.26. $\theta(3{,}5\text{ m}) = 0{,}0262 = 1°30'$; $\theta(5\text{ m}) = 0{,}0319 = 1°50'$; $v(3{,}5\text{ m}) = 4{,}58$ cm; $v(5\text{ m}) = 9{,}10$ cm. 5.27. $\rho = 26{,}0$ m. 5.28. a) $v_{med} = 23Pa^3/16EJ$, b) $v_{med} = \frac{0{,}286qa^4}{EJ}$. 5.29. $\theta_A = \frac{qa^3}{3EJ}$, $\theta_B = -\frac{3qa^3}{8EJ}$. 5.30. $v_{med} = 1{,}47$ cm; $J \geqslant 6{,}65 \cdot 2 = 13{,}3$ cm^4. 5.31. $v^b_{med} = 0{,}5v^a_{med}$, $v^c_{med} = 0$, $v^d_{med} = 0{,}5v^a_{med}$, $v^e_{med} = v^a_{med}$, $v^c_{máx} = v^a_{máx}/16$. 5.32. Véase la figura. 5.33. $\delta = \frac{qhl^3}{12EJ} = 7{,}52$ cm. 5.34. $E_1 J\theta = -\frac{qlx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + \left(\frac{hE_1 J}{E_2 F} + \frac{l^2}{12}\right)\frac{q}{2}$, $E_1 Jv = -\frac{qlx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} + \left(\frac{hE_1 l}{E_2 F} + \frac{l^2}{12}\right)\frac{qx}{2}$, $v_{med} = 0{,}745$ cm, $v_{máx} = 0{,}751$ cm

(cuando $x=1{,}08$ cm), $v_B=0.24$ cm. 5.35. a) $\theta_A=\left[a(1+b)-\frac{s^2}{4}\right]\cdot\frac{qsb}{6lEJ}$,

$\theta_B=-\left[b(l+a)-\frac{s^2}{4}\right]\frac{qsa}{6lEJ}$, b) $\theta_A=\left[6ab(l+b)-s^2\left(b+\frac{2s}{45}\right)\right]\frac{qs}{72lEJ}$,



Para el problema 5.32

$\theta_B=-\left[6ab(l+a)-s^2\left(a+\frac{2s}{45}\right)\right]\frac{qs}{72lEJ}$. 5.36. a) $\theta(0)=\theta(l)=-\frac{ql^3}{360EJ}$,

$v(0{,}5l)=0$; b) $\theta(0)=\left[q_0+q_1-\frac{q_1-q_0}{15}\right]\frac{l^3}{48EJ}$, $\theta(l)=-\left[q_0+q_1+\right.$

$\left.+\frac{q_1-q_0}{15}\right]\frac{l^3}{48EJ}$, $v(0{,}5l)=\frac{(q_0+q_1)\,5l^4}{768EJ}$; c) $\theta(0)=\theta(l)=-\frac{7ql^3}{2880EJ}$,

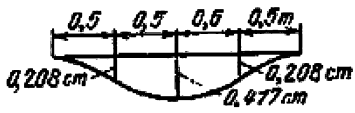
$v(0{,}5l)=0$; d) $\theta(0)=-\theta(l)=\frac{5ql^3}{192EJ}$, $v(0{,}5l)=\frac{ql^4}{120EJ}$; e) $\theta(0)=-\theta(l)=$

$=\frac{ql^3}{64EJ}$, $v(0{,}5l)=\frac{3ql^4}{640EJ}$. 5.37. $\theta(0)=\theta_A=0{,}00526$, $v(0{,}5l)=0{,}312$ cm.
5.38. En el tramo I de la viga $EJ\theta=3{,}48+0{,}835x^3$, $EJv=3{,}48x+0{,}278x^3$.
En el tramo II $EJ\theta=3{,}48+0{,}835x^3-10(x-1)$, $EJv=3{,}48x+0{,}278x^3-$
$-5(x-1)^3$. En el tramo III $EJ\theta=3{,}48+0{,}835x^3-10(x-1)+8{,}33(x-2)^3$,
$EJv=3{,}48x+0{,}278x^3-5(x-1)^3+2{,}08(x-2)^4$. En el tramo IV $EJ\theta=3{,}48+$
$+0{,}835x^3-10(x-1)+8{,}33(x-2)^3-8{,}33(x-3)^3-25{,}8(x-3)^2$, $EJv=3{,}48x+$
$+0{,}278x^3-5(x-1)^3+2{,}08(x-2)^4-2{,}08(x-3)^4-8{,}61(x-3)^3$, x y v en m,
EJ en kN·m². 5.39. $v_{l2q}=0{,}07$ cm, $v_{der}=-2{,}11$ cm. 5.40. a) La flecha en
el punto B es igual a $\frac{2La^2}{3EJ}=0{,}417$ cm; véase el diagrama de las flechas en
la figura. b) $\theta_C=0{,}0146$. 5.41. $f=\frac{Pl^3}{3EJ}+\frac{PD^2l}{4GJ_p}=3{,}0+2{,}54=5{,}54$ cm.
5.42. $v_C=-\frac{La^2}{3EJ}$. 5.43. $\theta_A=\frac{aL}{6EJ}$. 5.44. $\theta_{A\,l2q}=\frac{20qa^3}{3EJ}$, $\theta_{A\,der}=-11\times$
$\times\frac{qa^3}{EJ}$. $v_A=\frac{64qa^4}{3EJ}$. 5.45. $\theta_B=-10\frac{qa^3}{EJ}$, $\theta_C=-9{,}5\frac{qa^3}{EJ}$, $v_C=-\frac{29qa^4}{3EJ}$.
5.46. $\frac{5Pl^4}{384EJ}$. 5.47. $M=\frac{2\pi EJ}{l}=\text{const}$. 5.48. El error de la solución apro-
ximada para la flecha máxima es $k_v=(v_{med}^{apr}-v_{med}^{exac})/v_{med}^{exac}=\alpha^2/\text{sen}^2\alpha-1$.
Cuando $\alpha\leqslant 0{,}35$ que corresponde a $v_{med}\leqslant 0{,}167l$, tenemos $k_v\leqslant 0{,}05$.
5.49. $\theta_{máx}=l/\rho=lL/(EJ)=0{,}563=32{,}3°$, $v_{máx}=\rho(1-\cos\theta_{máx})=13{,}8$ cm

(según la fórmula aproximada $v_{máx} = Ll^2/(2EJ)$ obtendremos $v_{máx} = 14.1$ cm).

5.50. a) $\frac{Pl^3}{3EJ} + \frac{kPl}{GF} = 0{,}0455 + 0{,}0186 = 0{,}0641$ (cuando $k = 2{,}9$) b) $\frac{2Pl^3}{3EJ} + \frac{k2Pl}{GF} = 0{,}091 + 0{,}037 = 0{,}128$ cm. 5.51. $v_{máx} = \frac{Pl^3}{48EJ} + \frac{Pl}{4Ght} = 0{,}0107 + 0{,}0130 = 0{,}0237$ cm, $\theta_{máx} = \frac{Pl^2}{16EJ} + \frac{P}{2Ght} = 0{,}000400 + 0{,}000325 = 0{,}000725$.

5.52. $f = \frac{\alpha t l^2}{8h}$, $\theta_A = \frac{\alpha t l}{2h}$, h es la altura de la sección de la viga. 5.53. $f = \frac{\alpha t l^2}{10h}$, $\theta_A = \frac{3\alpha t l}{8h}$ (junto al extremo calentado) $\theta_B = -\frac{\alpha t l}{8h}$. 5.54. $\theta_A = \frac{\alpha t (l^2 - b^2)}{2hl}$, donde $b = l - a$, $\theta_B = \frac{\alpha t a^2}{2hl}$; cuando $a \geqslant b$ $f = \frac{\alpha t (l^2 - 2b^2)}{8h}$ cuando $a \leqslant b$ $f = \alpha t a^2/(4h)$. 5.55. *1)* cuando $0 \leqslant x \leqslant 2a$ $\theta = -kx/6$, $v = -kax$; cuando $2a \leqslant x \leqslant 3a$ $\theta = k(x - 2a) - ka/6$, $v = k(x - 2a)^2/2 - kax/6$; máx $|v| = 25ka^2/72$ cuando $x = 13a/6$; $k = \alpha t/h$ (h es la altura de la viga, α es el coeficiente de dilatación térmica del material). El origen de cálculo de x se encuentra en el extremo izquierdo de la viga; *2)* en el tramo que se calienta $x \leqslant a$) $v = -kx^2/2$, en el tramo $x \geqslant a$ $v = ka(a - 2x)/2$; *3)* cuando $x \leqslant a$ $v = -kx^2/2 + 3nax/4$, $v_{máx} = 9ka^2/32$ (cuando $x = 3a/4$); cuando $x \geqslant a$ $v = -kax/4 + ka^2/2$, $\theta_A = 3ka/4$, $\theta_B = -ka/4$; *4)* cuando $x \leqslant a$ $v = -kx^2/2 + kax/6$, $\theta = -kx + ka/6$; cuando $x \geqslant a$ $v = \frac{k}{2}x^2 - \frac{11}{6}kax + ka^2$, $\theta = kx - \frac{11}{6}ka$, $v_{máx} = -49ka^2/72$ (cuando $x = 11a/6$), $\theta_A = ka/6$, $\theta_B = 7ka/6$, $\theta_C = -5ka/6$; *5)* $v_C = -kla/2$; *6)* $v_A = v_B = -ka(l + a)/2$; *7)* cuando $0 \leqslant x \leqslant 2a$ $\theta = -kx$, $v = -kx^2/2$; cuando $x \geqslant 2a$ $\theta = -2ak$, $v = 2ak(a - x)$; máx $|v| = 4a^2k$ (en el extremo del voladizo); *8)* cuando $0 \leqslant x \leqslant 2a$ $\theta = -kx + 4ak/3$, $v = -kx^2/2 + 4akx/3$; cuando $x \geqslant 2a$ $\theta = -2ak/3$, $v = -2akx/3 + 2a^2k$; $v_{máx} = 10a^2k/9$ cuando $x = 4a/3$; *9)* cuando $0 \leqslant x \leqslant 2a$ $\theta = -kx + ka$, $v = -kx^2/2 + kxa$; cuando $x \geqslant 2a$ $\theta = kx - 3ak$, $v = kx^2/2 - 3akx$; máx $|v| = 4{,}5\ ka^2$ (en el extremo del voladizo); *10)* cuando $0 \leqslant x \leqslant a$ $\theta = kx$, $v = kx^2/2 - ka^2$; cuando $x \geqslant a$ $\theta = -kx + 2ak$, $v = -kx^2/2 + 2akx - 2a^2k$; máx $|v| = ka^2/2$ (en el extremo libre del voladizo); *11)* $v = -kx^2/2 + klx/2$. 5.56. *1)* $\theta_A = -\frac{5ql^2}{128EJ}$, $v_B = \frac{3Pl^3}{256EJ}$; *2)* $\theta_A = \theta_B = \frac{Pl^2}{16EJ}$, $v_A = \frac{5Pl^3}{96EJ}$, $v_B = \frac{Pl^3}{48EJ}$; *3)* $\theta_A = \frac{Ll}{9EJ}$, $\theta_B = \frac{L(l + 9c)}{9EJ}$, $v_B = Lc\left(\frac{l}{9} + \frac{c}{2}\right)\Big/EJ$, *4)* $\theta_A = \frac{Pl^2}{36EJ}$, $v_A = \frac{7Pl^3}{324EJ}$, $v_B = \frac{31Pl^3}{1296EJ}$; *5)* $\theta_A = \frac{Pl^2}{18EJ}$, $v_A = \frac{2Pl^3}{81EJ}$, $v_B = \frac{19Pl^3}{648EJ}$; *6)* $\theta_A = \frac{Pa^2}{2EJ}$, $v_B = \frac{5Pa^3}{9EJ}$; *7)* $\theta_A = \frac{Pa^2}{4EJ}$, $\theta_B = 0$, $v_B = \frac{Pa^3}{6EJ}$; *8)* $\theta_A = \frac{5Pl^2}{6EJ}$, $\theta_B = \frac{Pl^2}{3EJ}$, $v_A = \frac{2Pl^3}{3EJ}$; *9)* $\theta_A = -\frac{Pl^2}{4EJ}$, $\theta_B = \frac{Pl^2}{4EJ}$, $v_A = \frac{5Pl^3}{6EJ}$; *10)* $\theta_A = \frac{Pa^2}{EJ}$, $v_B = \frac{Pa^3}{EJ}$. *11)* $\theta_A = -\frac{5Pl^2}{16EJ}$, $v_A = \frac{3Pl^3}{16EJ}$, $\theta_B = -\frac{3Pl^2}{16EJ}$, $v_B =$

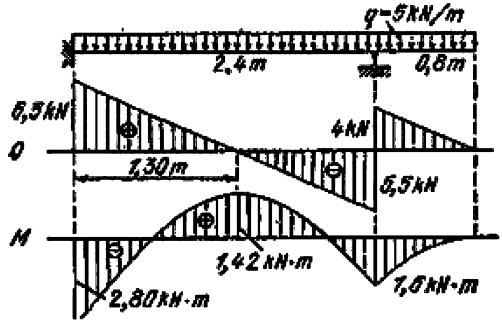


Para el prblema 5.40(a)

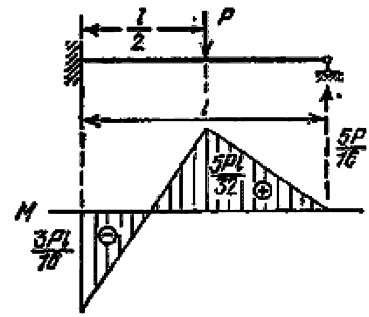
$= \frac{5Pl^3}{96EJ}$; 12) $\theta_A = \frac{3Pl^2}{64EJ}$, $v_B = \frac{7Pl^3}{384EJ}$. 5.57. a) $v_C = 2{,}08$ cm, $v_E = 2{,}86$ cm, b) $v_C = 1{,}57$ cm, $v_E = 2{,}06$ cm. 5.58. $\theta_{máx} = 0.016$, $v_{máx} = 6{,}04$ cm, véanse los diagramas en la solución. 5.59. $v_{máx} = ql^4/(2EJ_{máx})$, donde $J_{máx} = bh^3/12$; la flecha obtenida es cuatro veces mayor que la del voladizo de sección constante. 5.60. Tabla de ordenadas de los diagramas por 1 m.

x, m	1	2	3	4	5	6
$\theta \cdot 10^4$	19,9	39,0	56,1	69,5	77,6	80,0
v, cm	0,40	0,39	0,87	1,50	2,23	3,02

5.61. Véase la solución. 5.62. $v_{máx} = Pl^3/(32nEJ) = 5{,}1$ cm ($J = bt^3/12$). 5.63. $[P] = \frac{2}{3}\frac{[\sigma]bt^2n}{l} = 20$ kN, $v_{máx} = \frac{3}{8}\frac{Pl^3}{Ebt^3n} = [\sigma]l^2/4Et = 5$ cm. 5.64. Véase la solución. 5.65. Despreciando la deformación de la viga, obtendremos $S_1 = S_2 = 1{,}67$ kN, $\sigma = 85$ MPa. Despreciando la deformación de los tirantes,



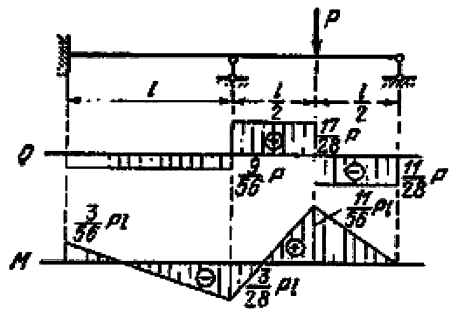
Para el problema 5.69



Para el problema 5.70(11)

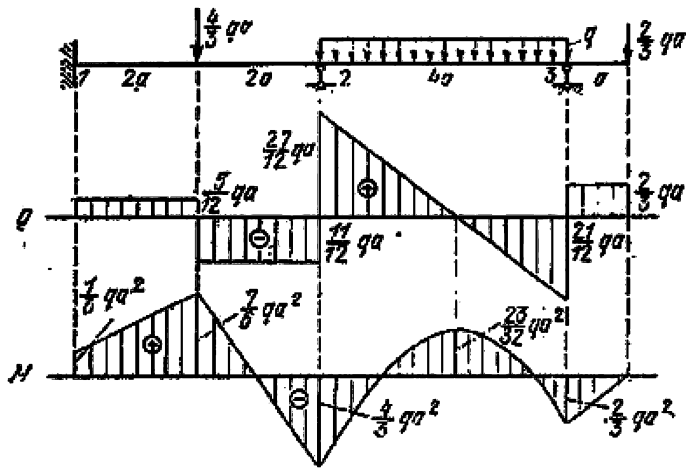
hallaremos $S_1 = 0$, $S_2 = 5{,}00$ kN, $\sigma = 0$. 5.66. $\theta_B = lL/(4EJ)$, $M_A = L/2$, $V_A = -V_B = -3L/(2l)$. 5.67. a) $M_A = 2EJ\theta_B/l$, $M_B = -4EJ\theta_B/l$; b) $M_A = -6EJ\Delta/l^2$, $M_B = 6EJ\Delta/l^2$. 5.68. $\sigma_{máx} = 156$ MPa en la sección junto al empotramiento. 5.69. Véase la figura. 5.70. 1) $M(0) = -3a(a+b)P/(2l)$, $M(a) = -Pa \cdot (1 - 6a/l + 3a^2/l^2)/2$, $v(a) = Pa^3(7 - 12a/l + 3a^2/l^2)/(12EJ)$; 2) $M(0) = -ql^2/8$, máx $M = 9ql^2/128$ cuando $x = 0{,}625l$, $v_{med} = ql^3/(192EJ)$, máx $v = ql^4/(185EJ)$ cuando $x = 0{,}579l$; 3) $M(0) = -7ql^2/120$, máx $M = ql^2/23{,}6$ cuando $x = 0{,}671l$, $v_{med} = ql^4/(349EJ)$, máx $v = ql^4/(327EJ)$ cuando $x = 0{,}598l$; 4) $M(0) = -ql^2/15$, máx $M = ql^2/33{,}6$ cuando $x = 0{,}553l$; $v(0{,}5l) = ql^4/(426EJ)$; máx $v = ql^4/(418EJ)$ cuando $x = 0{,}522l$; 5) $M(0) = -L/2$, $v(0{,}5l) = Ll^2/(32EJ)$, máx $v = Ll^2/(27EJ)$ cuando $x = 2l/3$; 6) $M(0) = \frac{L}{2}\left(1 - 3\frac{b^2}{l^2}\right)$, $v(a) = -\frac{La^2}{4EJ}\left(\frac{a^2}{l^2} - 5\frac{a^2}{l^2} + 6\frac{a}{l} - 2\right)$; 7) máx $|M_1| = 9qa^2/32$ (junto al empotramiento), en el vano $M_{máx} = 0{,}232qa^2$ (a la distancia $57a/64$ del empotramiento), $v_{med} = 0{,}0339qa^4/(EJ)$; 8) máx $|M| = 7qa^2/32$ (junto al empotramiento), en el vano $M_{máx} = 0{,}205qa^2$ (a la distancia $41a/64$ del apoyo derecho), $v_{med} = 0{,}050qa^4/(EJ)$; 9) máx $M = L$ (en el apoyo derecho),

junto al empotramiento $M = -3L/8$, $v_{med} = 5La^2/(16EJ)$; 10) máx $M = 0{,}141qa^2$ (a la distancia $17a/32$ del apoyo derecho), junto al empotramiento $M = qa^2/16$, $v_{med} = qa^4/(64EJ)$; 11) $M(0) = -3Pl/16$, $M_{med} = 5Pl/32$, véanse los diagramas M en la figura, $v_{med} = 7Pl^3/(768EJ)$, máx $v = Pl^3/(48EJ\sqrt{5}) = 0{,}00933Pl^3/(EJ)$ cuando $x = 0{,}553l$. 5.71. 1) $M(0) = M(l) = -Pl/8$, $M_{med} = Pl/8$, $v_{med} = v_{máx} = ql^3/(192EJ)$; 2) $M(0) = -Pb^2a/l^2$, $M(l) = -Pa^2b/l^2$, $v(a) = \frac{Pa^2b^2}{3EJl^3}$. $v_{máx} = \frac{2}{3}\frac{Pa^2b^2}{EJ(3a+b)^2}$ cuando $a > b$ y cuando $x = \frac{2ab}{3a+b}$: 3) $M(0) = M(l) = -\frac{Pa(a+b)}{l}$, $v(a) = \frac{Pa^2}{6EJ}\frac{2b+a}{l}$; 4) $M(0) = M(l) = -ql^2/12$, $v(0{,}5l) = $ máx $v = ql^4/(384EJ)$; 5) $M(0) = -ql^2/30$, $M(l) = -ql^2/20$, máx $M = ql^2/46{,}0$ (cuando $x = 0{,}548l$), $v_{med} = ql^4/(768EJ)$, máx $v = ql^4/764EJ$ (cuando $x = 0{,}525l$); 6) $M(0) = \frac{Lb(2a-b)}{l^2}$, $M(l) = -\frac{La(2b-a)}{l^2}$, $v(a) = \frac{La^2b^2(b-a)}{2EJl^3}$; 7) cuando $b < 2a$ máx $|M| = |2aL/(b+2a)$ (en la parte media de la viga), cuando $b > 2a$ máx $|M| = bL/(b+2a)$ (junto a los apoyos), la flecha en el punto de aplicación del momento L: $v = La^2b/[2(b+2a)EJ]$; 8) máx $|M| = 39L/64$ (en el punto medio de la viga), junto al apoyo izquierdo $M = L/16$, junto al apoyo derecho $M = 7L/16$, $v_{med} = -11La^2/(64EJ)$; 9) máx $M = 3Pa/4$ (en el punto medio de la viga), en los tramos vecinos a los apoyos $M = -Pa/4$, máx $v = 17Pa^3/(12EJ)$ (en el punto medio de viga); 10) máx $|M| = 11qa^2/48$ (junto al apoyo izquierdo), y junto al apoyo derecho $M = -5qa^2/48$, $v_{med} = qa^4/(24EJ)$. 5.72. a) Véase la figura;



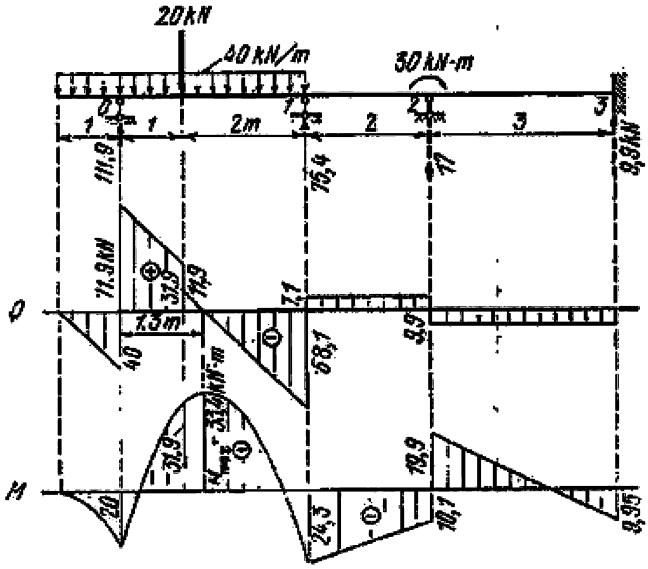
Para el problema 5.72

b) máx $M = 13Pl/64$ en el lugar de aplicación de la fuerza. 5.73. $R_1 = 5qa/12$, $R_2 = 37qa/12$, $R_3 = 5qa/2$. Véase los diagramas Q y M en la figura. 5.74. $\theta_2 = 76qa^3/(9EJ)$ (en el sentido de las agujas del reloj). 5.75. $S = (5/8)\,ql/(1+$



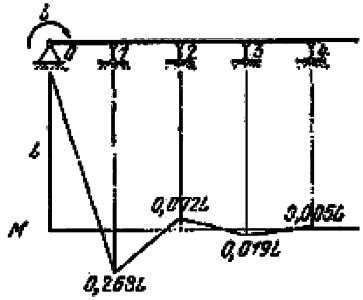
Para el problema 5.73

$+J_1/J_2)=946$ N. 5.76. $S=\frac{J}{J+J_1}q\left[-\frac{8}{3}l\frac{J_1}{J}-\frac{5}{8}l+l_1+\frac{3}{4}\frac{(l_1-l)^2}{l}\right]=9{,}30$ kN. 5.77. La flecha $[3ql^4-4Sl^2(3l_1-l)]/(24EJ_1)=14{,}7$ cm, tensión 301 MPa. 5.78. $P_1=Pl_2^3J_1/(l_2^3J_1+l_1^3J_2)$, $P_2=Pl_2^3J_2/(l_2^3J_1+l_1^3J_2)$. 5.79. Véanse los

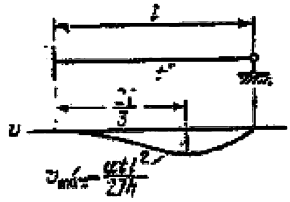


Para el problema 5.79

diagramas Q y M en la figura. máx $M=33{,}4$ kN·m (a 1,30 m de distancia del apoyo O). Tomamos el perfil doble T N° 22a. Los ángulos de giro son: $\theta_0=0{,}00427$, $\theta_1=-0{,}00349$, $\theta_2=-0{,}00267$. $r^{med}=-0{,}00154$ $m=-1{,}54$ mm. 5.80. 1) $M_0=M_1=-21$ kN·m; 2) $M_{1-2}^{izq}=1$ kN·m; $M^{der}=-9$ kN·m; 3) $M_0=M_1=-16{,}67$ kN·m $=-ql^2/12$; 4) $M_1=-31{,}8$ kN·m; 5) $V_A=42{,}8$ kN, $V_B=63{,}6$ kN, $V_C=16{,}9$ kN, $V_D=16{,}7$ kN, máx $M=91{,}7$ kN·m, $M_{mín}=-71{,}8$ kN·m; 6) $V_A=58{,}5$ kN, $V_B=87{,}8$ kN,



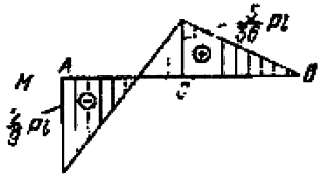
Para el problema 5.81 (a)



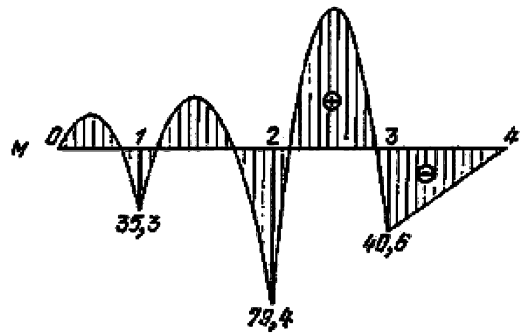
Para el problema 5.83(a)

$V_C=-13{,}5$ kN, $V_D=2{,}2$ kN, $M_{máx}=38{,}0$ kN·m, $M_{mín}=-27{,}0$ kN·m; 7) $V_A=-2{,}7$ kN, $V_B=29{,}7$ kN, $V_C=29{,}7$ kN, $V_D=-2{,}7$ kN, $M_{máx}=12{,}2$ kN·m, $M_{mín}=-8{,}1$ kN·m; 8) $V_A=100{,}0$ kN, $V_B=240$ kN, $V_C=420$ kN, $V_D=200$ kN, $M_{máx}=333$ kN·m, $M_{mín}=-320$ kN·m; 9) $V_A=$

$= 15{,}4$ kN, $V_B = V_C = 20$ kN, $V_D = 15{,}4$ kN, $M_{máx} = 19{,}7$ kN·m, $M_{mín} = -15{,}4$ kN·m; **5.81.** *a)* $M_n = -M_{n-1}/(2+\sqrt{3})$. Véase el diagrama M en la figura. *b)* $M_1 = -0{,}267L$, $M_2 = 0{,}067L$. **5.82.** a) $M_1 = M_2 = 6kEJ/5$ $(k = \alpha t/h)$, b) $M_1 = M_2 = 9kEJ/7$, $M = 6kEJ/7$; c) $M_1 = -15kEJ/11$, $M_2 = -3kEJ/11$; **5.84.** 1) La flecha es igual a cero; 2) en el vano izquierdo [1]) $v = -kx^2(l-x)/(14l)$, donde $k = \alpha t/h$ (α es el coeficiente de dilatación térmica del material; h, la altura de la sección de la viga), máx $v = -0{,}0106\,kl^2$ (cuando $x = 2l/3$); en el vano derecho $v = kx(-3x^2 + 2lx + l^2)/(14l)$, máx $v = 0{,}0500\,kl^2$ (cuando $x = 0{,}623l$); 3) en el vano menor $v = kx(x^2 - 6ax + 5a^2)/(12a) = 0{,}094\,ka^2$, en el mayor máx $v = -0{,}288\,ka^2$; 4) en el vano izquierdo $v = kx^2(l-x)/(7l)$, máx $v = 0{,}0211\,kl^2$ (cuando $x = 2l/3$); en el derecho $v = -nx(x^2 - 3lx + 2l^2)/(14l)$, máx $v = -0{,}0276kl^2$ (cuando $x = 0{,}577l$); 5) en el vano central $v = kx(l-x)/5$, máx $v = 0{,}05kl^2$; en el primero máx $v = -0{,}0385kl^2$ (cuando $x = 0{,}577l$); 6) en el vano primero $v = -kx^2(l-x)/(6l)$, máx $v = -2kl^2/81$ (cuando $x = 2l/3$); en el segundo $v = kx(l-x)/6$, máx $v = kl^2/24$. 7) en el vano izquierdo $v = (3k/14)(x^3/l - x^2)$, máx $|v| = 0{,}032kl^2$ cuando $x = 2l/3$; en el vano derecho $v = k(-2x^3/l - x^2 + 3lx)/14$, $v_{máx} = 0{,}072\,kl^2$ cuando $x = 0{,}56l$; 8) en el vano izquierdo $v = kx^3/5l - kx^2/2 + 3kl/10$, $v_{máx} = 0{,}0468kl^2$ cuando $x = 0{,}558l$; en el vano central $v = kx^2/10 - klx/10$, máx $|v| = kl^2/40$ (en el punto medio del vano); 9) en el vano izquierdo $v = kx^3/12 - kl^2x/12$, máx $|v| = 2kl^2/(36\sqrt{3})$ cuando $x = l/\sqrt{3}$; en el vano derecho $v = -kx^3/8l - kx^2/4 + klx/24 + kl^2$, $v_{máx} = 1{,}21kl^2$ cuando $x = 1{,}41l$; *10)* todos los vanos trabajan en condiciones iguales, tal como en el problema 5.84, *1* (la flecha es igual a cero). **5.85.** máx $M = M_1 = -3EJ\alpha t/(2h)$, máx $v = 4\alpha t a^2/(27h)$ (en el vano mayor a la distancia $4a/3$ del apoyo *1*), $\theta_1 = 0$. **5.86.** 1) $S = 48E\alpha ht/[l^2(2/J + 1/J_1) + 48/F] = 174$ N; 2) $S = 48E\alpha ht/[l^2(2/J + 1/J_1)] = 185$ N. **5.87.** *a)* $P/(l + 3\varepsilon EJ/l^3)$, *b)* $M_1 = Pa(a^2 - 2\varepsilon EJ)/[2(2a^2 + 7\varepsilon EJ)]$; *c)* $M_1 = -0{,}42\alpha tEJ/h$, $M_2 = -0{,}45\alpha tEJ/h$ en N·m, donde h es la altura de la viga en m. **5.88.** *a)* $\varepsilon = l^3/(192EJ) = 3{,}68 \cdot 10^{-4}$ m/N; b) $\varepsilon = l^3/(16EJ) = 44{,}1 \cdot 10^{-4}$ m/N. **5.89.** $M_1 = -Pl/16$, $M_2 = 0$. **5.90.** Véase la figura. **5.91.** Véase el diagrama M en N·m en la figura. **5.92.** $M_1 = -3{,}37$ kN·m, $M_2 = -2{,}44$ kN·m, $M_3 = 1{,}22$ kN·m. **5.93.** a) $6M_{1lm}/l$, donde M_{1lm} es el valor límite del momento flector; b) $7{,}5M_{1lm}/l$; c) $6M_{1lm}/l$. **5.94.** $P_{1lm} = (l+x)M_{1lm}/(lx - x^2)$, mín $P_{1lm} = 5{,}64M_{1lm}/l$ cuando $x = 0{,}41l$. **5.95.** a) $q_{1lm} = (6 + 4\sqrt{2})M_{1lm}/l^2 = 11{,}66M_{1lm}/l^2$, $0{,}415l$ a partir del apoyo derecho; b) lo mismo; c) lo mismo. **5.96.** a) $P_{1lm} = 8M_{1lm}/l$; b) lo mismo.



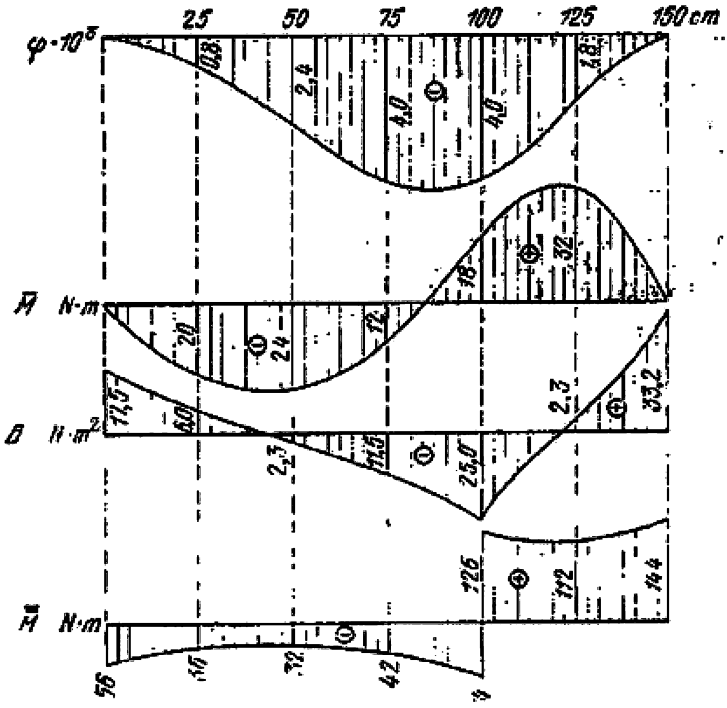
Para el problema 5.90



Para el problema 5.91

[1]) El cálculo de x se lleva a cabo del extremo izquierdo del vano correspondiente.

5.97. $q_{lim} = 16M_{lim}/l^2$. 5.98. máx $M = 18{,}7$ kN·m, máx $v = 0{,}215$ cm. 5.99. $\sigma = 58{,}8$ MPa. 5.100. $\sigma = 77{,}0$ MPa. 5.101. El calado del pontón cerca de la proa es igual a 27 cm, cerca de la popa es igual a 107 cm. El momento flector máximo es 233 kN·m. 5.102. máx $v = 0{,}277$ cm, máx $M = 17{,}5$ kN·m. 5.103. Véase los diagramas en la solución. 5.104. máx $\sigma = 183$ MPa, máx $\overline{\tau} = 75{,}5$ MPa, máx $\overline{\overline{\tau}} = 8{,}3$ MPa. 5.105. Véase la figura. 5.106. máx $\sigma = 111$ MPa, véase el diagrama de los bimomentos en la solución. 5.107. máx $\overline{\tau} = 6{,}0$ MPa (en la sección $x = 100$ cm). máx $\overline{\overline{\tau}} = 3{,}6$ MPa (junto al empotramiento). 5.108. máx $\sigma = 115$ MPa (se diferencia de la exacta en un 4%). Véase el diagrama de los bimomentos en la solución.



Para el problema 5.105

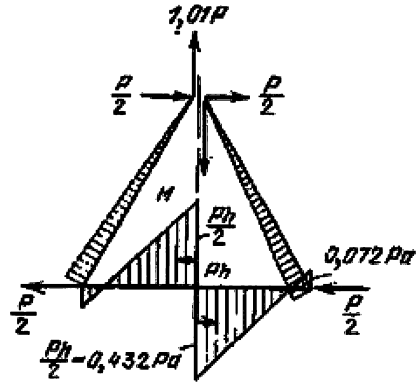
5.109. $\delta_H = \dfrac{Ph^3(3l/h + J_l/J_h)}{3EJ_l} = 1{,}22$ cm, $\delta_V = \dfrac{Phl^2}{2EJ_l} = 0{,}58$ cm.

5.110. $y_C = 0{,}310\dfrac{La^3}{EJ}$. 5.111. $\delta_{CG} = 0{,}47\dfrac{Pa^3}{EJ}$, $\theta_{GD} = \dfrac{Pa^2}{2EJ}$. 5.112. $\delta_C = \dfrac{Pr^3}{2EJ}$, $v_A = 0{,}175\dfrac{Pr^2}{EJ}$, $\delta_A = 0{,}305\dfrac{Pr^3}{EJ}$. 5.113. Véase la tabla en la pág. 444. 5.114. $\theta_B = 25\dfrac{qa^3}{24EJ}$. 5.115. $\delta_{1-2} = \dfrac{5Pa^3}{3EJ}$, $\theta_2 = \dfrac{8Pa^2}{3EJ}$. 5.116. $\delta_{AB} = 15{,}7\dfrac{qa^4}{EJ}$, $\theta_{AB} = 12{,}6\dfrac{qa^3}{EJ}$. 5.117. $\delta_{vert} = \dfrac{ql^4}{8EJ_1} + \dfrac{ql^3h}{2EJ_2}$, $\delta_{horiz} = \dfrac{ql^2h^2}{4EJ_2}$, $\theta = \dfrac{ql^3}{6EJ_1} + \dfrac{ql^2h}{2EJ_2}$. 5.118. máx $M = 0{,}308Pa$ (junto al empotra-

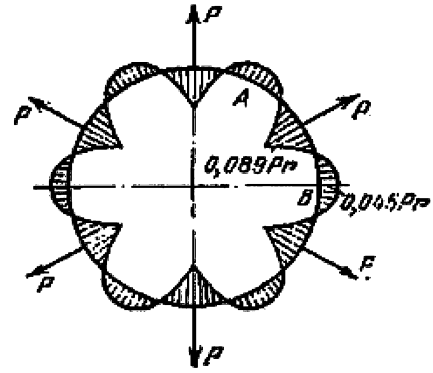
Tabla para el problema 5.113

Variantes	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
Desplazamiento δ, multiplicado por EJ	$3{,}72Lr^2$	$1{,}85Pr^3$	$2{,}76Lr^2$	$2{,}54Pr^3$	$5{,}12Pr^3$	$6{,}06Pr^3$
Ángulo entre la dirección del desplazamiento y la horizontal	57°30′	74°20′	68°40′	51°40′	87°00′	85°15′

miento). Véase los diagramas M, Q, N en la solución. 5.119. máx $M = 0{,}221qa^2$ (véase el diagrama M en la solución). 5.120. (máx $M = 0{,}318Pr$ (bajo la fuerza P). Véase el diagrama M en la solución. 5.121. Véase en la figura. 5.122,

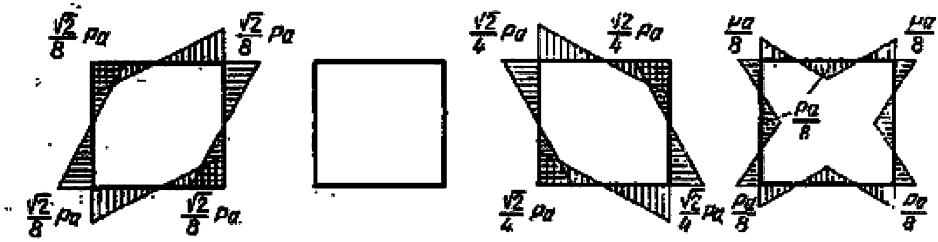


Para el problema 5.121



Para el problema 5.123

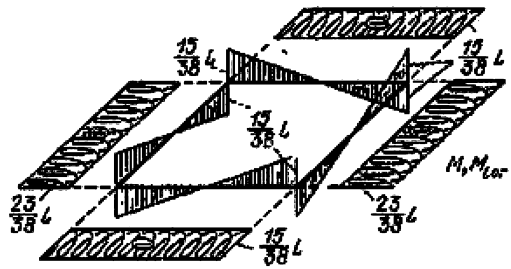
máx $M = 0{,}324Pa$ (en el ángulo izquierdo inferior). Véase el diagrama M en la solución. 5.123. Véase el diagrama M en la figura. 5.124. Véase la figura. El área del diagrama de momentos dentro del marco es igual a su área por fuera.



Para el problema 5.124

5.125. *a*) $M_B = 2L/\pi$; *b*) $M_A = 0{,}86qr^2$ (compresión desde afuera); *c*) $M = qr^2\left[\alpha - \operatorname{sen}\alpha - \frac{\pi}{3}(1-\cos\alpha)\right]$, máx $M = 0{,}48qr^2$ (cuando $\alpha = 93°$); *d*) $M_B = 1{,}18Pr$, $Q_A = P/\pi$. 5.126. *l*) máx $M = qa^2/2$ (en la sección B), $M_A =$

$= 0{,}035qa^2$; 2) máx $M = 0{,}63Pr$ (en la sección A), máx $Q = 0{,}63P$, cerca de las articulaciones (desde abajo), máx $N = 0{,}63P$ (en la sección A); 3) máx $M = 0{,}71Pa$, máx $Q = P/2$, máx $N = P/2$; 4) máx $M = 17Pa/40$ (cerca de los nudos A y B, así como en el tramo AB de la estructura), máx $Q = 23P/40$ (en los tramos AD y BC), máx $N = 23P/40$ (en el tramo AB); 5) máx $M = 0{,}63L$, en las secciones B y E (de la parte superior), máx $Q = 0{,}63L/r$ (en la sección A), máx $|N| = 0{,}63L/r$ (en los tramos DE y BC de la estructura); 6) máx $M = 2{,}27L$, en las secciones E y F (de la parte inferior), máx $Q = 1{,}80L/r$ (en las secciones A y B), máx $N = 1{,}80L/r$ (en las secciones C y D); 7) máx $M = L/2$ (en las secciones A y B), máx $Q = 0{,}64L/r$ (en las secciones B y A), máx $N = 0{,}64L/r$ (en las secciones D y C); 8) máx $M = ql^2/12$ (en las secciones A y B), máx $Q = ql/2$ (en las secciones de los extremos de los tramos CD y EF de la estructura), máx $N = ql/2$ (en los tramos EC y FD); 9) máx $M = 0{,}182Pr$ (en la sección A), máx $Q = 0{,}5P$ (en la sección A), máx $|N| = 0{,}5P$ (en las secciones C y D); 10) máx $M = ql^2/4$ (en las secciones C, A y B), máx $Q = qa$ (en las secciones A y B del dintel), máx $|N| = qa$ (en los pilares). 5.127. $\delta = 0{,}565Pa^3/(EJ)$. 5.128. a) máx $M = 1{,}08qa^2$ en el nudo A; $\delta_A = 0{,}140qa^4/(EJ)$; b) máx $M = 0{,}510Pa$ en el tramo AB próximo al nudo A, $\delta_A = 0{,}25Pa^3/(EJ)$. 5.129. máx $M = 0{,}667Pa$ en el nudo A; $\theta_A = 0{,}125Pa^2/(EJ)$. 5.130. 1) $\delta_{CD} = 0{,}149Pr^3/(EJ)$; 2) $\delta_{CD} = (\pi/3 + \sqrt{3}/2 - 6/\pi)\, Pr^3/(EJ)$. (*Indicación*: Hace falta aplicar 6 fuerzas iguales a 1 y por el método de Mohr dividir entre 3). 5.131. Véase la solución. 5.132. máx $M = 11Ph/40$. Véase el diagrama M en la solución. 5.133. $\delta = \dfrac{0{,}78Pr^3}{EJ} + \dfrac{0{,}35Pr^3}{GJ_{tor}}$. 5.134. $\varphi = \dfrac{\pi Pr^2}{2}\left(\dfrac{1}{EJ} + \dfrac{1}{GJ_{tor}}\right)$. 5.135. $\delta = \dfrac{38Pa^3}{Ed^4} = 1{,}58$ cm. 5.136. $\theta = \dfrac{ma^2}{EJ}$. 5.137. $\delta = \dfrac{0{,}64La^2}{EJ}$. 5.138. $\delta = \dfrac{P(a^3 + c^3)}{3EJ}$. 5.139. $f = \dfrac{21{,}8Pl^3}{Ea^4} = 7{,}50$ cm. 5.140. Véanse los diagramas M y M_{tor} en la solución para el caso de $b = a$ y $GJ_{tor}/(EJ) = 0{,}8$. 5.141. Cuando



Para el problema 5.141

$b = a$ y $GJ_{tor}/(EJ) = 0{,}8$, máx $M = 15L/38$. Véanse los diagramas M y M_{tor} en la figura. 5.142. Cuando $b = a$ y $GJ_{tor}/(EJ) = 0{,}8$, máx $M = L\sqrt{3}/27$, máx $M_{tor} = L$. Véanse los diagramas M y M_{tor} en la solución. 5.143. máx $M = 0{,}318Pa$, máx $M_{tor} = 0{,}182Pa$ (junto al empotramiento). Véanse los diagramas M y M_{tor} en la solución. 5.144. máx $M_{tor} = 0{,}318L$ (en los lugares de aplicación de los momentos L). Véanse los diagramas M y M_{tor} en la solución. 5.145. El momento flector en la sección bajo la fuerza es igual a $0{,}389Pa$. Aquí la flecha es igual a $0{,}28Pa^3/(EJ)$. 5.146.[1]) 1) máx $M = 11Pa/26$ (cuando $b = a$); 2) máx $M = 0{,}84L$ (en los nudos A y B en los tramos AD y BC de la estructura), máx $M_{tor} = 1{,}16L$ (en el tramo AB), $Q = 0{,}395L/a$ (en todos los

[1]) Las respuestas se dan para el caso cuando la sección del pórtico es circular ($J_{tor} = 2J$). Se considera que $G = 0{,}4E$.

lugares); *3*) máx $M = 16L/27$ (en el tramo AB de la estructura), máx $|M_{tor}| = 16L/27$ (en los tramos AD y BC), $Q = 0$; *4*) máx $M = L$ (en los lugares de aplicación de los momentos concentrados $2L$), máx $M_{tor} = 21L/32$ (en los tramos AB y DC), $Q = 21L/(32a)$ (en todos los lugares); *5*) máx $M = 0{,}131L$ (en los nudos), máx $M_{tor} = 0{,}869L$ (en los tramos de la estructura de longitud a entre los lugares de aplicación de los momentos exteriores L), $Q = 0{,}088L/a$ (en todos los lugares); *6*) $M = 5L/27$ (en los tramos AB y DC de la estructura), máx $|M_{tor}| = 22L/27$ (en los tramos de longitud a entre los lugares de aplicación de los momentos L), $Q = 0$; *7*) máx $M = 0{,}62L$ (en la sección A): máx $|M_{tor}| = 0{,}44L$ (en los lugares de aplicación de los momentos L) (por detrás), $Q = 0$; *8*) máx $M = 0{,}71L$ (en los lugares de aplicación de los momentos L), máx $M_{tor} = 0{,}54L$ (en las secciones A y B), $Q = 0{,}46L/r$ (en todos los lugares); *9*) máx $M = \pm 0{,}532L$ (en las secciones A y B), máx $|M_{tor}| = 0{,}468L$ (en las secciones C y D), $Q = 0$; *10*) máx $M = Pr$ (en los lugares de aplicación de los momentos $2P$), máx $|M_{tor}| = 0{,}19Pr$ (en las secciones bajo el ángulo central de 32°30′ respecto al eje CD de simetría de la carga), $Q = \pm P$ (es constante dentro de los límites del semianillo). 5.147. Véase la solución. 5.148. $Pl^3/(192EJ)$ (valor exacto). 5.149. $Pl^3/(48EJ)$ (valor exacto). 5.150. $v|_{l/2} = 7Pl^3/(768EJ)$, $\theta|_{l/2} = 3Pl^2/(256EJ)$. 5.151. $\theta|_l = M_0 l/(EJ)$, $v|_l = M_0 l^2/(2EJ)$. A partir de los valores EJ, l, M_0 dados en los datos del problema, los diagramas representados en la figura fueron obtenidos con ayuda de un ordenador.

Capítulo 6

6.1. $\sigma_1 = 82{,}7$ MPa, $\sigma_2 = -17{,}3$ MPa, $\sigma_3 = -82{,}7$ MPa, $\sigma_4 = -17{,}3$ MPa, $v = 0{,}08$ cm. 6.2. $\sigma_{máx} = 143$ MPa. 6.3. $\sigma_{máx} = 12$ MPa $< |\sigma|$, $f = l/200 < |f|$. 6.4. $\sigma_1 = -71{,}6$ MPa, $\sigma_2 = 60$ MPa, $\sigma_3 = -18{,}3$ MPa. 6.5. $\sigma_{máx} = 120$ MPa, $f = 0{,}495$ cm. 6.6. $\sigma_1 = -22{,}6$ MPa, $\sigma_2 = 18{,}1$ MPa, $f = 1$ cm. 6.7. $P = 3{,}2$ kN. 6.8. Perfil en U N° 27. 6.9. $k = h/b = M_x/M_y$. 6.10. $k = 1/\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$. 6.11. $\alpha = 1{,}5097$ rad. 6.12. $\varphi = -0{,}244$ rad. 6.13. La dirección de la flexión es perpendicular a la línea cero. 6.15. $b = 7{,}8$ cm. 6.16. $\sigma_0 = P/a^2$, $\sigma_A = 4P/a^2$, $\sigma_B = 7P/a^2$. 6.17. $l < 0{,}0125d$. 6.18. $P = 3{,}9T$, $e = 0{,}23$ cm. 6.19. $x = 23{,}5$ mm. 6.20. 48%. 6.21. 25%. 6.22. $\sigma_1 > \sigma_2$ cuando $x < 0{,}4b$, $\sigma_1 < \sigma_2$ cuando $x > 0{,}4b$. 6.23. $\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3 = 37{,}5$ MPa. 6.24. $\sigma_{máx} = 119$ MPa, $\sigma_{mín} = 83{,}3$ MPa. 6.25. En cuatro veces. 6.26. $t = 6{,}5$ mm; perfil en U N° 24. 6.27. $\sigma = 81{,}8$ MPa. 6.28. $\sigma_e = 3{,}44\,\sigma_0$. 6.29. Perfil en U N° 30. 6.30. Véase la solución. 6.31. $\sigma_{máx} = 142$ MPa $< [\sigma]$. 6.32. $\sigma_{máx} = 159{,}8$ MPa. 6.33. $\sigma_{máx} = 103$ MPa. 6.34. En 3,1 veces. 6.35. $b = 8{,}6$ cm. 6.36. $P = 25$ kN. 6.37. $F = 14{,}6$ cm². 6.38. $\sigma_\beta = 0{,}0174 = 2{,}11\sigma_\beta = 0$. 6.39. $\sigma = -1\,698$ MPa. 6.40. $P = 27{,}6$ kN. 6.41. $P = 0{,}0725$ kN. 6.42. Un círculo de radio $r = 12{,}5$ cm; un rombo con semidiagonales iguales a 3,34 cm y 6,35 cm, un rombo con semidiagonales 9,2 cm y 1,03 cm. 6.43. $d = 24{,}4$ cm. 6.44. Los segmentos sobre los ejes son $a = -516$ cm, $b = -6{,}7$ cm. 6.45. Un rombo con semidiagonales iguales a 1 cm y 1,67 cm. 6.46. $M/M_T = 1 - (N/N_T)^2$. 6.47. Véase la solución. 6.48. $M = 8{,}44$ kN·m. 6.49. $N = 38{,}8$ kN. 6.50. $e = 5{,}25$ cm. 6.51. $P = 128{,}5$ kN. 6.52. $d = 4{,}86$ cm. 6.53. $\sigma_e = 134$ MPa. 6.54. $d_I = 4{,}95$ cm, $d_{II} = 5{,}1$ cm, $d_{III} = 5{,}35$ cm, $d_{IV} = 5{,}2$ cm. 6.55. $\sigma_e = 45{,}8$ MPa $< [\sigma]$. 6.56. $\sigma_{máx}^{III} = 82$ MPa $< [\sigma]$. 6.57. $d = 5$ cm. 6.58. Véase la solución. 6.59. Véase la solución. 6.60. $d = 8$ cm. 6.61. $d = 5{,}55$ cm. 6.62. $d \geqslant 4{,}3$ cm. 6.63. $M_{tor} = 0{,}71$ kN·m. 6.64. $d = 5{,}9$ cm. 6.65. $P = 7$ kN. 6.66. $d = 4{,}1$ cm. 6.67. $\sigma = 124$ MPa $< [\sigma]$. 6.68. $\sigma_e^{III} = 124$ MPa, $\sigma_e^{IV} = 115$ MPa. 6.69. $d = 15$ cm. 6.70. $d = 1{,}25$ cm. 6.71. $d = 2{,}2$ cm. 6.72. En dos veces. 6.73. $\sigma_e^{III} = 1010$ MPa. 6.74. $\sigma_e^{III} = 120$ MPa $< [\sigma]$. 6.75. $\sigma_{máx} = 154{,}1$ MPa $< [\sigma]$. 6.76. $\sigma_e^{III} = 136$ MPa $< [\sigma]$. 6.77. $\sigma_e^{III} = 135$ MPa $< [\sigma]$. 6.78. $a = 6{,}05$ cm. 6.79.

máx $\sigma_e^{III} = 159$ MPa $< [\sigma]$. 6.80. $a = 5{,}1$ cm, $\alpha = \pi/2 rad$. 6.81. $\sigma = -102$ MPa. 6.82. $\sigma = 125$ MPa. 6.83. $\sigma = 184$ MPa. 6.84. $P = 1$ kN. 6.85. $P = 3{,}5$ kN. 6.86. Véase la solución.

Capítulo 7

7.1. a) $d_{lím} = 46$ mm; cuando $d = 30$ mm, $P_{ad} = 29$ kN; b) $a_{lím} = 40$ mm; cuando $a = 30$ mm, $P_{ad} = 49$ kN; c) $b_{lím} = 40$ mm; cuando $b = 25$ mm, $P_{ad} = 47$ kN; d) el número límite del perfil es el N° 16; para el N° 16 $P_{ad} = 171$ kN. 7.2. $27 \times 13{,}5$ mm. 7.3. $d = 54$ mm. 7.4. $Q_{(a)} : Q_{(b)} : Q_{(c)} : Q_{(d)} = 1 : 0{,}977 : 0{,}614 : 0{,}518$. 7.5. a) $d = 46$ mm; b) $d_{ext} = 48$ mm, en caso de una sección tubular es más ligera en un 37,5%. 7.6. 3,56 kg; en 1,7 veces. 7.7. $P_{cr} = 180$ kN. 7.8. $d = 30$ mm. 7.9. $d = 40$ mm. 7.10. $P_{cr} = 7{,}4$ kN. 7.11. $P_{cr}^0 = 500$ kN; $l_{máx} = 1{,}4$ m. Tomando en consideración la influencia de la fuerza cortante $P_{cr} = 0{,}97 P_{cr}^0$ (la disminución es de un 3%). 7.12. $n_{res} = 3{,}63$, $n_{est} = 1{,}83$. 7.13. 1) $d = 26$ mm; 2) $d = 21$ mm. 7.14. *a*) $P_{cr} = \pi^2 \sqrt{2}\, EJ/a^2$; *b*) $P_{cr} = \pi^2 EJ/(2a^2)$. 7.15. $b = 40$ mm, $h = 8$ mm. 7.16. $T = 343{,}5$ K, $\varepsilon = 0{,}52 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{res}$. 7.17. 7%. $T_{lím} = 1\,150$ K. 7.18. $h = 1{,}67$ cm. 7.19. 1) $P_{ad} = 311$ kN; 2) 590 kN; 3) 543 kN; 4) 390 kN. 7.20. *a*) $\sigma_{cr} = 255$ MPa, *b*) 231 MPa, *c*) 260 MPa, *d*) 260 MPa. 7.21. Para la barra *1* $P_{cr} = 136$ kN, para la barra *2* $P_{cr} = 78$ kN. 7.22. Según la condición de estabilidad general $P_{ad} = 39$ kN, según la condición de estabilidad local $P_{ad} = 119$ kN. 7.23. $P_{cr} = 135$ kN. 7.24. 225 kN. 7.25. $T = \dfrac{2EE_t}{E + E_t}$, $h_1 = \dfrac{hE_t}{E + E_t}$, $h_2 = \dfrac{hE_t}{E + E_t}$. 7.26. $P_{cr} = 526$ kN, según la fórmula de Yasinski $P_{cr} = 526$ kN; según la fórmula de Euler (condicionalmente) $P_{cr} = 790$ kN. 7.27. $P_{cr} = 45{,}2$ kN. Si se cambia T por E, $P_{cr} = 38{,}6$ kN. 7.28. a) 3,37 veces; b) 3,96 veces; c) 2,19 veces. 7.29. Acero, 2,02 cm. 7.30. La condición de estabilidad está cumplida; los coeficientes de seguridad son correspondientemente 2,10 y 2,03. 7.31. Una de las variantes posibles es: el angular $80 \times 80 \times 8$. 7.32. $a = 2{,}6$ cm, $P_{ad} = 188$ kN. 7.33. Los resultados de la solución están escritos en

Tabla para el problema 7.33

	Relación entre la flecha en el punto con la abscisa x y la flecha máxima				Coeficiente de la fuerza crítica k^2	Error de la determinación de la fuerza crítica en %
	$x = 0$	$x = l/6$	$x = l/3$	$x = l/2$		
Forma inicial (a)	0	0,33	0,67	1	—	—
1-ra aproximación	0	0,48	0,85	1	12	+21,6
2-da aproximación	0	0,49	0,86	1	10	+1,3
Solución exacta	0	0,50	0,87	1	9,87	—
Forma inicial (b)	0	0,51	0,87	1	—	—
1-ra aproximación	0	0,51	0,87	1	9,84	−0,3

la tabla que sigue, donde k^2 es el coeficiente en la fórmula $P_{cr} = k^2 EJ/l^2$. 7.34. Los valores del coeficiente k^2 obtenidos por los distintos métodos para la fórmula $P_{cr} = k^2 EJ/l^2$ se aducen en la tabla. 7.35. Los valores de k^2 obtenidos para la fórmula $P_{cr} = k^2 EJ/l^2$ para $n = 2, 3, 4$ son respectivamente iguales a 8; 9; 9,37. El

Tabla para el problema 7.34

	Caso a)	Caso b)
Método energético	10	9,8710
Método Bubnov—Galerkin	10	9,8710
Método de aproximaciones sucesivas	9,86	9,8361
Valor exacto	9,87	9,8696

Tabla para el problema 7.36

	$\alpha=0{,}2$ $\beta=0{,}2$	$\alpha=0{,}4$ $\beta=0{,}2$	$\alpha=0{,}6$ $\beta=0{,}6$
Variante a) solución aproximada	2,91	5,17	9,07
Variante b)	2,95	5,35	9,34
Solución exacta	2,80	5,09	9,24

valor exacto es $k^2=9{,}87$. 7.36. a) $P_{cr}=9{,}6\,\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)(1-\beta)^2(1+0{,}6\beta)}\,\dfrac{EJ}{l^2}$; b) $P_{cr}=n^2EJ/(l^2C)$, donde $C=1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\left[\operatorname{sen}\dfrac{(1-\beta)\pi}{2}-(1-\beta\,\dfrac{\pi}{2}\cos\times\right.$ $\left.\times\dfrac{(1-\beta)\pi}{2}\right]$. Los coeficientes k^2 en la fórmula $P_{cr}=k^2EJ/l^2$ obtenidos por distintos métodos se aducen en la tabla. 7.37. $2P_{cr}=\dfrac{4}{3}\pi^2\dfrac{EJ}{l^2}$. 7.38. $8EJ_0/l^2$. 7.39. $(P_1+P_2)_{cr}=k^2\dfrac{EJ}{l^2}$, donde $k^2=\dfrac{96}{3+2\alpha+2\beta+3\alpha\beta}$; a) $k^2=9{,}26$; el valor exacto es $k^2=9{,}45$ (el error es de un 1,9%); b) $k^2=8{,}78$; el valor exacto es $k^2=8{,}95$ (el error es de un 1,9%). 7.40. *Caso de un apoyo elástico.* Cuando $n=2$ (véase la figura del problema) $P_{cr}=8EJ/l^2+cl/4$; cuando $n=3$ (flexión simétrica) $P_{cr}=9EJ/l^2+cl/6$; cuando $n=3$ (flexión antisimétrica) $P_{cr}=27EJ/l^2$. *Caso de dos apoyos elásticos.* Cuando $n=3$ (flexión simétrica) $P_{cr}=9EJ/l^2+$ $+cl/3$; cuando $n=3$ (flexión antisimétrica) $P_{cr}=27EJ/l^2+cl/9$; cuando $n=6$ (flexión antisimétrica) $P_{cr}=72EJ/l^2$. Los gráficos $(P/P_E,\ cl/P_E)$ están dados en la solución. 7.41. $P_{cr}=2{,}3P_E$, $P_E=83{,}5$ kN. El número mínimo del perfil de la viga equivalente al apoyo absolutamente rígido es el N° 30. 7.42. $P_{cr}=20{,}4$ kN, $l_{cr}=1$ m. 7.43. Cuando $0\leqslant\lambda\leqslant 4$, $n=\dfrac{1}{9}(1+\lambda)$; cuando $4\leqslant\lambda\leqslant 20$, $n=\dfrac{4}{9}\left(1+\dfrac{\lambda}{16}\right)$; cuando $\lambda\geqslant 20$, $n=1$; $(E_2J_2)_{cr}=$ $=20E_1J_1l_2^3/l_1^3$. En el gráfico (véase la solución) las rectas correspondientes están trazadas con líneas continuas. 7.44. Aproximadamente $n^2=2/(1+k)$; cuando $k=0$, $n^2=2$. La solución exacta nos lleva a la ecuación $\dfrac{\operatorname{tg}(n\pi/2)}{n\pi/2}+$ $+\dfrac{\operatorname{tg}(\sqrt{k}n\pi/2)}{k\sqrt{k}n\pi/2}=1+\dfrac{1}{k}$, cuando $k=0$, $n^2=94$. 7.45. El coeficiente m se deter-

mina mediante la ecuación $\frac{32}{9}(1-m^2)-\pi^2(4-m)\left(2c+\frac{m-1}{2}\right)=0$. Cuando $c=0$, $m=1$, cuando $c=\infty$, $m=4$. 7.46. *a*) $(EJ)_{\min}=Pal/3$, *b*) $(EJ)_{\min}=Pal/2$, por la fig. *c*) $(EJ)_{\min}=Pal/6$. 7.47. $c_{\min}=3EJ/l^3$. 7.48. $k_{\min}=\pi^4EJ/l^4$. 7.49. $J_{\min}=2\sigma l^2/(\alpha\pi E)=7{,}23$ cm^4. 7.50. $J_{\min}=39{,}4$ cm^4. 7.51. $P_{cr}=1{,}51\pi^2EJ/l_1^2$. 7.52. $P_{cr}=\begin{cases}60c & \text{cuando } c\geqslant 10{,}3 \text{ kN/m},\\ \pi^2EJ/l^2=6{,}15 \text{ kN} & \text{cuando } c\leqslant 10{,}3 \text{ kN/m}.\end{cases}$ La rigidez crítica del apoyo es $c_0=10{,}3$ kN/m. 7.53. $P_{cr}=kc_1c_2/(c_1+c_2)=1{,}6$ kN. Al perder la estabilidad, la barra permanece recta, girando alrededor del punto con la coordenada $x_0=c_2l/(c_1+c_2)=40$ cm. 7.54. El vuelco tendrá lugar cuando la fuerza $P_{cr}=1\,575$ kN. La fuerza crítica de Euler es $P_E=1\,830$ kN. La tensión en los tirantes (cuando $\delta=1$ cm) es $\sigma=218$ MPa. 7.55. $P_{cr}=\frac{\pi^2EJ}{l^2}+E_1\frac{ts}{l^2}\frac{l^2}{\pi^2}$. 7.56. 1) $P_{cr}=Gnd^4/(32la)=20{,}1$ kN; 2) después de perder la estabilidad $P=P_{cr}\varphi/\operatorname{sen}\varphi\approx P_{cr}/(1-\varphi^2)/6$; 3) cuando $\varphi=0{,}1$, $P=20{,}13$ kN; cuando $\varphi=0{,}15$, $P=20{,}17$ kN; cuando $\varphi=0{,}2$, $P=20{,}23$ kN;

4) $P=20{,}23$ kN. 7.57. $d_0=3{,}21$ cm; 10,7%. 7.58. *a*) $f=\frac{Pl^3}{EJ\,(kl)^3}\left(\frac{\operatorname{tg}kl}{kl}-1\right)$, $M_{máx}=-Pl\frac{\operatorname{tg}kl}{kl}$; *b*) $f=\frac{ql^4}{EJ\,(kl)^4\cos kl}\left(kl\operatorname{sen}kl+\cos kl-1+\frac{1}{2}k^2l^2\times\right.$ $\left.\times\cos kl\right)$, $M_{máx}=-\frac{ql^2}{(kl)^2\cos kl}(kl\operatorname{sen}kl+\cos kl-1)$, *c*) $f=\frac{M_0l^2}{EJ\,(kl)^2}\times$ $\times(\sec kl-1)$, $M_{máx}=-M_0\sec kl$. 7.59. *a*) $f=\frac{Pl^3}{EJ\,(kl)^3}\left(1-\frac{\operatorname{th}kl}{kl}\right)$, $M_{máx}=-Pl\frac{\operatorname{th}kl}{kl}$, *b*) $f=\frac{ql^4}{EJ\,(kl)^4\operatorname{ch}kl}\left(\operatorname{ch}kl-kl\operatorname{sh}kl-1+\frac{1}{2}k^2l^2\operatorname{ch}kl\right)$, $M_{máx}=-\frac{ql^2}{(kl)^2\operatorname{ch}kl}(1-\operatorname{ch}kl+kl\operatorname{sh}kl)$, *c*) $f=\frac{M_0l^2}{EJ\,(kl)^2}\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch}kl}\right)$, $M_{máx}=$ $=-M_0\frac{1}{\operatorname{ch}kl}$. 7.60. *a*) $v=\frac{M_Bl^2}{EJ\,(2u)^2}\left(\frac{\operatorname{sen}kx}{\operatorname{sen}2u}-\frac{kx}{2u}\right)$, $M_x=M_B\frac{\operatorname{sen}kx}{\operatorname{sen}2u}$; *b*) $v=\frac{M_0l^2}{EJ\,(2u)^2}\left[\frac{\cos k\left(\frac{l}{2}-x\right)}{\cos u}-1\right]$, $f=\frac{M_0l^2}{8EJ}\frac{2(1-\cos u)}{u^2\cos u}$, $M_x=M_0\times$ $\times\frac{\cos k\left(\frac{l}{2}-x\right)}{\cos u}$, $M_{máx}=\frac{M_0}{\cos u}$; *c*) $v=\frac{ql^4}{EJ\,(2u)^4}\left[\frac{\cos u\left(1-\frac{2x}{l}\right)}{\cos u}-1\right]-$ $-\frac{ql^2}{8EJu^2}x(l-x)$, $f=\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ}\frac{2u\left(\sec u-1-\frac{1}{2}u^2\right)}{5u^4}$; $M_x=\frac{ql^2}{8}\frac{2}{u^2}\times$ $\times\left[\frac{\cos u\left(1-\frac{2x}{l}\right)}{\cos u}-1\right]$, $M_{máx}=\frac{ql^2}{8}\frac{2}{u^2}\frac{1-\cos u}{\cos u}$; d) cuando $0<x<\frac{l}{2}$, $v=\frac{Pl^3}{48EJ}\frac{3}{u^3}\frac{\operatorname{sen}kx}{\cos u}-\frac{Pl^3}{8EJ}\frac{1}{u^2}x$, $f=\frac{Pl^3}{48EJ}\frac{3(\operatorname{tg}u-u)}{u^3}$, $M_x=\frac{P}{2k}\times$ $\times\frac{\operatorname{sen}kx}{\cos u}$, $M_{máx}=\frac{P}{2k}\operatorname{tg}\frac{kl}{2}=\frac{Pl}{4}\frac{\operatorname{tg}u}{u}$. 7.61. *a*) $f=\frac{2Pl^3}{\pi^4EJ}\frac{1}{1\mp\alpha}\approx$ $\approx\frac{Pl^3}{48EJ}\frac{1}{1\mp\alpha}$; b) $f=\frac{4}{\pi^3}\frac{Pl^3}{EJ}\frac{1}{1\mp\alpha}\approx\frac{5}{384}\frac{Pl^3}{EJ}\frac{1}{1\mp\alpha}$, donde $\alpha=$ $=Nl^2/(\pi^2EJ)=N/N_E$. El signo menos en el denominador corresponde a la

fuerza *comprimente* N, el signo más, a la fuerza de *tracción*. Ambas fórmulas pueden ser unidas en la forma $f = f_{trans}\left(1 - \frac{1}{N/N_E}\right)$, donde f_{trans} es la flecha debida solamente a la carga transversal. 7.62. Las fórmulas exacta

Tabla para el problema 7.62

N, kN	10	25	50	75	100	200	300	400
$v_{máx}$, mm	0,2	0,6	1,2	1,9	2,6	6,7	13,7	28,6
$\sigma_{máx}$, MPa	2,0	5,0	10,5	16,3	22,5	53,0	101,9	194,2

Tabla para el problema 7.63

N, kN		10	25	50	75	100	200	300	400
f, mm	Solución aproximada	0,2	0,6	1,2	1,9	2,6	6,6	13,6	28,4
	Solución exacta	0,2	0,6	1,2	1,9	2,6	6,7	13,7	28,6

y aproximada dan valores casi iguales: $M_{máx} \approx 12{,}84$ kN·cm. 7.63. Por las ecuaciones $v_{máx} = e\left(\frac{1}{\cos(0{,}5l\sqrt{N/(EJ)})} - 1\right)$, $\sigma_{máx} = N\left(\frac{1}{F} + \frac{e}{W_z \cos(0{,}5l\sqrt{N/(EJ)})}\right)$ componemos la tabla. La fuerza crítica de Euler es $N_E = 575$ kN. 7.64. $M_{máx} = 9{,}1$ kN·cm. 7.65. $f = \frac{\pi^2}{8}\frac{e}{N_E/N - 1} \approx \frac{1{,}23e}{N_E/N - 1}$. Véase en la tabla la comparación con la solución exacta obtenida por medio de los datos del problema 7.63 (cuando $e = 1$ cm, $N_E = 575$ kN). 7.66. La flecha máxima es $f = \frac{e}{1 - \sigma_{med}/\sigma_E}$ o $f = \frac{e}{1 - N/N_E}$, donde $\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{(l/i)^2}$, N_E es la carga de Euler. La tensión máxima de compresión es $\sigma_{comp} = \sigma_{med}(1 + f/k)$, donde $k = h/6$ es el radio del núcleo de la sección. La tensión máxima $\sigma_{tr} = \sigma_{med}(f/k - 1)$. Las tensiones en la sección serán de un mismo signo cuando $f \leqslant k$. La tensión σ_{comp} llegará al límite de fluencia cuando la flecha máxima sea igual a $f = k(\sigma_{fl}/\sigma_{med} - 1)$. 7.67. 1) $N_{ad} = 11{,}47$ kN; 2) 11,6 kN. 7.68. $f = f_0/(1 - \alpha) = 8$ cm. Aquí $\alpha = Nl^2/(\pi^2 EJ) = N/N_E$, $\sigma_{máx} = N(1/F + f/W) = 178{,}5$ MPa. 7.69. Cuando $l = 1{,}2$ m, $N_{máx} = 24{,}4$ kN (un 76% de la carga de Euler). Cuando $l = 1{,}8$ m, $N_{máx} = 12{,}9$ kN (un 90% de la carga de Euler). 7.70. *a*) $M_B = 2{,}05$ kN·m; *b*) 3,05 kN·m; *c*) 0,58 kN·m; *d*) 1,48 kN·m; *e*) 2,4 kN·m; *f*) 0,8 kN·m. 7.71. *a*) $M_B = -3{,}88$ kN·cm, $\sigma_{máx} = 196{,}5$ MPa; *b*) $M_B = -2{,}9$ kN·cm. 7.72.

Cuando $n=2$, $\omega^2=\frac{32EJg}{Pl^3}\left(1-\frac{Nl^2}{8EJ}\right)$; cuando $n=3$, $\omega^2=\frac{54EJg}{Pl^3}\left(1-\frac{Nl^2}{9EJ}\right)$.

La frecuencia de oscilaciones se aproxima a cero, si la fuerza comprimente N alcanza su valor crítico: cuando $n=2$, $N_{cr}=8EJ/l^2$, cuando $n=3$, $N_{cr}=9EJ/l^2$. 7.73. $k^2=40$, el valor exacto es $k^2=4\pi^2\approx 39{,}4784$. 7.74. $k^2=10$, el valor exacto de $k^2=9{,}870$. 7.75. $k^2=21$, el valor exacto de $k^2=20{,}19$. 7.76. $k^2=39{,}54$, el valor exacto de $k^2=39{,}4784$. 7.77. Cuando $n=10$ $k^2=39{,}4867$, cuando $n=16$, $k^2=39{,}4797$, cuando $n=20$, $k^2=39{,}4789$; el valor exacto es 39,4784. Con el crecimiento de n se observa una cada vez mayor aproximación desde «arriba», si $n=20$ el error disminuye hasta un 0,001%. 7.78. $k^2=9{,}87065$. 7.79. $k^2=9{,}869788$, el valor exacto es $k^2=9{,}869604$. El error es cerca de un 0,0001%. 7.80. Cuando $n=7$, $k^2=36{,}8983$; cuando $n=11$, $k^2=38{,}4171$; cuando $n=17$, $k^2=39{,}0337$; cuando $n=21$, $k^2=39{,}1863$; el valor exacto es $k^2=39{,}4784$. En *este problema* obtenemos una aproximación desde «abajo» (véase la respuesta para el problema 7.77). 7.81. Cuando $n=7$, $k^2=9{,}7052$; cuando $n=11$, $k^2=9{,}8080$; cuando $n=17$, $k^2=9{,}8433$; cuando $n=21$, $k^2=9{,}8526$; el valor exacto de $k^2=9{,}8696$. 7.82. Cuando $n=7$, $k^2=19{,}3736$; cuando $n=11$, $k^2=19{,}8569$; cuando $n=17$, $k^2=20{,}0530$; cuando $n=21$, $k^2=20{,}1008$, el valor exacto de $k^2=20{,}1907$. 7.83. Cuando $\alpha=3/2$, $\beta=3/2$ $k_1^2=9{,}667$. El valor exacto es $k^2=9{,}45$ (el error es de un 2,3%). Cuando $\alpha=1/2$, $\beta=2$, $k^2=9{,}096$, el valor exacto es $k^2=8{,}95$ (el error es de un 1,5%). 7.84. El crecimiento catastrófico de la flecha en el caso de carga dinámica tiene lugar cuando $P/P_E\approx 4{,}5$. Véase en la figura para la solución del problema la forma de la flexión lateral.

Capítulo 8

8.1. $\sigma_{máx}=86$ MPa. 8.2. Cuando $h/R=1$ el error es de un 9,5%. Cuando $h/R=0{,}5$ el error es de un 2%. 8.3. $\sigma_{máx}=72{,}5$ MPa $<[\sigma]$. 8.4. $P=3{,}27$ kN. 8.5. $\Delta=2$ mm. 8.6. $\sigma_{máx}=102{,}8$ MPa. 8.7. $\sigma_B=123{,}5$ MPa, $\sigma_A=-89{,}7$ MPa. 8.8. $\Delta=92{,}3\pi P/(ER)$, aproximadamente $\Delta=96\pi P/(ER)$. 8.9. $\sigma_{máx}=115$ MPa. 8.10. $\Delta=0{,}0108$, cm. 8.11. $\sigma_{máx}$ en el eslabón estirado es en un 22,3% mayor que en el anular. 8.12. Según la III teoría $d_{ext}=190$ mm, según la IV teoría $d_{ext}=166$ mm. 8.13. Sirve como margen de seguridad:

$(\sigma_\theta^2)\ \sigma_{z\neq 0}=(\sigma_\theta^2)\ \sigma_{z=0}-\left(\frac{r_{int}^2}{r_{ext}^2-r_{int}^2}\right)^2 p^2$. 8.14. $\Delta=0{,}0322$ mm. 8.15. $p=86{,}5$ MPa, $p_{int}=252$ MPa. 8.16. $\Delta=0{,}0283$ mm. 8.17. $\Delta=0{,}06$ mm. 8.18. $\Delta=0{,}045$ mm, $P=47$ kN. 8.19. $\Delta=0{,}0212$ mm. $n_{fl}=2{,}82$. 8.20. $\Delta=0{,}073$ mm. 8.21. en 1,3 veces. 8.22. $p_{int}=36$ MPa. 8.23. $p=5{,}65$ MPa, en la de cobre $(\sigma_t)_{máx}=-25{,}8$ MPa, en la de acero $(\sigma_t)_{máx}=25{,}7$ MPa.

Capítulo 9

9.1. $\sigma_{din}=256$ MPa. 9.2. $\sigma_{din}=122$ MPa. 9.3. $l_{lim}=2{,}54$ m, $n_{máx}=3395$ r.p.m. 9.4. $\sigma_{din}=94{,}9$ MPa, $v=113$ m/s. 9.5. $\sigma_{din}=160$ MPa $=[\sigma]$. 9.6. $\sigma_{din}=155$ MPa. 9.7. $\sigma_{din}=97{,}6$ MPa. 9.8. $\sigma_{din}=103{,}8$ MPa. 9.9. $\sigma_{din}=27{,}8$ MPa. 9.10. $\omega=22$ rad/s, $\tau_{din}=118$ MPa. 9.11. $n_{cr}=419$ r.p.m. 9.12. $\tau_{din}=29{,}6$ MPa. 9.13. $\tau_{din}=13{,}65$ MPa. 9.14. $(\sigma_r)_{máx}=(\sigma_t)_{máx}=\frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2R^2=320$ MPa, en el disco con el orificio $(\sigma_t)_{máx}=640$ MPa, $(\sigma_r)_{máx}=320$ MPa. 9.15. $n=3340$ r.p.m. 9.16. En el disco $(\sigma_t)_{máx}=(\sigma_r)_{máx}=16{,}7$ MPa, en la llanta $\sigma_{máx}=217{,}5$ MPa. 9.17. $n=$

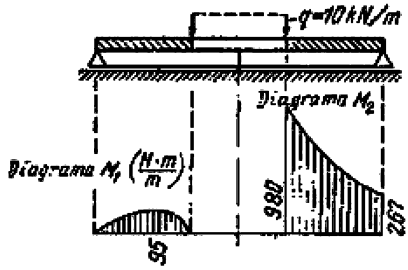
$= 4183$ r.p.m. 9.18. $(\sigma_t)_{máx} = 152$ MPa, $\sigma_r = -47{,}8$ MPa. 9.19. $\omega_1 = 44{,}72$ 1/s, $\omega_2 = 42{,}55$ 1/s. 9.20. $\omega_1 = 1121$ 1/s, $T_1 = 0{,}00560$ s, $\omega_2 = 1112$ 1/s, $T_2 = 0{,}00565$ s. 9.21. $\omega = 69{,}14$ 1/s, $T = 0{,}0909$ s. 9.22. La frecuencia aumentará en dos veces. 9.23. $\omega = 12{,}65$ 1/s. 4. *a*) $\omega = 19{,}51$ 1/s, $T = 0{,}322$ s, $\omega' = 19{,}1$ 1/s, $T' = 0{,}329$ s; *b*) $\omega = 78$ 1/s, $T = 0{,}0805$ s, $\omega' = 74{,}8$ 1/s, $T' = 0{,}084$ s; *c*) $\omega = 156$ 1/s, $T = 0{,}043$ s, $\omega' = 151$ 1/s, $T' = 0{,}0416$ s. 9.25. $\omega = 39{,}8$ 1/s. 9.26. $\omega = 24{,}62$ 1/s. 9.27. $\omega = 20{,}44$ 1/s. 9.28. N° 45. Sin tomar en consideración la masa de las vigas. 9.29. $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_{rot}^2}$, donde $\omega_0 = \sqrt{c/m}$. 9.30. $\omega = \sqrt{3EJ/(2ml^3)}$. 9.31. $m_{red} = m/2 + \sum m_i \operatorname{sen}^2(\pi x_i/l)$. 9.32. $\omega = 53{,}78$ 1/s. 9.33. $\omega = 17{,}30$ 1/s. La solución exacta es $\omega = 17{,}42$ 1/s. 9.34. $d = 8{,}7$ cm del árbol rígido, $d = 4{,}3$ cm del árbol flexible. 9.35. $\omega = 28{,}5$ 1/s. 9.36. *a*) $\omega = 313$ 1/s, $T = 0{,}0201$ s, *b*) $\omega = 244$ 1/s, $T = 0{,}0257$ s; *c*) $\omega = 171$ 1/s, $T = 0{,}0367$ s. 9.37. $\omega = 455$ 1/s. 9.38. $\omega = 343$ 1/s, $T = 0{,}0183$ s. 9.39. $r = 0{,}33l$. 9.40. Sin tomar en consideración la fuerza comprimente $\omega = 54{,}92$ 1/s. Tomando en consideración la fuerza comprimente $\omega = 39$ 1/s. 9.41. $\omega_1 = 2{,}87$ 1/s, $\omega_2 = 7{,}44$ 1/s. 9.42. $l_1 = 1{,}2$ m, $l = 1$ m, $A = 0{,}32$ mm, $\sigma_{din} = 39{,}6$ MPa. 9.43. Véase la solución. 9.44. $\sigma_{din} = 118{,}7$ MPa, $\sigma_{máx} = 213{,}4$ MPa. 9.45. Véase la solución. 9.46. $A = 3{,}85$ mm, $\sigma_{din} = 168{,}9$ MPa. 9.47. $n = 489$ r.p.m., $\sigma_{din} = 63{,}93$ MPa. 9.48. $\sigma_{din} = 93{,}3$ MPa, si el régimen es estacionario $\sigma_{din} = 55{,}95$ MPa. 9.49. $\tau_1 = 69{,}4$ MPa, $\tau_2 = 58{,}5$ MPa. 9.50. $\omega_1 = 0{,}618\sqrt{c/m} = 19{,}66$ 1/s, $A_1/A_2 = 0{,}618$; $\omega_2 = 1{,}618\sqrt{c/m} = 51{,}48$ 1/s, $A_1/A_2 = -1{,}618$. 9.51. $\omega_1 = 73{,}7$ 1/s, $\omega_2 = 285$ 1/s. 9.52. $\omega_1 = 26{,}3$ 1/s, $\omega_2 = 138$ 1/s. 9.53. $\omega_1 = 5{,}41$ 1/s, $\omega_2 = 76{,}75$ 1/s. 9.54. $\omega_1 = 223$ 1/s, $\omega_2 = 379$ 1/s. 9.55. $\omega_1 = 26{,}8$ 1/s, $A_1 : A_2 : A_3 = (-2{,}283) : 1 : 1{,}561$; $\omega_2 = 52{,}74$ 1/s, $A_1 : A_2 : A_3 = 0{,}219 : 1 : (-2{,}561)$. 9.56. $A_1 = 14{,}76$ mm, $A_2 = 14{,}66$ mm, $\sigma_{din} = 83{,}2$ MPa. 9.57. $m_2 = 16{,}8$ kg. 9.58. $\Delta_{din} = 7{,}13$ mm, $\sigma_{din} = 7{,}85$ MPa. 9.59. $\Delta_{din} = 2{,}54$mm, $\sigma_{din} = 161{,}4$ MPa. 9.60. $\lambda_{din} = 5{,}6$ mm, $\sigma_{din} = 560$ MPa. Tomando en consideración la masa de la barra $\lambda_{din} = 5{,}55$ mm, $\sigma_{din} = 556$ MPa. 9.61. $\sigma_{din} = 30{,}8$ MPa, $h = 4{,}27$ m. 9.62. Las tensiones dinámicas son iguales. 9.63. $\tau_{din} = 327$ MPa. 9.64. $n = 15$. 9.65. $\sigma_{din} = 357$ MPa. 9.66. $\sigma_{din} = 206$ MPa. 9.67. $\sigma_{din} = 156$ MPa. 9.68. $\tau_{din} = 1182$ MPa. 9.69. $\sigma_{din} = 16{,}6$ MPa. 9.70. $M_{máx} = \sqrt{10EJm_0gh}$. 9.71. Cuando el coeficiente de magnetoestricción es $\lambda = 7{,}5 \cdot 10^{-5}$ no aparecen oscilaciones paramétricas. A la resonancia paramétrica principal le corresponde la frecuencia de excitación igual a $f_e = 1800$ Hz. 9.72. $V_{cr} = 868$ km/h. 9.73. Los coeficientes en las expresiones de las frecuencias primera y segunda son $\lambda_1 = 4{,}768$, $\lambda_2 = 9{,}054$; los valores exactos son $\lambda_1 = 4{,}730$, $\lambda_2 = 7{,}859$. 9.74. $\lambda_1 = 3{,}148$, $\lambda_2 = 7{,}078$; los valores exactos son $\lambda_1 = \pi = 3{,}142$, $\lambda_2 = 2\pi = 6{,}283$. 9.75. $\lambda_1 = 4{,}734$, $\lambda_2 = 7{,}860$, $\lambda_3 = 11{,}000$, $\lambda_4 = 14{,}142$, $\lambda_5 = 17{,}412$ los valores exactos (en adición al problema 9.73) son $\lambda_3 = 10{,}996$, $\lambda_4 = 14{,}137$, $\lambda_5 = 17{,}280$. 9.76. $\lambda_1 = 3{,}148$, $\lambda_2 = 6{,}285$, $\lambda_3 = 9{,}448$, $\lambda_4 = 12{,}628$, $\lambda_5 = 15{,}885$. Los valores exactos son $\lambda_k = k\pi$.

Capítulo 10

10.1. $[\sigma_p] = 43$ MPa. 10.2. $n = 1{,}7$. 10.3. $n = 2{,}1$. 10.4. $n = 4{,}28$. 10.5. $n = 1{,}27$. 10.6. $M_{máx} = 4{,}41$ kN·m, $M_{mín} = 1{,}1$ kN·m. 10.7. $n = 1{,}92$. 10.8. $n = 1{,}49$. 10.9. $n = 1{,}5$, si está pulido $n = 1{,}6$. 10.10. $n_I = 1{,}78$, $n_{II} = 1{,}91$, $n_{III} = 1{,}71$. 10.11. $n = 1{,}95$. 10.12. Desde $n_1 = 288$ r.p.m. hasta $n_2 = 428$ r.p.m. 10.13. $N = 0{,}855 \cdot 10^6$ ciclos. 10.14. $n = 1{,}18$. 10.15. $\Delta l_{II} = 1{,}3$ mm. 10.16. $\delta = 1{,}1$ mm. 10.17. $\phi = 9°$. 10.18. $\Delta D = 2{,}14$ mm. 10.19. $t = 300$ h. 10.20. En un 30%. 10.21. $n = 1{,}1$. 10.22. $2l = 8{,}5$ mm. 10.23. $2l = 25{,}4$ mm. 10.24. $K_{I,c} = 195$ MN·m$^{-3/2}$. 10.25. $N_{lim} = 67\,700$. 10.26. $P(\sigma > \sigma_T) = 0{,}00003$. 10.27. $P = 0{,}0001$. 10.28. $P = 0{,}00006$.

11.1. $\sigma_{máx} = 100$ MPa, $\sigma_y = 0$, $\tau_{máx} = 50$ MPa, $K_{máx} = 300$ N·m/m, $\rho_x = 6$ m (convexidad hacia abajo), $\rho_y = -20$m (convexidad hacia arriba). 11.2. $\sigma_{x,\,máx} = 112{,}5$ MPa, $\sigma_{y,\,máx} = 37{,}5$ MPa, $\tau_{máx} = 37{,}5$ MPa. La condición de resistencia se cumple: $\sigma_e = 99$ MPa < 120 MPa. 11.3. $M_x = M_y = M$. Por una superficie esférica de radio $\rho = Eh^2/[12M(1-\mu)]$, $\varepsilon_{máx} = (h/2):\rho = 6M(1-\mu)/(Eh^2)$. 11.4. $|K_{máx}| = M$, el vector $K_{máx}$ forma con el eje x un ángulo de 45°; la curvatura es igual a cero, la torsión $\theta' = 6M/(Gh^3)$. 11.5. $M_x = -M_y = K = 30$ N·m/m; los momentos actúan bajo un ángulo de 45° respecto a los lados de la lámina: $\rho_x = 1{,}2$ m, $\rho_y = -1{,}2$ m; $\sigma_x = -\sigma_y = \frac{6M(1+\mu)}{h^2} = 58{,}5$ MPa. La condición de resistencia se cumple: $\sigma_e = 58{,}5 - (-58{,}5) = 117$ MPa < 160 MPa. 11.6. $M_y = 87{,}5$ MPa. Por una superficie cilíndrica de radio $\rho_x = 3{,}32$ m y unas generatrices paralelas al eje y: $\sigma_{x,\,máx} = 60$ MPa, $\sigma_{y,\,máx} = 21$ MPa, $\tau_{máx} = 19{,}5$ MPa. 11.7. $\sigma_{máx} = 80$ MPa, $\tau_{máx} = 30$ MPa. 11.8. $\sigma_{máx} = 23{,}4$ MPa, $f = 0{,}3$ mm. 11.9. $\sigma_{máx} = 75$ MPa, $K_{máx} = 75$ N·m, $\tau_{máx} = 28{,}1$ MPa, $f = 0{,}73$ mm. 11.10. $\Delta p = 75$ kPa, las tensiones disminuyen en 1,6 veces. 11.11. a) Las ecuaciones de los diagramas de los momentos flectores son: en la dirección radial: $M_1 = p[r^2(1+\mu) - x^2 \times (3+\mu)]/16$, en la dirección circunferencial: $M_2 = p[r^2(1+\mu) - x^2 \times (1+3\mu)]/16$. El momento flector máximo (junto al empotramiento) es máx $M = -pr^2/8 = 3{,}12$ N·m/m. La tensión máxima es $\sigma = 18{,}7$ MPa. La flecha máxima es máx $v = pr^4/(64D) = 4{,}85 \cdot 10^{-3}$ cm; b) La flecha máxima (en el centro) es máx $v = \frac{pr^4}{64D}\,\frac{5+\mu}{1+\mu} = 0{,}0197$ cm. Los momentos flectores son: $M_1 = p[r^2(3+\mu) - x^2(3+\mu)]/16$, $M_2 = p[r^2(3+\mu) - x^2(1+3\mu)]/16$, máx $M = pr^2(3+\mu)/16 = 5{,}06$ N·m/m. 11.12. máx $v = \frac{5+\mu}{1+\mu}\,\frac{pr^4}{64D} = 0{,}035$ cm, máx $\sigma = \frac{3}{8}(3+\mu)\,\frac{pr^2}{h^2} = 91{,}5$ MPa, máx $\tau = pr/(2h) = 1{,}5$ MPa. 11.13. máx $v = Pr^2/(16\pi D) = 0{,}046$ cm. 11.14. $v = (Px^2/(8\pi D))\ln(x/r + P(r^2 - x^2)/(16\pi D)$, máx $v = Pr^2/(16\pi D) = 2{,}48 \cdot 10^{-3}$ cm (en el centro), $M_1 = P[(1+\mu)\ln(r/x) - 1]/(16\pi D)$, $M_2 = P[(1+\mu)\ln(r/x) - \mu]/(4\pi)$. 11.15. Los momentos flectores M_1 en la sección circunferencial y M_2 en la sección radial son idénticos e iguales a M_0. La flecha es $v = M_0(r^2 - x^2)/[(1+\mu)\,2D]$, donde x es el radio variable. La flecha máxima (en el centro) es máx $v = M_0 r^2/[(1+\mu)\,2D] = 0{,}0440$ cm. 11.16. máx $v = \frac{pr^2}{16D}\left(\frac{3+\mu}{1+\mu}R^2 - \frac{7+3\mu}{4(1+\mu)}r^2 - r^2\ln\frac{R}{r}\right)$. 11.17. máx $v = \frac{pr^2}{16D}\left(R^2 - \frac{3}{4}r^2 - r^2\ln\frac{R}{r}\right)$ 11.18. a) $M_1,\ M_2 = \frac{MR^2 - mr^2}{R^2 - r^2} \mp \frac{1}{x^2}\,\frac{(M-m)R^2r^2}{R^2 - r^2}$; b) $M_1,\ M_2 = -\frac{qr}{2}(1+\mu) \times \left[\frac{r^2}{R^2 - r^2}\left(1 \mp \frac{R^2}{r^2}\right)\ln\frac{r}{R} + \ln\frac{x}{R}\right]$. 11.19. La flecha máxima (en el extremo del orificio) es máx $v = 0{,}0246$ cm. La tensión máxima (en el mismo lugar) es $\sigma = 58{,}6$ MPa; véanse en la figura los diagramas M_1 y M_2. 11.20. máx $v = 7{,}5 \cdot 10^{-3}$ cm. 11.21. máx $v = v(a) = 2{,}97 \cdot 10^{-3}$ cm. 11.22. $\sigma_{tor} = 2{,}88$ MPa disminuye 2,18 veces. 11.23. $\sigma_{tor} = 18{,}4$ MPa aumenta 1,56 veces. 11.24. $h = 1{,}84$ mm. 11.25. $\sigma_{tor} = 50{,}6$ MPa es dos veces menor. 11.26. Las tensiones críticas disminuirán 76 MPa. 11.27. $\tau_{tor} = 114$ MPa. 11.28. $\tau_{tor} = 122{,}6$ MPa

disminuye 44 MPa. 11.29. Es mayor en 2,58 veces. 11.30. $P_{ad} = 1{,}45$ kN. 11.31. a) En 2,72 veces; b) en 4 veces. 11.32. a) En 3,32 voces; b) en 1,8 veces. 11.33. $x = 107$ mm. 11.34. $P_{ad} = 18$ kN. 11.35. $q = 40$ kN/m, $N = 80$ kN/m. 11.36. $q = 4{,}2$ kN/m. 11.37. $P_{ad} = 2{,}57$ kN a partir de la condición de estabilidad de las alas. 11.38. $\Delta P_{ad} = 1{,}03$ kN. La pared del perfil en U es menos estable. 11.39. La carga admisible aumentará en $\Delta P = 1{,}39$ kN. La pared del perfil en U es menos estable. 11.40. $P_{tor} = 10{,}7$ kN. 11.41. Las dimensiones de cada uno de dobleces es igual a 10 mm, las otras paredes son de 30 mm cada una, $P_{tor} = 19$ kN. 11.42. $P_{tor,\,máx} = 264$ kN, $k_{mín} = 1{,}65$, $P_{tor,\,mín} = 88$ kN, $k_{máx} = 4{,}95$. 11.43. $h = 0{,}72$ mm. 11.44. $P_{tor} = 15{,}6$ kN. 11.45. $p_{tor} = 2{,}95 \cdot 10^6$ Pa $\approx 0{,}3$ atm. 11.46. $h = 1{,}8$ mm. 11.47. $M_{tor} = 6{,}2$ kN·m, $\tau_{tor} = 4{,}1$ MPa. 11.48. $M_{tor} = 4$ kN·m, $\tau = 15{,}9$ MPa. 11.49. $M_{ad} = 190$ kN·m disminuirá en 142,5 kN·m. 11.50. $Q_{tor} = 34{,}9$ kN. 11.51. Aumentará 3,33 veces. 11.52. $h = 9{,}3$ mm. 11.53. La sobrepresión exterior 12 kPa supera la presión de cálculo (inferior) 7,25 kPa; la estabilidad de la bóveda no está asegurada. 11.54. $n_{est} = 1{,}71$. 11.55. $h \geqslant 1{,}75$ cm. 11.56. $(\Delta q)_{cr} = 69$ kPa. 11.57. El angular Pr 100-5, el factor de seguridad es $n = 2{,}72$. 11.58. $N = 308$ kN. 11.59. $N = 32{,}2$ kN. 11.60. $\sigma_{tor} = 108$ MPa. 11.61. $k^2 = \sigma_{x,\,cr} a^2 h/D = 32$ siendo el valor exacto $k^2 = 4\pi^2 = 39{,}4784$. 11.62. $k^2 = 39{,}25$, en *este caso* en comparación con el valor exacto (véase la respuesta del problema anterior) el método de diferencias finitas da una aproximación desde «abajo». 11.63. $\tau_1 = 164$ MPa, $\tau_2 = 54{,}6$ MPa. 11.64. $\tau = 109$ MPa. 11.65. $\tau_{tor} = 95{,}4$ MPa, $\tau_1 = 146$ MPa, $\tau_2 = 172$ MPa. 11.66. $\tau_{gen} = 73{,}7$ MPa, $\tau_1 = 114$ MPa, $\tau_2 = 105$ MPa. 11.67. Hasta el deterioro $q_{tor} = 4{,}63 \cdot 10^4$ N/m, $q_1 = 4{,}92 \cdot 10^5$ N/m, $q_2 = 2{,}63 \cdot 10^5$ N/m. Una vez deteriorada $q_{tor} = 3{,}18 \cdot 10^5$ N/m, $q_1 = 6{,}87 \cdot 10^5$ N/m. 11.68. El momento límite disminuirá en un 48%.

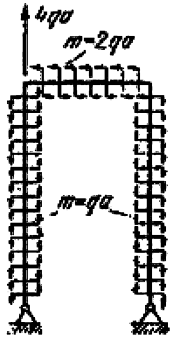


Para el problema 11.19

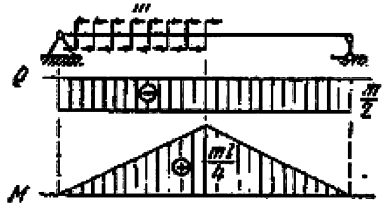
Capítulo 12

12.1. $w_A = \dfrac{5Pl}{EF}$. 12.2. $\Delta_A = 2{,}4$ mm. 12.3. $\alpha = \pi/4$, $P_{max} = \sqrt{2}V$ $[\sigma]/l$. 12.4. $P = 142$ kN. 12.5. $\alpha = \beta$, $\alpha = \pi/2 - \beta$. 12.6. $N_A = 360$ kN, $N_B = -80$ kN (compresión), $N_C = 20$ kN. Después de la descarga $N_A = -13{,}3$ kN, $N_B = 40$ kN, $N_C = 26{,}7$ kN. 12.7. $\alpha = \pi/4$. 12.8. $\alpha = \pi/4$. 12.9. $N = P/(2 \operatorname{sen} \alpha)$, $\delta = l \cdot \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha = \sqrt[3]{P/EF}$. 12.10. $\sigma = 136$ MPa, $\delta = 18{,}4$ cm, $\alpha = 2{,}1°$. Las tensiones disminuyen 4,5 veces. 12.11. $\delta = 0{,}75\, Pa/(EF)$, la sección fija del cable coincide con la polea B. 12.12. $N_1 = 11N_0/9$, $N_2 = 7N_0/9$, $N_3 = 8N_0/9$. 12.13. $N_1 = 0{,}3M/a$, $N_2 = 0{,}1M/a$, $N_3 = -0{,}1M/a$, $N_4 = -0{,}3M/a$. 12.14. $P = 24{,}8$ kN, $\varphi = 12{,}4°$. 12.15. $\alpha = 30°$. 12.16. $\Delta_3 = -\dfrac{2Ph \cos \alpha}{EF \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} 2\beta}$, la barra debe ser fabricada más larga. 12.17. máx $|\sigma| = 212$ MPa (compresión en el tramo AB). 12.18. $2a = b$. 12.19. $w = 0$, $\sigma = \alpha \Delta t \cdot E$ 12.20. Véase la solución. 12.21. $\mu = 0{,}5$. 12.22. $\Delta V = 3\mu p a^3/E$. 12.23. Cuando $k \leqslant 3{,}5$ la resistencia es constante, cuando $k \geqslant 3{,}5$ la resistencia disminuye en la relación $(k + 3)/8{,}5$. 12.24. $\tau_{xy} = \sqrt{\sigma_x \sigma_y}$. 12.25. Cabo b) es más peligroso cuando $\sigma > 3\pi/2$. 12.26. $\tau = P\sqrt{2}/(2ah)$. 12.27. Para el estado tensional plano debe ser $\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = 0$. Además,

en caso del estado tensional lineal debe cumplirse la relación $\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 0$. 12.28. $\sigma_{AC} = 3{,}73$, $\tau = 37{,}3$ MPa, $\sigma_E^{II} = 33{,}75$ MPa. 12.29. $\sigma_1/\sigma_2 = \operatorname{tg}\alpha + \mu/[1 + \mu \operatorname{tg}\alpha]$. 12.30. $\tau_{máx} = 52{,}5$ MPa. 12.31. $F = \pi D^3/(32a)$. 12.32. $M_{tor} = 2{,}45$ kN·m. 12.33. $\varphi = 2v_T l : (Ga D)$. 12.34. $M_A = \frac{8}{11}K$, $M_D = \frac{4}{11}K$, $M_L = \frac{2}{11}K$, $\varphi_B = \frac{8}{11}\frac{Ka}{GJ_p}$, $\varphi_C = \frac{19}{11}\frac{Ka}{GJ_p}$, $\varphi_E = \frac{4}{11}\frac{Ka}{GJ_p}$. 12.35. $\varphi = \frac{32Kl}{\pi GD^4(1-\alpha^4)}$. 12.36. $k = 0{,}545$. 12.37. $\tau_{máx} = 100$ MPa. 12.38. $\tau_{máx,\,AC} : \tau_{máx,\,CB} = 1$. 12.39. $K = 3\pi D^3 \alpha f t E/16$. 12.40. $N = \frac{K}{2l + D^2(1+\alpha)^2/[16(1+\mu)l]}$. 12.41. $J_y = J_z = a^4/24$, $J_{yz} = 0$. 12.42. $h/a = \sqrt{2}/(2-\sqrt{2})$. 12.43. Véase la solución. 12.44. Cuando $h/b = \sqrt{3}$ el momento de inercia J_z es máximo. Al módulo resistente W_z es máximo cuando $h/b = \sqrt{2}$. 12.45. $J_z = a^4/15$. 12.46. $h/b = \sqrt{2}$. 12.47. Los puntos de coordenadas $x = \pm\sqrt{(h^2 - b^2)/12}$, $y = 0$. 12.49. Todos los ejes que pasan por el punto O son principales. 12.50. Véase la solución. 12.51. $b = Bx/l$. 12.52. Véase la solución. 12.53. En la capa neutral de la viga $\tau = t/2$. 12.54. El momento flec-



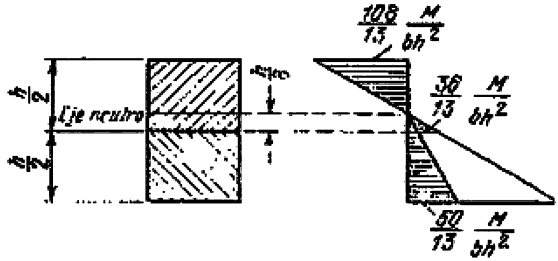
Para el problema 12.56



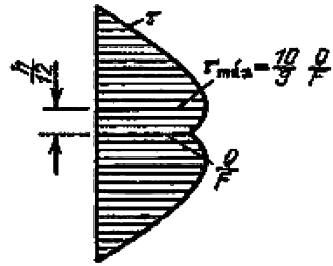
Para el problema 12.61

tor es $M = (L \operatorname{ctg} 36°)/2 = 0{,}69L$. 12.55. $L = \frac{2}{3}\frac{lbh}{1-\mu}\frac{\Delta B}{B}$. 12.56. Véase la figura. 12.57. $M = 0$, $Q = -m$, $N = -m$ en la parte horizontal y $N = m$, en la parte vertical de la estructura. 12.58. $M_{máx} = qr^2$. 12.59. Los puntos angulares de la estructura con la carga dada son relativamente inmóviles. 12.60. $\sigma_\alpha = \sigma \cos^2\alpha$, $\tau_\alpha^{horiz} = \frac{\sigma}{2}\operatorname{sen} 2\alpha$, $\tau_\alpha^{vert} = \tau \cos\alpha$, donde $\sigma = \frac{Px}{J}y_K$ y $\tau = \frac{P}{bJ}S_K$ son las tensiones en el punto K de la sección transversal de la viga $\left[J = \frac{bh^3}{12},\ S_K = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_K^2\right)\right]$, y_K es la distancia entre el punto K y la capa neutra de la viga]. 12.61. Véase la figura. 12.62. Véase la figura. 12.63. $\sigma_{máx} = \frac{3}{4}\frac{Pl}{bh^2}$ en la sección media de la viga. 12.64. $0{,}5l$. 12.65. $\tau_{máx} = \frac{10}{9}\frac{Q}{F}$, donde $F = \frac{bh}{2}$ es el área de la sección; véase en la figura el diagrama τ. 12.66. $Q = 0$,

máx $|M| = ma$. 12.67. $\delta_A = ql^3/(2EF)$, donde $F = bh$ es el área de la sección de la viga. 12.68. Véase la figura. 12.69. $M = 0{,}57aR^2$. 12.70. $M_{destr} = 2Ph/3$. 12.71. $\delta_A = 0$, $\delta_B = 2Pa^3/(3EJ)$. 12.72. $\Delta = Pl^3/(16EJ)$. 12.73. Véase la so-

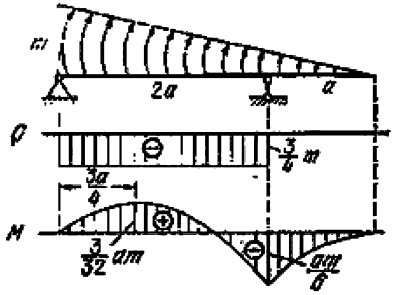


Para el probelma 12.62

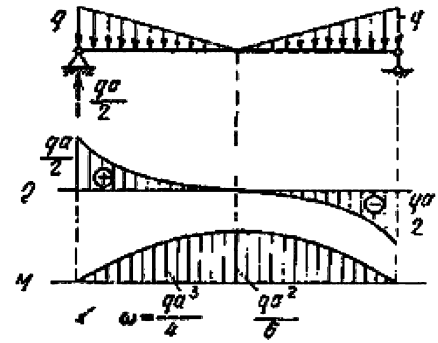


Para el problema 12.65

lución. 12.74. $q = 6P/l$. 12.75. $\theta_B = -qa^3/(6EJ)$. 12.76. $L = 3EJ/(250l)$. 12.77. $\delta = 3\pi Pr^3/(4EJ)$. 12.78. $x = 0{,}365l$. 12.79. $v_{máx} = 3qa^4/(40EJ)$, $\theta_A = qa^3/(8EJ)$. Véanse en la figura los diagramas Q y M. 12.80. El diagrama de

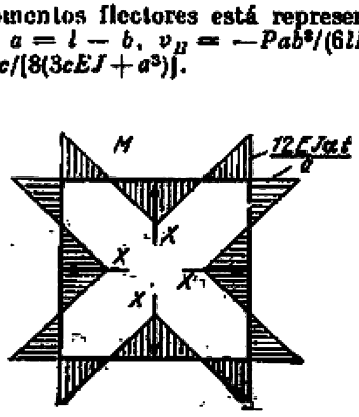


Para el problema 12.68

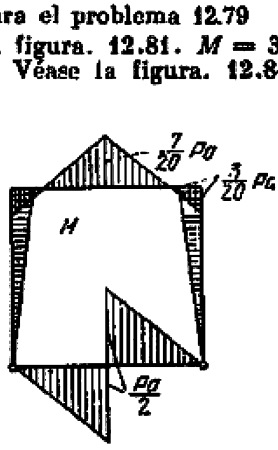


Para el problema 12.79

los momentos flectores está representado en la figura. 12.81. $M = 3EJ\delta/a^2$. 12.82. $a = l - b$, $v_B = -Pab^2/(6lEJ)$. 12.83. Véase la figura. 12.84. $\Delta = 3qa^4c/[8(3cEJ + a^3)]$.



Para el problema 12.80



Para el problema 12.83

12.85. $\delta_0 = \frac{Pr^3}{J}\left(\frac{3\pi}{2G} + \frac{1}{3E}\right)$, donde $J = \frac{\pi d^4}{64}$, E y G son los módulos de elasticidad del material de I y II géneros. 12.86. $x = a/3$. 12.87. $J_1/J_2 = a^3/b^3$, $\theta = La^2/(3lEJ_1) = Lb^2/(3lEJ_2)$. 12.88. $\delta_B = 2La^2/(3EJ)$ (hacia arriba).

Anexo 1. Tablas de consulta

Tabla 1

Valores de las funciones

$$\eta = e^{-\beta x}(\cos \beta x + \operatorname{sen} \beta x) \text{ y } \eta_1 = e^{-\beta x}(\cos \beta x - \operatorname{sen} \beta x) \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$$

para cálculos de vigas sobre base elástica

βx	η	η_1	βx	η	η_1
0,0	*1,0000*	*1,0000*	3,6	−0,03659	−0,01241
0,1	0,9907	0,8100	3,7	−0,03407	−0,00787
0,2	0,9651	0,6398	3,8	−0,03138	−0,00401
0,3	0,9267	0,4888	3,9	−0,02862	−0,00077
0,4	0,8784	0,3564	(5/4)π	*−0,02786*	*0,00000*
0,5	0,8231	0,2415	4,0	−0,02583	+0,00189
0,6	0,7628	0,1431	4,1	−0,02309	0,00403
0,7	0,6997	0,0599	4,2	−0,02042	0,00572
(1/4)π	*0,6448*	*0,0000*	4,3	−0,01787	0,00699
0,8	*0,6354*	−0,0093	4,4	−0,01546	0,00791
0,9	0,5712	−0,0657	4,5	−0,01320	0,00852
1,0	0,5083	−0,1108	4,6	−0,01112	0,00786
1,1	0,4476	−0,1457	4,7	−0,00921	0,00898
1,2	0,3899	−0,1716	(6/4)π	*−0,00898*	*0,00898*
1,3	0,3355	−0,1897	4,8	−0,00748	0,00892
1,4	0,2849	−0,2011	4,9	−0,00593	0,00870
1,5	0,2384	−0,2068	5,0	−0,00455	0,00837
(1/2)π	*0,2079*	*−0,2079*	5,1	−0,00334	0,00795
1,6	0,1959	−0,2077	5,2	−0,00229	0,00746
1,7	0,1576	−0,2047	5,3	−0,00139	0,00692
1,8	0,1234	−0,1985	5,4	−0,00063	0,00636
1,9	0,0932	−0,1899	(7/4)π	*0,00000*	*0,00579*
2,0	0,0667	−0,1794	5,5	+0,00001	0,00578
2,1	0,0439	−0,1675	5,6	0,00053	0,00520
2,2	0,0244	−0,1548	5,7	0,00095	0,00464
2,3	0,0080	−0,1416	5,8	0,00127	0,00409
(3/4)π	*0,0000*	*−0,1340*	5,9	0,00152	0,00356
2,4	−0,0056	−0,1282	6,0	0,00169	0,00307
2,5	−0,0166	−0,1149	6,1	0,00180	0,00261
2,6	−0,0254	−0,1019	6,2	0,00185	0,00219
2,7	−0,0320	−0,0895	2π	*0,00187*	*0,00187*
2,8	−0,0369	−0,0777	6,3	0,00187	0,00181
2,9	−0,0403	−0,0666	6,4	0,00184	0,00148
3,0	−0,04226	−0,05632	6,5	0,00179	0,00115
3,1	−0,04314	−0,04688	6,6	0,00172	0,00087
π	*−0,04321*	*−0,04321*	6,7	0,00162	0,00063
3,2	−0,04307	−0,03831	6,8	0,00152	0,00042
3,3	−0,04224	−0,03060	6,9	0,00141	0,00024
3,4	−0,04079	−0,02374	7,0	0,00129	0,00009
3,5	−0,03887	−0,01769	(9/4)π	*0,00120*	*0,00000*

Tabla 2

Valores de las integrales determinadas que se encuentran al calcular esfuerzos y desplazamientos en barras y anillos con eje circular

№	$f(\beta)$	$\int_0^{\alpha} f(\beta)\,d\beta$
1	$\operatorname{sen}\beta$	$1-\cos\alpha$
2	$\cos\beta$	$\operatorname{sen}\alpha$
3	$\operatorname{sen}^2\beta$	$-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2\alpha+\frac{1}{2}\alpha$
4	$\cos^2\beta$	$\frac{1}{4}\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\alpha$
5	$\operatorname{sen}^3\beta$	$\frac{1}{12}\cos 3\alpha-\frac{3}{4}\cos\alpha+\frac{2}{3}$
6	$\cos^3\beta$	$\frac{1}{12}\operatorname{sen}3\alpha+\frac{3}{4}\operatorname{sen}\alpha$
7	$\beta\operatorname{sen}\beta$	$\operatorname{sen}\alpha-\alpha\cos\alpha$
8	$\beta\cos\beta$	$\cos\alpha+\alpha\operatorname{sen}\alpha-1$
9	$\beta^2\operatorname{sen}\beta$	$2\alpha\operatorname{sen}\alpha-(\alpha^2-2)\cos\alpha-2$
10	$\beta^2\cos\beta$	$2\alpha\cos\alpha+(\alpha^2-2)\operatorname{sen}\alpha$
11	$\beta\operatorname{sen}^2\beta$	$\frac{1}{4}\alpha^2-\frac{1}{4}\alpha\operatorname{sen}2\alpha-\frac{1}{8}\cos 2\alpha+\frac{1}{8}$
12	$\beta\cos^2\beta$	$\frac{1}{4}\alpha^2+\frac{1}{4}\alpha\operatorname{sen}2\alpha+\frac{1}{8}\cos 2\alpha-\frac{1}{8}$
13	$\operatorname{sen}\beta\cos\beta$	$\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\alpha$
14	$\operatorname{sen}\beta\cos^2\beta$	$\frac{1}{3}(1-\cos^3\alpha)$
15	$\operatorname{sen}^2\beta\cos\beta$	$\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\alpha$
16	$\operatorname{sen}^2\beta\cos^2\beta$	$\frac{1}{8}\alpha-\frac{1}{32}\operatorname{sen}4\alpha$
17	$\operatorname{sen}2\beta$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha$
18	$\cos 2\beta$	$\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\alpha$
19	$\beta\operatorname{sen}2\beta$	$\frac{1}{4}\operatorname{sen}2\alpha-\frac{1}{2}\alpha\cos 2\alpha$
20	$\beta\cos 2\beta$	$\frac{1}{4}\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\alpha\operatorname{sen}2\alpha-\frac{1}{4}$
21	$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$	$1-\cos\alpha$
22	$\cos(\alpha-\beta)$	$\operatorname{sen}\alpha$
23	$\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$	$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha-\frac{1}{2}\alpha\cos\alpha$
24	$\operatorname{sen}\beta\cos(\alpha-\beta)$	$\frac{1}{2}\alpha\operatorname{sen}\alpha$

Continuación de la tabla 2

№	$f(\beta)$	$\int_0^{\alpha} f(\beta)\, d\beta$
25	$\cos\beta \operatorname{sen}(\alpha-\beta)$	$\frac{1}{2}\alpha \operatorname{sen}\alpha$
26	$\cos\beta \cos(\alpha-\beta)$	$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha+\frac{1}{2}\alpha\cos\alpha$

Tabla 3

Coeficientes φ de flexión longitudinal de elementos en compresión axial (está aumentado en 1000 veces)

Esbeltez λ	Resistencia de cálculo R, MPa											
	200	240	280	320	360	400	440	480	520	560	600	640
10	988	987	985	984	983	982	981	980	979	978	977	977
20	967	962	959	955	952	949	946	943	941	938	936	934
30	939	931	924	917	911	905	900	895	891	887	883	879
40	906	894	883	873	863	854	846	849	832	825	820	814
50	869	852	836	822	809	796	785	775	764	746	729	712
60	827	805	785	766	749	721	696	672	650	628	608	588
70	782	754	724	687	654	623	595	568	542	518	494	470
80	734	686	641	602	566	532	501	471	442	414	386	359
90	665	612	565	522	483	447	413	380	349	326	305	287
100	599	542	493	448	408	369	335	309	286	267	250	235
110	537	478	427	381	338	306	280	258	239	223	209	197
120	479	419	366	321	287	260	237	219	203	190	178	167
130	425	364	313	276	247	223	204	189	175	163	153	145
140	376	315	272	240	215	195	178	164	153	143	134	126
150	328	276	239	211	189	171	157	145	134	126	118	111
160	290	244	212	187	167	152	139	129	120	112	105	099
170	259	218	189	167	150	136	125	115	107	100	094	089
180	233	196	170	150	135	123	112	104	097	091	085	081
190	210	177	154	136	122	111	102	094	088	082	077	073
200	191	161	140	124	111	101	093	086	080	075	071	067
210	174	147	128	113	102	093	085	079	074	069	065	062
220	160	135	118	104	094	086	077	073	068	064	060	057

Nota. La resistencia de cálculo R se toma igual al límite de fluencia del material (σ_{fl} o $\sigma_{0,2}$) dividido por el factor k cuyos valores se encuentran entre 1 y 1,1, en función de la calidad de fabricación. En los problemas del presente libro el valor de k es igual a la unidad.

Tabla 4

Valores de las funciones

$$\Phi(u)=\frac{3}{u}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} 2u}-\frac{1}{2u}\right), \quad \Psi(u)=\frac{3}{2u}\left(\frac{1}{2u}-\frac{1}{\operatorname{tg} 2u}\right),$$

$$X(u)=\frac{3(\operatorname{tg} u-u)}{u^3}, \quad u=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{N}{EJ}},$$

para el cálculo de vigas en flexión transversal y longitudinal simultánea

2u	Φ (u)	Ψ (u)	X (u)	2u	Φ (u)	Ψ (u)	X (u)
1,00	1,1304	1,0737	1,1113	2 50	3,0502	2,0364	2,7027
1,10	1,1617	1,0912	1,1379	2,51	3,0963	2,1100	2,7405
1,20	1,1979	1,1114	1,1686	2,52	3,1438	2,1343	2,7794
1,30	1,2396	1,1345	1,2039	2,53	3,1931	2,1595	2,8197
1,40	1,2878	1,1610	1,2445	2,54	3,2437	2,1855	2,8612
1,50	1,3434	1,1915	1,2914	2,55	3,2963	2,2124	2,9043
1,60	1,4078	1,2266	1,3455	2,56	3,3508	2,2402	2,9488
1,70	1,4830	1,2673	1,4085	2,57	3,4072	2,2690	2,9949
1,80	1,5710	1,3147	1,4821	2,58	3,4657	2,2988	3,0427
1,90	1,6750	1,3704	1,5689	2,59	3,5262	2,3297	3,0922
2,00	1,7993	1,4365	1,6722	2,60	3,5890	2,3618	3,1435
2,10	1,9494	1,5158	1,7967	2,61	3,6542	2,3950	3,1968
2,20	2,1330	1,6124	1,9491	2,62	3,7220	2,4295	3,2522
2,21	2,1543	1,6233	1,9663	2,63	3,7925	2,4654	3,3097
2,22	2,1754	1,6343	1,9837	2,64	3,8659	2,5027	3,3696
2,23	2,1972	1,6457	2,0016	2,65	3,9421	2,5415	3,4319
2,24	2,2197	1,6572	2,0199	2,66	4,0218	2,5819	3,4969
2,25	2,2421	1,6690	2,0386	2,67	4,1047	2,6241	3,5646
2,26	2,2654	1,6812	2,0578	2,68	4,1914	2,6680	3,6353
2,27	2,2891	1,6936	2,0775	2,69	4,2820	2,7140	3,7092
2,28	2,3135	1,7062	2,0976	2,70	4,3766	2,7619	3,7863
2,29	2,3384	1,7192	2,1181	2,71	4,4757	2,8121	3,8671
2,30	2,3641	1,7325	2,1392	2,72	4,5795	2,8648	3,9517
2,31	2,3902	1,7461	2,1608	2,73	4,6885	2,9199	4,0405
2,32	2,4171	1,7601	2,1830	2,74	4,8029	2,9778	4,1337
2,33	2,4448	1,7744	2,2057	2,75	4,9233	3,0386	4,2317
2,34	2,4731	1,7891	2,2290	2,76	5,0499	3,1027	4,3349
2,35	2,5022	1,8041	2,2529	2,77	5,1835	3,1702	4,4436
2,36	2,5320	1,8195	2,2774	2,78	5,3245	3,2414	4,5584
2,37	2,5625	1,8354	2,3025	2,79	5,4736	3,3166	4,6797
2,38	2,5939	1,8516	2,3284	2,80	5,6315	3,3963	4,8082
2,39	2,6262	1,8683	2,3550	2,81	5,7990	3,4807	4,9444
2,40	2,6596	1,8854	2,3822	2,82	5,9770	3,5704	5,0892
2,41	2,6935	1,9031	2,4103	2,83	6,1664	3,6659	5,2432
2,42	2,7287	1,9212	2,4391	2,84	6,3685	3,7676	5,4075
2,43	2,7649	1,9398	2,4687	2,85	6,5845	3,8764	5,5832
2,44	2,8021	1,9589	2,4993	2,86	6,8160	3,9928	5,7713
2,45	2,8403	1,9786	2,5306	2,87	7,0646	4,1179	5,9733
2,46	2,8798	1,9989	2,5630	2,88	7,3322	4,2525	6,1907
2,47	2,9204	2,0198	2,5964	2,89	7,6212	4,3977	6,4255
2,48	2,9624	2,0413	2,6307	2,90	7,9343	4,5550	6,6798
2,49	3,0056	2,0635	2,6662	2,91	8,2745	4,7259	6,9561

Continuación de la tabla 4

$2u$	$\Phi(u)$	$\Psi(u)$	$X(u)$	$2u$	$\Phi(u)$	$\Psi(u)$	$X(u)$
2,92	8,6455	4,9121	7,2573	3,12	88,4522	44,8321	71,9577
2,93	9,0516	5,1160	7,5871	3,13	164,7437	82,9812	133,8017
2,94	9,4982	5,3401	7,9496	3,14	1199,4629	600,1900	972,2562
2,95	9,9915	5,5875	8,3500	3,15	−227,1668	−112,9747	−183,8716
2,96	10,5393	5,8622	8,7946	3,16	−103,7576	−51,2892	−83,8391
2,97	11,1510	6,1688	9,2910	3,17	−67,2348	−33,0068	−54,2342
2,98	11,8386	6,5124	9,8489	3,18	−49,7313	−24,2541	−40,0458
2,99	12,6171	6,9035	10,4804	3,19	−39,4800	−19,1176	−31,7195
3,00	13,5057	7,3486	11,2013	3,20	−32,7063	−15,7398	−26,2445
3,01	14,5295	7,8613	12,0317	3,30	−12,0770	−5,4154	−9,5162
3,02	15,7219	8,4583	12,9988	3,40	−7,4248	−3,0787	−5,7378
3,03	17,1282	9,1623	14,1393	3,50	−5,3769	−2,0433	−4,0697
3,04	18,8116	10,0049	15,5044	3,60	−4,2292	−1,4572	−3,1808
3,05	20,8629	11,0314	17,1677	3,70	−3,4990	−1,0787	−2,5292
3,06	23,4176	12,3096	19,2388	3,80	−2,9961	−0,8128	−2,1113
3,07	26,6860	13,9446	21,8886	3,90	−2,6314	−0,6147	−1,8043
3,08	31,0160	16,1105	25,3989	4,00	−2,3570	−0,4803	−1,5694
3,09	37,0244	19,1156	30,2701	4,10	−2,1454	−0,3355	−1,3840
3,10	45,9234	23,5659	37,4839	4,20	−1,9792	−0,2317	−1,2342
3,11	60,4566	30,8334	49,2647				

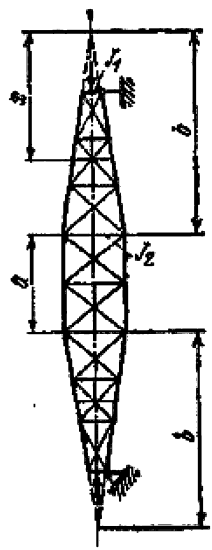


Tabla 5

Coeficientes μ de reducción de la longitud l para barras de rigidez constante con apoyos articulados

La parte media de la longitud a es de rigidez constante (el momento de inercia de la sección es J_2); la rigidez de las partes extremas simétricas respecto al centro de la barra varía según la ley $J_x = J_2 (x/b)^2$

J_1/J_2	a/l			
	0	0,2	0,4	0,6
0	3,14	2,52	1,89	1,26
0,2	1,25	1,15	1,07	1,02
0,4	1,14	1,08	1,04	1,01
0,6	1,08	1,05	1,02	1,01

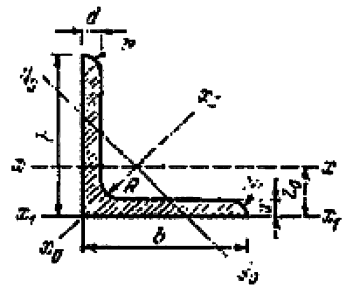


Tabla 6

Angulares equiláteros de acero laminado

Nº del perfil	Dimensiones b	Dimensiones d	Área del perfil F	Masa de 1 m lineal	Magnitudes de referencia respecto a los ejes: x−x J_x	x−x i_x	x_0-x_0 $J_{x_0\,máx}$	x_0-x_0 $i_{x_0\,máx}$	y_0-y_0 $J_{y_0\,mín}$	y_0-y_0 $i_{y_0\,mín}$	x_1-x_1 J_{x_1}	z_0
	mm		cm^2	kg	cm^4	cm	cm^4	cm	cm^4	cm	cm^4	cm
5	50	3	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33
		4	3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
		5	4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
5,6	56	3,5	3,80	3,03	11,6	1,73	18,4	2,18	4,80	1,12	20,3	1,50
		4	4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
		5	5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57
6,3	63	4	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
		5	6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
		6	7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78
7	70	4,5	6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
		5	6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
		6	8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
		7	9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
		8	10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02
7,5	75	5	7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6	8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
		7	10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
		8	11,5	9,02	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113	2,15
		9	12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18
8	80	5,5	8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
		6	9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19
		7	10,8	8,51	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23
		8	12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27
9	90	6	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43
		7	12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47
		8	13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51
		9	15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55

Nº del perfil	Dimensiones b	Dimensiones d	Área del perfil F	Masa de 1 m lineal	Magnitudes de referencia respecto a los ejes: x–x J_x	x–x i_x	x_0–x_0 $J_{x_0\,máx}$	x_0–x_0 $i_{x_0\,máx}$	y_0–y_0 $J_{y_0\,mín}$	y_0–y_0 $i_{y_0\,mín}$	x_1–x_1 J_{x_1}	z_0
	mm		cm²	kg	cm⁴	cm	cm⁴	cm	cm⁴	cm	cm⁴	cm
10	100	6,5	12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7	13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
		8	15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
		10	19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83
		12	22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
		14	26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
		16	29,7	23,2	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06
11	110	7	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96
		8	17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00
12,5	125	8	19,7	15,5	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36
		9	22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
		10	24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45
		12	28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53
		14	33,4	26,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61
		16	37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68
14	140	9	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,72
		10	27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	941	3,88
		12	32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90
16	160	10	31,4	24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11	34,4	27,0	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12	37,4	29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14	43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16	49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
		18	54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
		20	60,4	47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70
18	180	11	38,8	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
		12	42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89
20	200	12	47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13	50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14	54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16	62,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20	76,5	60,1	2871	6,12	4500	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25	94,3	74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
		30	111,5	87,6	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07
22	220	14	60,4	47,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
		16	68,6	53,8	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02
25	250	16	78,4	61,5	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
		18	87,7	68,9	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
		20	97,0	76,1	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91
		22	106,1	83,3	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00
		25	119,7	94,0	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13004	7,11
		28	133,1	104,5	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23
		30	142,0	111,4	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31

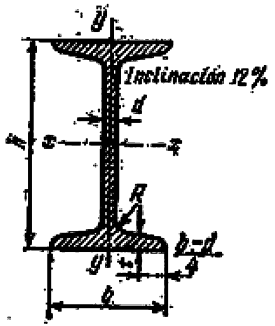


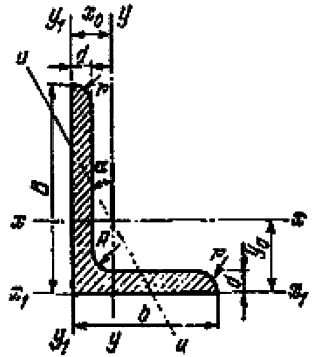
Tabla 7

Perfiles de acero laminados en caliente. Vigas de doble T

Nº del perfil	Dimensiones				Área de la sección F	J_x	W_x	i_x	S_x	J_y	W_y	i_y	Masa de 1 m lineal
	h	b	d	t									
	mm				cm^2	cm^4	cm^3	cm	cm^3	cm^4	cm^3	cm	kg
10	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,5	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6	10,2	43,2	6500	407	11,3	229	337	50	2,8	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7050	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,88	48,6
40	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	57
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	78,5
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39	92,6
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54	108

Tabla 8

Angulares inequiláteros de acero laminado



Nº del perfil	Dimensiones			Área del perfil F	Masa de 1 m lineal	Datos de referencia respecto de los ejes										
						x–x		y–y		x_1–x_1		y_1–y_1		u – u		
	B	b	d			J_x	i_x	J_y	i_y	J_{x_1}	Distancia a partir del centro de gravedad y_0	J_{y_1} mín	Distancia a partir del centro de grav. x_0	J_u mín	i_u mín	Ángulo de inclinación del eje tg α
	mm			cm²	kg	cm⁴	cm	cm⁴	cm	cm⁴	cm	cm⁴	cm	cm⁴	cm	
6,3/4,0	63	40	4	4,04	3,17	16,3	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,54	0,91	3,07	0,87	0,397
			5	4,98	3,91	19,9	2,00	6,26	1,12	41,4	2,08	10,8	0,95	3,72	0,86	0,396
			6	5,90	4,63	23,3	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,1	0,99	4,36	0,86	0,393
			8	7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,9	1,07	5,58	0,85	0,386
7/4,5	70	45	4,5	5,07	3,98	25,3	2,23	8,25	1,28	51	2,25	13,6	1,03	4,88	0,98	0,407
			5	5,59	4,39	27,8	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	5,34	0,98	0,406
7,5/5	75	50	5	6,11	4,79	34,8	2,39	12,5	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	0,436
			6	7,25	5,69	40,9	2,38	14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435
			8	9,47	7,43	52,4	2,35	18,5	1,40	112	2,52	34,2	1,29	10,9	1,07	0,430

Continuación de la tabla 8

Nº del perfil	Dimensiones			Área del perfil F	Masa de 1 m lineal	Datos de referencia respecto de los ejes										
						x–x		y–y		x_1–x_1		y_1–y_1		u–u		
	B	b	d			J_x	i_x	J_y	i_y	J_{x_1}	Distancia a partir del centro de gravedad y_0	J_{y_1} mín	Distancia a partir del centro de grav. x_0	J_u mín	i_u mín	Ángulo de inclinación del eje tg α
	mm			cm²	kg	cm⁴	cm	cm⁴	cm	cm⁴	cm	cm⁴	cm	cm⁴	cm	
8/5	80	50	5	6,36	4,99	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6	2,6	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387
			6	7,55	5,92	49,0	2,55	14,8	1,40	102	2,65	25,2	1,17	8,88	1,08	0,386
9/5,6	90	56	5,5	7,86	6,17	65,3	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,28	11,8	1,22	0,394
			6	8,54	6,70	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,394
			8	11,18	8,77	90,9	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,390
10/6,3	100	63	6	9,59	7,53	98,3	3,2	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393
			7	11,1	8,70	113	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392
			8	12,6	9,87	127	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391
			10	15,5	12,1	154	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	0,387
11/7	110	70	6,5	11,4	8,98	142	3,53	45,6	2	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402
			7	12,3	9,64	152	3,52	48,7	1,99	309	3,57	80,3	1,6	28,8	1,53	0,402
			8	13,9	10,9	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400
12,5/8	125	80	7	14,1	11	227	4,01	73,7	2,29	452	4,01	119	1,8	43,4	1,76	0,407
			8	16	12,5	256	4	83,0	2,28	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	0,406
			10	19,7	15,5	312	3,98	100	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	0,404
			12	23,4	18,3	365	3,95	117	2,24	781	4,22	210	2	69,5	1,72	0,400

Continuación de la tabla 8

Nº del perfil	Dimensiones			Área del perfil F	Masa de 1 m lineal	Datos de referencia respecto de los ejes											
						x–x		y–y		x_1–x_1		y_1–y_1		u–u			
	B	b	d			J_x	i_x	J_y	i_y	J_{x_1}	Distancia a partir del centro de gravedad y_0	J_{y_1}	Distancia a partir del centro de grav. x_0	J_u mín	i_u mín	Ángulo de inclinación del eje tg α
	mm			cm²	kg	cm⁴	cm	cm⁴	cm	cm⁴	cm	cm⁴	cm	cm⁴	cm	
14/9	140	90	8	18	14,1	364	4,49	120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411
			10	22,2	17,5	444	4,47	146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	0,409
16/10	160	100	9	22,9	18	606	5,15	186	2,85	1221	5,19	330	2,23	110	2,2	0,391
			10	25,3	19,8	667	5,13	204	2,84	1359	5,23	335	2,28	121	2,19	0,390
			12	30	23,6	784	5,11	239	2,82	1634	5,32	405	2,36	142	2,18	0,388
			14	34,7	27,3	897	5,08	272	2,8	1910	5,40	477	2,43	162	2,16	0,385
18/11	180	110	10	28,3	22,2	952	5,8	276	3,12	1933	5,88	444	2,44	165	2,42	0,375
			12	33,7	26,4	1123	5,77	324	3,1	2324	5,97	537	2,52	194	2,40	0,374
20/12,5	200	125	11	34,9	27,4	1449	6,45	446	3,58	2920	6,5	718	2,79	264	2,75	0,392
			12	37,9	29,7	1568	6,43	482	3,57	3189	6,54	786	2,83	285	2,74	0,392
			14	43,9	34,4	1801	6,41	551	3,54	3726	6,62	922	2,91	327	2,73	0,390
			16	49,8	39,1	2026	6,38	617	3,52	4264	6,71	1061	2,99	387	2,72	0,388
25/16	250	160	12	48,3	37,9	3147	8,07	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604	3,54	0,410
			16	63,6	49,9	4091	8,02	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,50	0,408
			18	71,1	55,8	4545	7,99	1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866	3,49	0,407
			20	78,5	61,7	4987	7,97	1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405

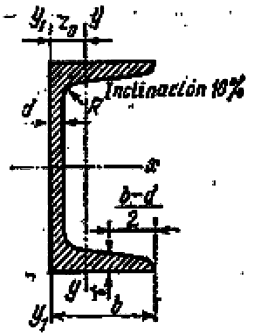


Table 9

Perfiles en U de acero laminados en caliente

Nº del perfil	Masa de 1 m lineal	Dimensiones				Área de la sección	Magnitudes de referencia respecto a los ejes							
							x–x				y–y			z_o
		h	b	d	t	F	J_x	W_x	i_x	S_x	J_y	W_y	i_y	
	kg	mm				cm²	cm⁴	cm³	cm	cm³	cm⁴	cm³	cm	cm
5	4,8	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	13,3	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,3	1,87	1,80
16a	15,3	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	19,8	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	21,0	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	24,0	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

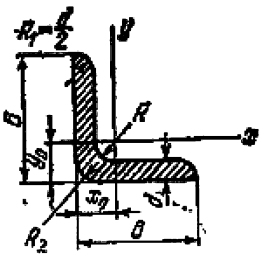


Tabla 10

Pérfiles prensados de tipo Pr-100

Nº del perfil	Dimensiones				Distancia hasta el centro de gravedad		Área de la sección	Momentos de inercia			Radios de giro		Masa teórica (masa de 1 m lineal)	
	B	d	R	R_1	x_0	y_0	F	J_x	J_y	J_{xy}	i_x	i_y	Duraluminio D1, D6, D16	Avial Av, Aleación de aluminio ligada con manganeso AMn
	mm				mm		cm²	cm⁴			cm		kg	
1	12	1,0	1,5	0,2	3,31	3,31	0,294	0,032	0,032	−0,019	0,368	0,368	0,067	0,054
2	15	1,0	1,5	0,2	4,06	4,06	0,294	0,063	0,063	−0,038	0,465	0,465	0,084	0,081
3	15	1,5	2	0,2	4,23	4,23	0,434	0,091	0,091	−0,054	0,456	0,456	0,124	0,119
4	15	2,0	2	0,2	4,42	4,42	0,564	0,114	0,114	−0,068	0,449	0,449	0,161	0,155
5	18	2,0	2	0,2	5,17	5,17	0,684	0,204	0,204	−0,122	0,546	0,546	0,195	0,188
6	20	1,5	2	0,2	5,48	5,48	0,584	0,222	0,222	−0,134	0,617	0,617	0,166	0,161
7	20	2,0	2	0,2	5,67	5,67	0,764	0,284	0,284	−0,171	0,610	0,610	0,218	0,210
8	25	1,5	2	0,2	6,73	6,73	0,734	0,444	0,444	−0,267	0,778	0,778	0,209	0,202
9	25	2,0	2	0,2	6,92	6,92	0,964	0,573	0,573	−0,345	0,771	0,771	0,275	0,265
10	30	2,0	2	0,2	8,17	8,17	1,164	1,011	1,011	−0,609	0,932	0,932	0,332	0,320
11	30	3,0	3,0	0,5	8,51	8,51	1,120	1,439	1,439	−0,864	0,914	0,914	0,490	0,473
12	40	3,0	3	0,5	11,00	11,00	2,320	3,549	3,549	−2,123	1,237	1,237	0,661	0,638
13	40	4,0	4	0,5	11,34	11,34	3,057	4,549	4,549	−2,731	1,220	1,220	0,84	0,841
14	45	4,0	4	0,5	12,59	12,59	3,457	6,592	6,592	−3,957	1,381	1,381	0,935	0,951
15	45	5,0	5	0,5	12,93	12,93	4,277	6,957	6,957	−4,770	1,361	1,361	0,219	1,176
16	50	4,0	4	0,5	13,84	13,84	3,857	9,171	9,171	−5,506	1,542	1,542	1,099	1,061
17	50	5,0	5	0,5	14,18	14,18	4,777	11,107	11,107	−6,478	1,525	1,525	1,361	1,314

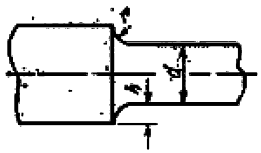


Tabla 11

Coeficientes de concentración efectivos para árboles con arista hueca en flexión K_σ y en torsión (K_τ)

Coeficientes de concentración	σ_r, MPa	h/r										
		1			2			3			5	
		r/d			r/d			r/d			r/d	
		0,03	0,05	0,10	0,02	0,03	0,05	0,01	0,02	0,03	0,01	0,02
K_σ	400	1,59	1,54	1,38	1,76	1,76	1,70	1,86	1,90	1,89	2,07	2,09
	500	1,63	1,59	1,44	1,81	1,82	1,76	1,90	1,96	1,96	2,12	2,16
	600	1,67	1,64	1,50	1,86	1,88	1,82	1,94	2,02	2,03	2,17	2,23
	700	1,71	1,69	1,55	1,91	1,94	1,88	1,99	2,08	2,10	2,23	2,30
	800	1,76	1,73	1,61	1,96	1,99	1,95	2,03	2,13	2,16	2,28	2,38
	900	1,80	1,78	1,66	2,01	2,05	2,01	2,08	2,19	2,23	2,34	2,45
	1000	1,84	1,83	1,72	2,06	2,11	2,07	2,12	2,25	2,30	2,39	2,52
	1200	1,92	1,93	1,83	2,16	2,23	2,19	2,21	2,37	2,44	2,50	2,66
K_τ	400	1,39	1,42	1,37	1,53	1,52	1,50	1,54	1,59	1,61	2,12	2,03
	500	1,40	1,43	1,38	1,55	1,54	1,53	1,57	1,62	1,65	2,18	2,08
	600	1,42	1,44	1,39	1,58	1,57	1,57	1,59	1,66	1,68	2,24	2,12
	700	1,44	1,46	1,42	1,59	1,59	1,59	1,61	1,69	1,72	2,30	2,17
	800	1,45	1,47	1,43	1,61	1,61	1 62	1,64	1,72	1,74	2,37	2,22
	900	1,47	1,50	1,45	1,62	1,64	1,65	1,66	1,75	1,77	2,42	2,26
	1000	1,48	1,51	1,46	1,65	1,66	1,68	1,68	1,79	1,81	2,48	2,31
	1200	1,52	1,54	1,50	1,68	1,71	1,74	1,73	1,86	1,88	2,60	2,40

Tabla 12

Coeficientes de concentración $K_{\sigma D}$ y $K_{\tau D}$ para árboles con piezas encajadas (ajustadas)

Coeficientes de concentración	Diámetro, mm	Tipo de ajuste	σ_r, MPa							
			400	500	600	700	800	900	1000	1200
$K_{\sigma D}$	30	n	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,25
		k	1,69	1,88	2,06	2,25	2,44	2,63	2,82	3,19
		h	1,46	1,63	1,79	1,95	2,11	2,28	2,44	2,76
	50	n	2,75	3,05	3,36	3,66	3,96	4,28	4,60	5,20
		k	2,06	2,28	2,52	2,75	2,97	3,20	3,45	3,90
		h	1,80	1,98	2,18	2,38	2,57	2,78	3,00	3,40
	100 y más	n	2,95	3,28	3,60	3,94	4,25	4,60	4,90	5,60
		k	2,22	2,46	2,70	2,96	3,20	3,46	3,98	4,20
		h	1,92	2,13	2,34	2,56	2,76	3,00	3,18	3,64
$K_{\tau D}$	30	n	1,75	1,90	2,05	2,20	2,35	2,50	2,65	2,95
		k	1,41	1,53	1,64	1,75	1,86	1,98	2,09	2,31
		h	1,28	1,38	1,47	1,57	1,67	1,77	1,86	2,06
	50	n	2,05	2,23	2,52	2,60	2,78	3,07	3,26	3,62
		k	1,64	1,87	2,03	2,15	2,28	2,42	2,57	2,74
		h	1,48	1,60	1,71	1,83	1,95	2,07	2,20	2,42
	100 y más	n	2,17	2,37	2,56	2,76	2,95	3,16	3,34	3,76
		k	1,73	1,86	2,04	2,18	2,32	2,48	2,80	2,92
		h	1,55	1,66	1,83	1,94	2,06	2,20	2,31	2,58

Nota. La tabla presenta los datos de tres tipos de ajuste de piezas: ajuste forzado (*k*), ajuste prensado (*n*) y ajuste fijo deslizante (*h*). En los índices σD y τD, la letra *D* significa pieza (detalle).

Tabla 13

Cargas (tensiones) críticas de cálculo (inferiores) en los problemas de estabilidad de bóvedas

Bóveda cilíndrica circular durante la compresión axial (*R* es el radio de la bóveda, *h*, su grosor). La tensión de cálculo es $\sigma = kE\frac{h}{R}$, donde el coeficiente *k* se determina a partir de la tabla

R/h	$\leqslant 250$	500	750	1000	1500
k	0,18	0,14	0,12	0,10	0,09

Bóveda cilíndrica circular sometida a presión exterior (R es el radio de la bóveda, L, la longitud, h, el grosor). La presión de cálculo es $p = 0{,}92\nu E \frac{h^2}{RL}\sqrt{\frac{h}{R}}$, donde el coeficiente ν se determina mediante la tabla

R/h	$\leqslant 250$	500	1000	1500
ν	0,7	0,6	0,5	0,4

Bóveda cilíndrica circular expuesta a torsión. La tensión de cálculo es $\sigma = 0{,}78kE \frac{h}{R}\sqrt[4]{\frac{Rh}{L^2}}$, donde el coeficiente k se determina mediante la tabla

R/h	$\leqslant 250$	500	1000	1500
k	0,8	0,7	0,6	0,5

Bóveda esférica sometida a presión exterior (R es el radio de la bóveda, h, su grosor). La presión de cálculo es $p = \nu E \frac{h^2}{R^2}$, donde el coeficiente ν se determina mediante la tabla

R/h	$\leqslant 250$	500	750	1000	1500
ν	0,3	0,24	0,20	0,16	0,15

Tabla 84

Unidades de medida de magnitudes mecánicas en el Sistema Internacional (SI)

Nombres de magnitudes	Nombres de las unidades	Designación	Relación de unidades
Fuerza, carga	Newton	N	1 N = 0,1 kgf
Intensidad lineal de la carga		N/m	1 N/m = 0,1 kgf/m = 10^{-3} kgf/cm
Tensión	Pascal	Pa	1 Pa = 0,1 kgf/m^2 = 10^{-4} tf/m^2
Módulo de elasticidad	Pascal	Pa	1 MPa = 10 kgf/cm^2 = 100 tf/m^2
Intensidad de la carga sobre la superficie	Pascal	Pa	1 kPa = 0,1 tf/m^2

Continuación de la tabla 11

Nombres de magnitudes	Nombres de las unidades	Designación	Relación de unidades
Momento de fuerza		N·m	1 N·m = 0,1 kgf·m = 10 kgf·cm
Trabajo, energía	Julio (Newton por metro)	J	1 J = 0,1 kgf·m = 10 kgf·cm
Potencia	Watio (Julio por segundo)	W	1 W = 0,1 kgf/m·s
Longitud	metro	m	1 m = 100 cm = 1000 mm
Masa	kilogramo	kg	1 kg = 0,001 t
Densidad (masa específica)		kg/m³	
Peso específico		kgf/m³	

Unidades múltiplos

Nombre	Tera	Giga	Mega	Kilo	Hecto	Deca
Designación	T	G	M	k	h	da
Multiplicadores	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{2}	10

Unidades fraccionarias

Nombre	Deci	Centi	Mili	Micro	Nano	Pico
Designación	d	c	m	μ	n	p
Multiplicadores	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}

Anexo 2. Cálculo de construcciones en ordenadores

Esquema sinóptico 1. Cálculo de una viga de varios vanos

Más abajo se muestra el esquema sinóptico 1 del programa de cálculo y de construcción de los diagramas básicos para una viga de varios vanos. Se realiza un algoritmo generalizado, compuesto de tres etapas:

1) introducción y corrección de los datos con salida al dispositivo impresor alfabético-digital (DIAD);

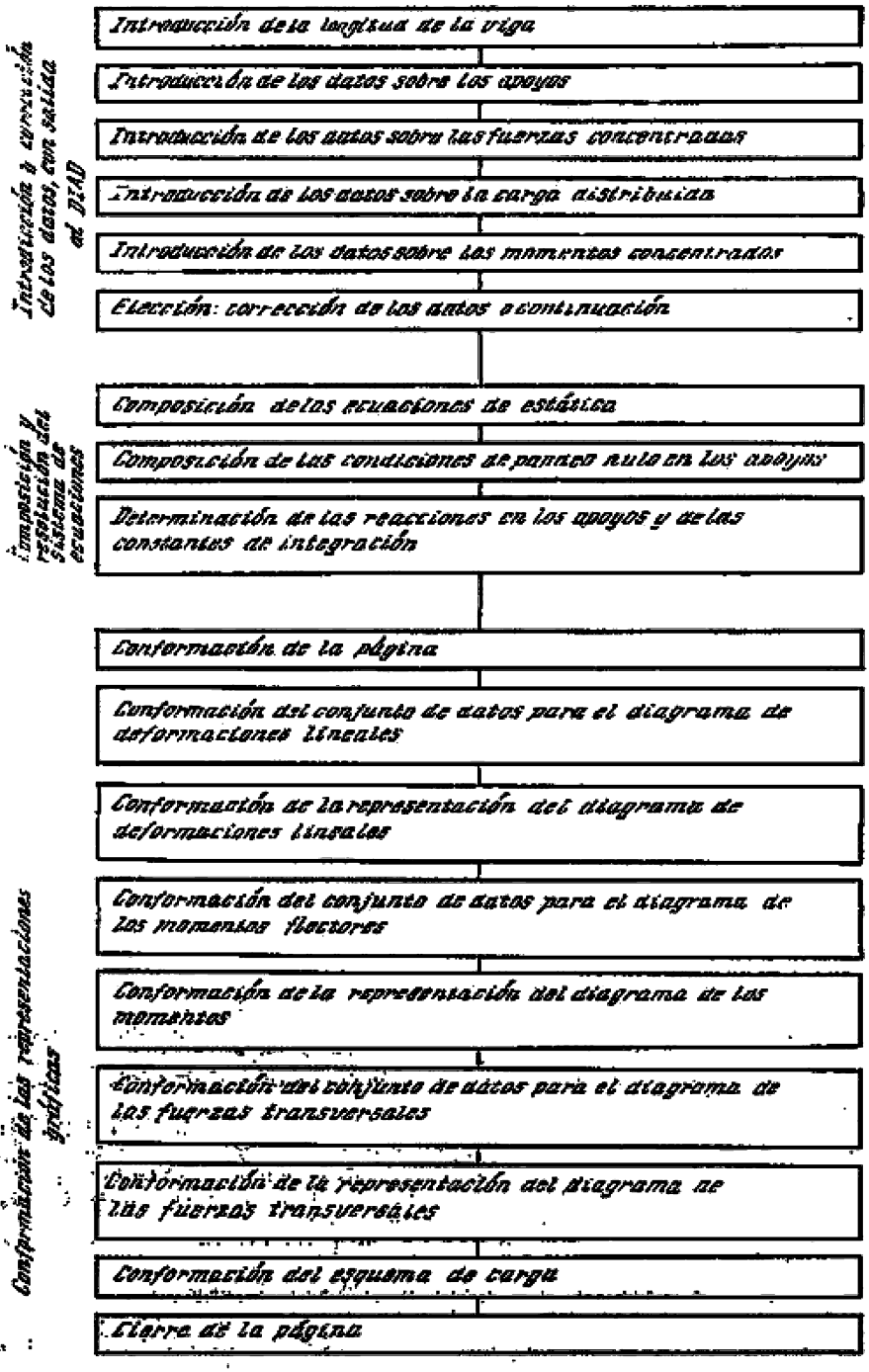
2) composición y resolución del sistema de ecuaciones algebraicas lineales respecto a las reacciones en los apoyos y a las constantes de integración;

3) composición de los datos para la construcción de representaciones gráficas del esquema de carga, de los diagramas de las fuerzas transversales, de los momentos flectores, de las flechas de la viga.

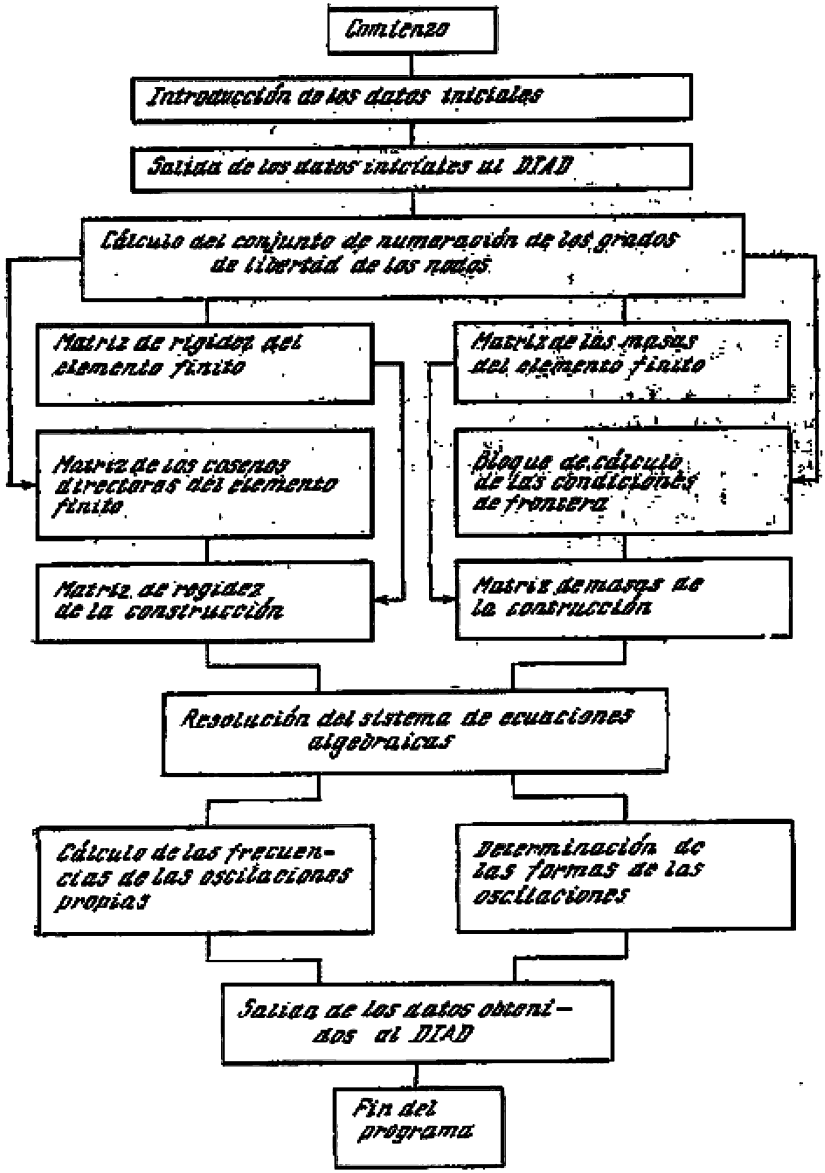
El programa se basa en el método de integración directa de la ecuación diferencial de la línea elástica de la viga.

El esquema sinóptico se ha realizado en forma de programa básico y una serie de funciones externas y de subprogramas. La lengua de programación es FORTRAN-4. En calidad de software auxiliar se utiliza el paquete gráfico GRAFOR. La estructura del programa se muestra en el esquema sinóptico 1 (véase la pág. 474). Algunos programas particulares sirven para el cálculo

Esquema sinóptico 1



Esquema sinóptico 2



de las flechas bajo la acción única de fuerzas exteriores y de las flechas provocadas por reacciones unitarias en los apoyos.

Como resultado de la realización del subprograma del paquete gráfico se trazan automáticamente los diagramas de los momentos flectores, de las fuerzas transversales y de las flechas, se practica el sombreado, se indican las dimensiones, se representan los apoyos mismos, la línea elástica de la viga, las fuerzas y los momentos exteriores, así como la distribución de la carga.

Esquemas sinópticos 2 y 3. Cálculos de las características dinámicas de las vigas, láminas y bóvedas efectuados en ordenadores

Más abajo se muestra el esquema sinóptico 2 del programa que sirve para la determinación de las frecuencias y formas de las oscilaciones propias de elementos constructivos. El cálculo se basa en los métodos de elementos finitos y de superelementos (*MEF* y *MSE*), fundados a su vez en el método variacional de Ritz en desplazamientos (véase también los datos y soluciones de los problemas 7.84 y 9.73—9.76).

El problema tiene resolución uni, bi y tridimensional en función del esquema de cálculo desarrollado. Mediante el algoritmo se prevee también la posibilidad de investigar las construcciones compuestas de materiales de composición y de diferentes módulos.

En la pág. 475 se expone el esquema sinóptico 2 del programa referido a una construcción en aproximación a vigas con el empleo de los MEF. Se utiliza la lengua FORTRAN 4 para ordenadores de sistema[1]) (de la serie EC). La introducción de todos los datos necesarios se efectúa por medio de tarjetas perforadas. El control de que la preparación e introducción de los datos son correctos se lleva a cabo mediante el DIAD (véase la descripción del esquema sinóptico 1, pág. 474).

Los datos iniciales incluyen cuatro grupos de magnitudes.

1. Los parámetros que determinan las dimensiones de las matrices. Entre ellos se tienen: el número de elementos finitos (EF) en los cuales se ha desmembrado la construcción; el número de nodos de cálculo; el número de grados de libertad en cada nodo; el número de nodos fijados.

2. Los parámetros que determinan la topología de la construcción; ellos incluyen la geometría y las dimensiones de la construcción, la disposición mutua de los elementos finitos. A estos datos pertenecen los conjuntos de numeración de los EF, las coordenadas de los nodos de cálculo en el sistema de coordenadas cartesianas.

3. Las características físico-matemáticas del material de la construcción.

4. Los parámetros de rigidez e inercia de la construcción en los nodos de cálculo elegidos.

La división previa de la construcción en EF es arbitraria. El programa admite el empleo de 3 a 6 grados de libertad en cada nodo.

El programa estructural consta del programa básico (directivo) y una serie de subprogramas-módulos, que cumplen determinadas funciones:

— el cálculo de las condiciones de frontera y del número de grados de libertad en el nodo;

— el cálculo de los coeficientes de las matrices de rigidez y de masas de los EF;

— la conformación de la matriz de transformación de las coordenadas, al pasar del sistema local de coordenadas de los EF al sistema general (de la matriz de los cosenos directores);

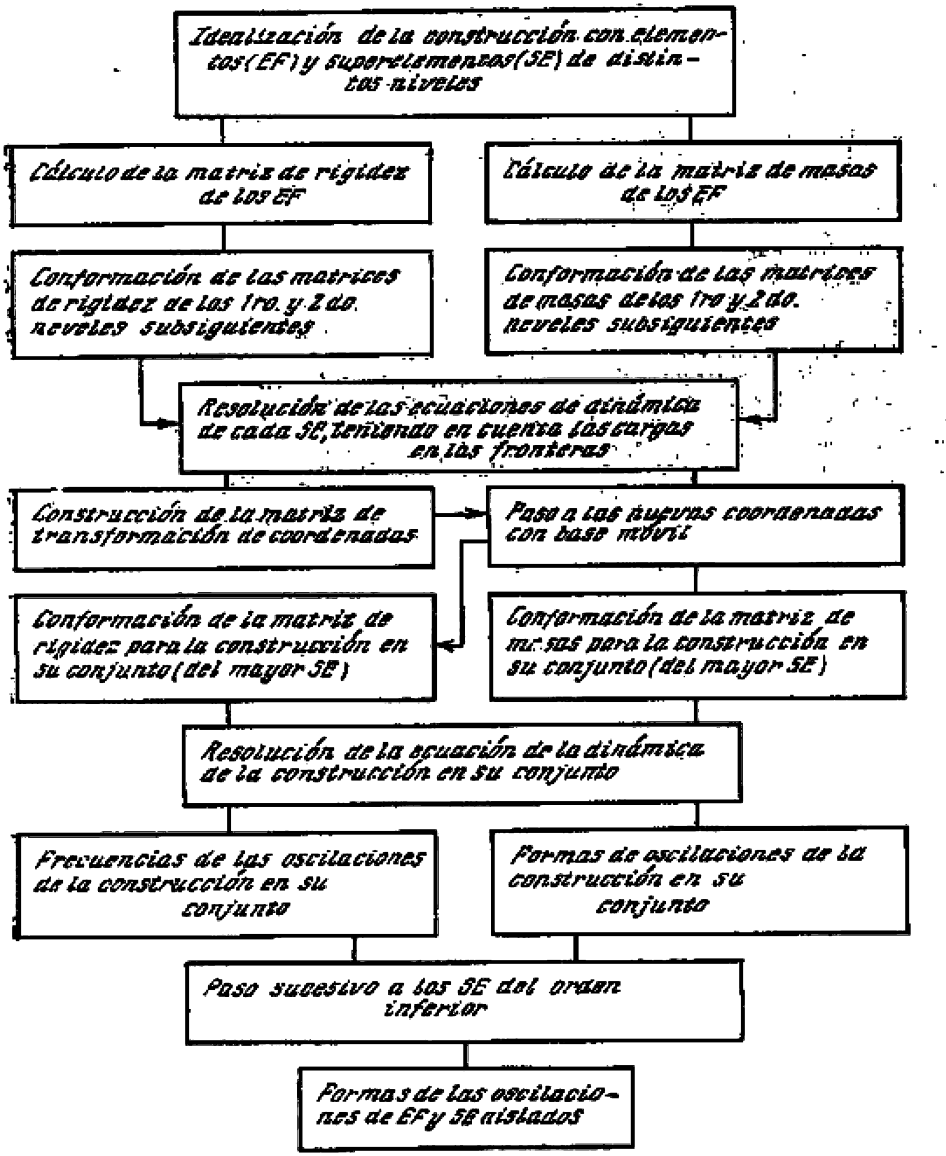
— conformación de las matrices de rigidez y de masas de toda la construcción sobre la base de matrices semejantes, referidas a EF particulares.

En el programa se utilizan, además, procedimientos estándar que ejecutan operaciones sobre las matrices y que forman parte del software del ordenador de sistema unificado. Estos procesos son: los subprogramas de recurrencia y de transposición de matrices; de multiplicación de matrices; de determinación de los valores propios (referidos en las resoluciones de los problemas 7.78—7.80 y 9.75; véanse las págs. 363, 364, 396).

Como resultado del cálculo, se saca a la impresión en el DIAD el vector de las diez frecuencias propias inferiores y de las correspondientes formas de oscilaciones.

[1]) Ordenador de sistema (de la serie EC) — familia de ordenadores de la tercera generación, fabricados en la URSS a partir de 1972.

Esquema sinóptico 3



En el esquema sinóptico 3, se muestra el algoritmo de cálculo de una construcción compuesta de elementos en forma de planchas y bóvedas (cápsulas). Se aplican los métodos de los elementos finitos (MEF) y de los superelementos (MSE). Cada uno de los superelementos, a su vez, se aproxima con elementos finitos. En calidad de EF, en el programa dado, se utilizan planchas de forma triangular en planta. Como superelementos de distintos niveles es cómodo elegir partes constructivamente terminadas del sistema.

Cada superelemento se analiza por separado, después de lo cual se lleva a cabo la operación de concordancia (compatibilización) de los mismos. A fin

de obtener una elevada exactitud de los resultados de la conformación de las matrices de rigidez y de masas de cada EF analizado, él se efectúa teniendo en cuenta la influencia de los restantes elementos sobre el mismo. Esta operación se denomina *condensación dinámica*. Después de determinar las frecuencias y las formas de las oscilaciones de la construcción en su conjunto en coordenadas modales (*recorrido directo*) se la determinan las formas de las oscilaciones de partes aisladas (de los superelementos de todos los niveles, incluidos los elementos finitos) (*recorrido inverso*).

A diferencia del programa para los EF reticulares, el algoritmo de cálculo de la construcción con ayuda de elementos en forma de planchas, contempla el hallazgo de los parámetros inerciales y de rigidez de los nodos durante la realización del programa, lo que simplifica de modo considerable la preparación de los datos iniciales.

Los programas citados, que se basan en los MEF y MSE, también pueden ser aplicados para la resolución de los problemas de la estabilidad estática (véanse los problemas 7.76—7.88), pero, en lugar de determinar la matriz de masas, aquí se halla la matriz de la rigidez geométrica.

Los enfoques examinados de determinación de las características dinámicas (así como en los problemas de estabilidad), también pueden ser utilizados para la resolución de problemas de *mecánica de destrucción* lineal. Con este fin, al estudiar construcciones con defectos en forma de fisuras (grietas), pasantes o superficiales, se usa un *elemento singular* especial. Este elemento se destaca en el campo de partición y se coloca en el vértice de la fisura. La parte restante del superelemento se representa en forma de elementos finitos (regulares) habituales.

Las operaciones más laboriosas que surgen en este caso, son las atinentes al cálculo de los coeficientes de la matriz de rigidez y de masa del elemento singular, que se cumplen por integración numérica de las expresiones matriciales correspondientes. En la lengua FORTRAN de los ordenadores de sistema unificado se han formulado subprogramas-módulos de cálculo automatizado de estas matrices. La llamada de estos módulos mediante programas básicos que sirven para el cálculo de las características dinámicas o para la determinación de los coeficientes de intensidad de las tensiones, se realiza de modo análogo a las operaciones correspondientes en el caso de los EF regulares. Las matrices de rigidez y de masa de toda la construcción se conforman por medio de la suma de los coeficientes correspondientes de las matrices de rigidez y de masas de todos los elementos, incluyendo los singulares.

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, GSP, I-110, URSS.

Mir publica

Koroliuk V., Portenko N.,
Skorojod A., Turbín A.

MANUAL DE LA TEORÍA DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA MATEMÁTICA (2ª edición)

El manual abarca los problemas fundamentales de la teoría de las probabilidades, de la teoría de procesos aleatorios y de la estadística matemática, como también la descripción de métodos e ideas que se utilizan en los razonamientos probabilísticos teóricos. Los métodos probabilísticos teóricos están ilustrados con unos ejemplos simples que ayudan al lector a resolver los problemas de carácter práctico individualmente. El manual puede ser útil tanto para aquellos lectores que sólo desean familiarizarse con los hechos para poder aplicarse prácticamente sin profundizarse en las demostraciones matemáticas, como para los especialistas en el dominio de la teoría de probabilidades en su trabajo científico sirviéndoles de material de referencia. Es de hacer notar que hoy en día este manual es único en su género.

El material del manual se presenta en tres partes. En la primera parte se dan las definiciones principales: del espacio probabilístico, de la magnitud aleatoria, de la esperanza matemática, de las probabilidades y esperanzas matemáticas condicionales. Se consideran también las sucesiones de eventos y magnitudes independientes, las cadenas de Márkov, los teoremas límites y están descritos además los métodos analíticos empleados en los teoremas límites para las sumas de magnitudes aleatorias independientes.

En la segunda parte se dan a conocer las nociones principales de la teoría de procesos aleatorios y de campos, como también las cuestiones de dicha teoría, esto es, la investigación de la continuidad absoluta de las medidas correspondientes a los procesos aleatorios, los teoremas límites para ciertos procesos aleatorios. Además, en esta parte se han considerado todas las clases más importantes de los procesos aleatorios. En la tercera parte se exponen los conceptos principales de la estadística matemática y los métodos por cuyo intermedio se comprueban las hipótesis estadísticas y se construyen las estimaciones de los parámetros de distribuciones probabilísticas. Aquí mismo se indican unos cuantos hechos más importantes de la estadística de procesos aleatorios, la cual constituye una nueva rama de la ciencia.

El libro contiene problemas del curso de resistencia de materiales que reflejan el desarrollo de las diferentes ramas de la técnica en el último tiempo. Parte de estos problemas ha de resolverse por el estudiante, para lo cual debe componer programas para los ordenadores y análizar los resultados. La estructuración del libro, en grado considerable, responde a la del libro de texto de V. Feodósiev "Resistencia de materiales" editado por Mir en 1985. Para que la asimilación del material expuesto resulte más fácil, los capítulos del manual están divididos en un número suficiente de párrafos dentro de los cuales los temas de los problemas son homogéneos. Las magnitudes físicas están dadas en el sistema SI. Todos los problemas tienen su respuesta. Para muchos de estos problemas se dan también las soluciones. Este manual es de interés para estudiantes que se especializan en construcción de maquinaria, de aviones, de barcos.